

Fizică. Astronomie
Manual
pentru clasa a X-a

Caseta tehnică

Cuprins¹

Unitatea I. Cinematica

1.1	Conceptele de bază ale cinematicii	8
a.	Punctul material și solidul rigid – modele utilizate în mecanică	8
b.	Relativitatea mișcării. Sistem de referință	9
c.	Unitățile de lungime și de timp	10
d.	Spațiul și timpul în mecanica clasică	11
1.2	Traectoria. Deplasarea și distanța parcursă	12
a.	Descrierea mișcării unui punct material	12
b.	Traectoria	13
c.	Deplasarea și distanța parcursă	13
1.3	Operații cu vectori	14
a.	Adunarea vectorilor	14
b.	Scăderea vectorilor	15
c.	Componentele și proiecțiile unui vector	16
1.4	Noțiuni elementare despre calculul erorilor	18
a.	Măsurări și erori	18
b.	Erorile măsurărilor directe	19
c.	Erorile măsurărilor indirecte	19
d.	Eroarea unei singure măsurări	20
e.	Prelucrarea grafică a datelor experimentale	20
1.5	Mișcarea rectilinie uniformă. Viteza	22
a.	Legea mișcării rectilinii uniforme	22
b.*	Reprezentarea grafică a legii mișcării rectilinii uniforme	22
	Lucrarea de laborator nr. 1	
	Studiul mișcării rectilinii uniforme	25
1.6 *	Cinematica mișcării relative	26

¹ Conținuturile curriculare marcate convențional cu asterisc (*) sunt pentru profilul real, cele nemarcate – pentru ambele profiluri, iar cele marcate convențional cu (e) se vor studia la extindere.

1.7	Mișcarea rectilinie uniform variată. Accelerația	29
a.	Mișcarea rectilinie neuniformă. Viteza medie. Viteza momentană	29
b.	Mișcarea rectilinie uniform variată. Accelerația	30
c.*	Graficele proiecțiilor accelerației și vitezei	31
d.	Formula lui Galilei	32
e.	Mișcarea corpului pe verticală	33
	Lucrarea de laborator nr. 2	
	Studiul mișcării rectilinii uniform accelerate a unui corp	37
1.8	Mișcarea circulară uniformă. Accelerația centripetă	38
a.	Mișcarea circulară uniformă. Perioada și frecvența de rotație	38
b.	Accelerația centripetă	39
c.	Viteza unghiulară	40
	Proiect STEAM. De la „frecvența de pedalară” la viteza de mișcare a bicicletei	42
	Test de evaluare sumativă. Profil real	43
	Test de evaluare sumativă. Profil umanist	44
1.9^(e)	Mișcarea corpurilor pe traiectorii parabolice	45

Unitatea II. Dinamica

2.1	Principiul inerției. Sisteme de referință inerțiale	48
2.2	Masa și forța. Principiul fundamental al dinamicii	51
a.	Masa	51
b.	Forța	52
c.	Principiul fundamental al dinamicii	53
2.3	Principiul acțiunii și reacțiunii	56
2.4	Atracția universală	57
a.	Legea atracției universale	57
b.	Câmpul gravitațional	58
c.*	Sateți artificiali	59
2.5	Forța elastică. Mișcarea sub acțiunea forței elastice	61
	Lucrarea de laborator nr. 3*	
	Determinarea masei unui corp cu ajutorul resortului și al altui corp cu masa cunoscută	63
	Lucrarea de laborator nr. 3	
	Determinarea constantei elastice a unui resort	64

2.6	Forțele de frecare și de rezistență.	
	Mișcarea în prezența forței de frecare	65
	a. Forța de frecare	65
	b.* Forța de rezistență	68
	Proiect STEAM. Dependența distanței de frânare a vehiculului de starea suprafeței carosabilului	70
	Lucrarea de laborator nr. 4 Determinarea coeficientului de frecare la alunecare	71
2.7 *	Mișcarea corpului sub acțiunea mai multor forțe	72
	Test de evaluare sumativă. Profil real	75
	Test de evaluare sumativă. Profil umanist	76
2.8 ^(e)	Mișcarea sateliților artificiali. Vitezele cosmice	77
2.9 ^(e)	Mișcarea sistemelor de corpuri legate între ele	78
2.10 ^(e)	Sisteme de referință neinertiale	80

Unitatea III.

Impulsul mecanic. Lucrul și energia mecanică

3.1	Impulsul punctului material.	
	Teorema variației și legea conservării impulsului punctului material	82
	a. Impulsul mecanic	82
	b.* Teorema variației și legea conservării impulsului punctului material	83
3.2 *	Impulsul sistemului de puncte materiale.	
	Teorema variației și legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale	85
	a. Forțe interne și externe. Proprietatea forțelor interne	85
	b. Teorema variației impulsului sistemului de puncte materiale	85
	c. Legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale. Aplicații	86
	d. Mișcarea reactivă	87
3.3	Lucrul mecanic. Puterea	89
	a. Lucrul mecanic al forței constante	89
	b. Puterea	90
3.4	Energia cinetică. Teorema variației energiei cinetice	92
	a. Energia cinetică. Teorema variației energiei cinetice a punctului material	92
	b.* Teorema variației energiei cinetice a sistemului de puncte materiale	93

3.5	Lucrul forței de greutate.	
	Energia potențială gravitațională	95
	a. Forța de greutate – forță conservativă	95
	b. Energia potențială gravitațională	96
3.6	Lucrul forței elastice.	
	Energia potențială elastică	98
	Lucrarea de laborator nr. 5*	
	Compararea lucrului forței de elasticitate cu variația energiei cinetice a corpului	100
3.7	Lucrul forței de frecare	102
3.8	Legea conservării și transformării energiei mecanice	103
	a. Legea conservării și transformării energiei mecanice în sisteme izolate în care acționează forțe conservative	103
	b.* Variația energiei mecanice a sistemului în prezența forțelor neconservative și a forțelor externe	104
	Lucrarea de laborator nr. 6*	
	Determinarea coeficientului de frecare la alunecare, aplicând teorema variației energiei mecanice	106
	Test de evaluare sumativă. Profil real	108
	Test de evaluare sumativă. Profil umanist	109
3.9^(e)	Ciocnirea perfect elastică	110

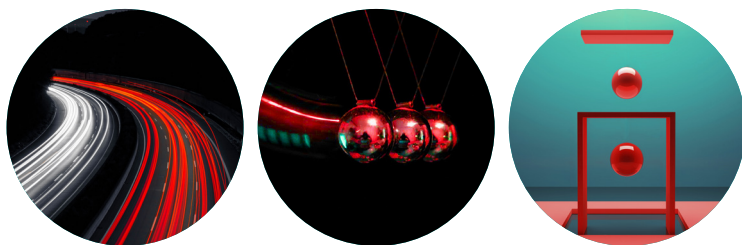
Unitatea IV.

Elemente de statică

4.1	Echilibrul corpului acționat de forțe coplanare.	
	Echilibrul de translație	112
4.2	Momentul forței. Echilibrul de rotație al rigidului	115
4.3	Centrul de greutate al sistemului de puncte materiale	118
	a. Determinarea poziției centrului de greutate	118
	b. Echilibrul în câmpul gravitațional	119
	Proiect STEAM. Asigurarea stabilității echilibrului în inginerie	121
4.4*	Coordonatele centrului de greutate. Centrul de masă	122
	Test de evaluare sumativă. Profil real	124
	Test de evaluare sumativă. Profil umanist	125

Oscilații și unde mecanice

5.1	Procese oscilatorii în natură și în tehnică.	
	Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii	126
5.2	Oscilatorul liniar armonic	129
	a. Pendulul elastic	129
	b. Pendulul gravitațional	129
	c. Legea mișcării oscilatorii armonice	131
	d. Caracteristicile momentane ale oscilațiilor armonice	131
	e. Dependența pulsației și perioadei oscilațiilor armonice libere de proprietățile sistemului	132
5.3	Conservarea și transformarea energiei mecanice în mișcarea oscilatorie	134
	Lucrarea de laborator nr. 7*	
	Studiul pendulului elastic și determinarea constantei de elasticitate a unui resort	136
	Lucrarea de laborator nr. 8	
	Studiul pendulului gravitațional și determinarea valorii intensității câmpului gravitațional (a accelerației gravitaționale)	138
5.4	Oscilații amortizate și forțate. Rezonanța	140
5.5	Propagarea mișcării oscilatorii. Unde transversale și unde longitudinale	142
5.6	Caracteristicile mișcării ondulatorii. Viteza de propagare a undelor	144
5.7 *	Principiul lui Huygens	146
5.8 *	Reflexia și refracția undelor. Studiu calitativ	146
5.9 *	Difracția undelor	147
5.10 *	Interferența undelor. Studiu calitativ	148
5.11	Elemente de acustică	150
	a. Unde sonore. Calitățile sunetului	150
	b. Infrasonete și ultrasunete. Aplicații	151
	Proiect STEAM. Utilizarea ultrasunetului	153
5.12	Unde seismice	154
	Test de evaluare sumativă. Profil real	157
	Test de evaluare sumativă. Profil umanist	158
5.13 ^(e)	Compunerea oscilațiilor coliniare	159
5.14 ^(e)	Ecuția unei plane	160
5.15 ^(e)	Studiul reflexiei și refracției cu ajutorul principiului lui Huygens	162
5.16 ^(e)	Studiul cantitativ al interferenței undelor	163
	Răspunsuri la probleme	165



CINEMATICA

1.1

Conceptele de bază ale cinematicii

a Punctul material și solidul rigid – modele utilizate în mecanică

O particularitate generală a naturii ce ne înconjoară este schimbarea. Fiind foarte diverse și complicate, schimbările se cercetează în cadrul științelor naturii: fizica (multitudinea de forme ale mișcării materiei), biologia (procese de dezvoltare și îmbătrânire a organismelor vii ș.a.), chimia (transformările diferitelor substanțe, de exemplu, dizolvarea zahărului în ceai), astronomia (evoluția corpurilor cerești), geologia (deformările tectonice în scoarța terestră a Pământului) ș.a.

Partea fizicii în care este studiată cea mai simplă formă a mișcării este numită **mecanică**.

Mișcarea mecanică a unui corp este schimbarea în timp a poziției lui în raport cu alte corpuri.

Exemple de mișcare mecanică observăm în jurul nostru la fiecare pas: ridicarea din pat, deschiderea ușii, deplasarea spre școală, circulația mașinilor pe stradă etc.

Studiul mișcării în mecanică este împărțit în două compartimente – **cinematica** și **dinamica**.

Cinematica cercetează formele mișcării corpurilor și caracteristicile acestora, fără a evidenția însă

factorii ce determină o formă sau alta de mișcare, iar **dinamica** studiază mișcarea corpurilor în funcție de cauzele ce o condiționează. Astfel, în dinamică se răspunde la întrebarea: „De ce corpul se mișcă într-un anumit mod?” În cinematică nu se regăsește răspunsul la această întrebare. Deși mișcarea mecanică este cea mai simplă formă a mișcării, ea totuși poate prezenta uneori aspecte complexe.

Exemplu

Urmărind atent căderea unui fir de puf de pădăie (fig. 1.1) într-o zi fără vânt, veți observa că acesta are o mișcare foarte complicată, plutind în aer.

Răsfoind manualul, filă cu filă, puteți observa că, la început, foaia își schimbă forma, apoi diferite porțiuni ale ei se mișcă în mod divers.



Fig. 1.1

Aceste două exemple ne confirmă că descrierea exactă a mișcării mecanice în natură poate fi foarte complicată.

Întrebarea firească este dacă în procesul studierii fenomenelor fizice este necesar să cunoaștem și să analizăm, de fiecare dată, amănunțit fiecare detaliu al mișcării corpurilor. De exemplu, studiind mișcarea unei nave cosmice spre Lună sau spre o planetă oarecare, vom neglija în calculele noastre dimensiunile navei, care sunt foarte mici în comparație cu distanța parcursă. Astfel, concluzionăm că în unele mișcări dimensiunile corpurilor considerate pot fi neglijate în raport cu distanțele până la alte corpuri sau cu distanțele parcurse de aceste corpuri. Menționăm în cazul dat un model foarte des utilizat în mecanică, **modelul punctului material**.

Corpul ale cărui dimensiuni spațiale pot fi neglijate în comparație cu distanța parcursă sau cu distanțele până la alte corpuri este numit punct material.

Din definiție reiese că punctul material nu este neapărat un corp mic, important fiind ca dimensiunile lui să poată fi neglijate în condițiile date. Evident, în alte condiții corpul respectiv nu mai poate fi considerat punct material.

De rând cu noțiunea de punct material, deseori se mai folosește și noțiunea de **mobil**.

Corpul în mișcare la care se neglijează dimensiunile spațiale, fiind reprezentat printr-un punct material în care se consideră concentrată toată masa acestuia este numit mobil.

Să examinăm și să definim încă un model de corp utilizat în mecanică. Cunoaștem că forma și dimensiunile corpului dat depind, într-o anumită măsură, și de corpurile cu care el interacționează. Astfel, lungimea unui resort poate fi mai mare sau mai mică, o lamă poate fi mai mult sau mai puțin încovoiată etc. Deci corpurile din jur pot modifica dimensiunile și forma corpului studiat, adică provoacă deformarea acestuia. În natură nu există corpuri care nu se deformează, unele deformându-se în aceleași condiții mai puțin, altele mai mult. În unele cazuri modificările dimensiunilor și formei corpurilor pot fi neglijate și se utilizează **modelul solidului rigid**.

Corpul care în condițiile date nu-și modifică dimensiunile și forma (adică nu se deformează) se numește solid rigid sau, pur și simplu, rigid.

Pot fi utilizate și alte modele atât pentru corpuri, cât și pentru fenomene fizice. Necesitatea lor rezultă din faptul că proprietățile corpurilor și fenomenele fizice reale din natură sunt foarte complicate. De aceea se evidențiază unele proprietăți (sau factori) ce nu influențează esențial fenomenul studiat și se neglijează. Acest procedeu este cunoscut sub denumirea de **abstractizare**, iar modelele elaborate sunt numite **abstracții**.

b Relativitatea mișcării. Sistem de referință

În definiția mișcării mecanice se menționează că schimbarea poziției corpului dat are loc „în raport cu alte corpuri”.

Exemplu

Poziția automobilului din *figura 1.2* poate fi determinată în raport cu semnul de circulație rutieră de pe marginea șoselei, cu taxiul sau cu ambulanța ce se deplasează în direcție perpendiculară față de drumul pe care se mișcă automobilul, cu unul dintre arbuștii de pe marginea drumului etc. Un pasager din automobil se află în stare de repaus în raport cu vehiculul, dar se mișcă față de celelalte corpuri. Astfel, mișcarea automobilului sau a pasagerului poate fi descrisă în raport cu mai multe corpuri.

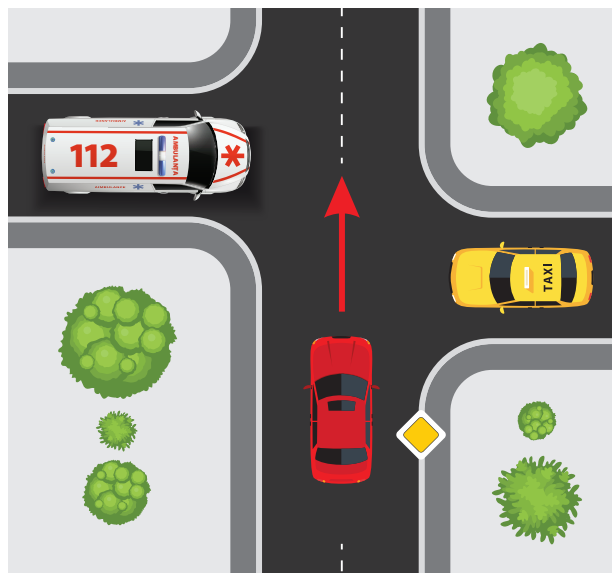


Fig. 1.2

Așadar, ajungem la concluzia:

Mișcarea oricărui corp, precum și starea lui de repaus, ca un caz particular al mișcării, sunt relative.

Pentru a cerceta mișcarea unui corp, trebuie să indicăm corpul în raport cu care este descrisă mișcarea. Acest corp, considerat fix, este numit corp de referință sau reper.

Pentru a determina poziția corpului, considerat punct material, în raport cu un corp de referință, este necesar să legăm de acesta (în mod rigid) un sistem de coordonate și să avem un instrument de măsurare a distanțelor. Alegerea reperului, a originii sistemului de coordonate, a direcției și sensului axelor acestuia este arbitrară. Descrierea mișcării trebuie să fie cât mai simplă pentru observatorul care o cercetează.

Exemplu

Studierea mișcării unui corp pe puntea unui vas maritim poate fi realizată atât în raport cu puntea vasului, cât și în raport cu Pământul.

La descrierea mișcării navei cosmice spre Lună (fig. 1.3), pot fi utilizate diferite corpuri de referință – lansarea navei și mișcarea ei în vecinătatea Pământului este mai convenabil să fie descrise considerând Pământul drept corp de referință. Mișcarea navei de la Pământ spre Lună poate fi descrisă ținându-se seama de poziția ei atât față de Pământ, cât și față de Soare sau de Lună; apropierea de Lună și aselenizarea navei se descriu mai simplu dacă se consideră Luna drept corp de referință.

În definiția mișcării mecanice se menționează, de asemenea, că schimbarea poziției corpului are loc în timp. De aceea, pentru a descrie mișcarea, este necesar și un instrument de măsurare a timpului (un ceasornic), imobil față de corpul de referință.

Toate elementele enumerate mai sus, indispensabile pentru a descrie mișcarea mecanică a corpurilor, constituie ceea ce numim **sistem de referință** sau **referențial**.

Sistemul de referință sau referențialul considerat fix reprezintă un corp de referință legat rigid cu un sistem de coordonate dotat cu instrumente de măsurare a distanțelor și timpului, imobile în raport cu același corp.

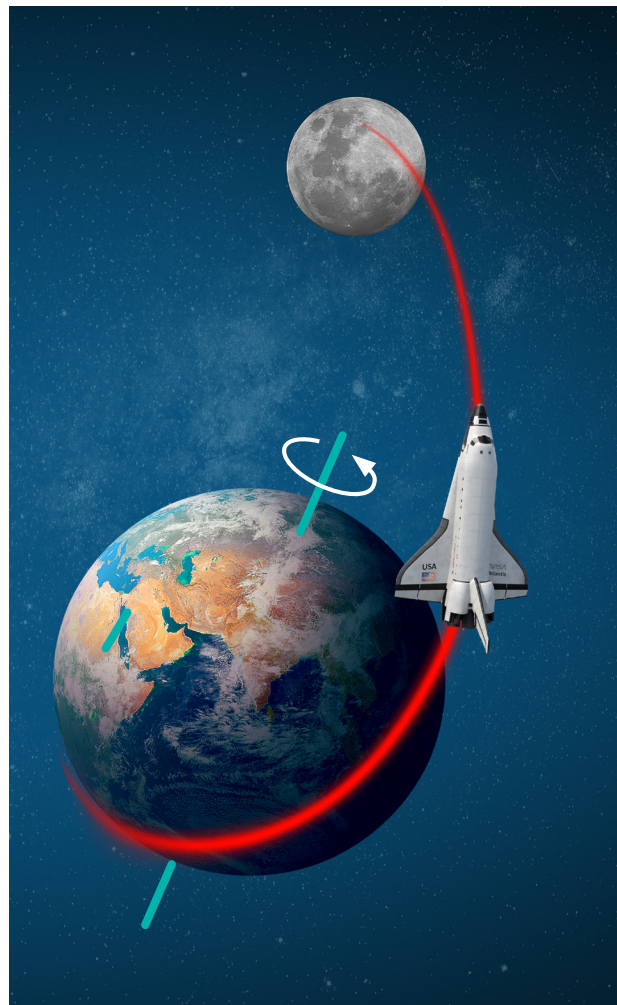


Fig. 1.3

G Unitățile de lungime și de timp

Pentru a determina coordonatele punctului material la un moment anumit de timp, este necesar să măsurăm lungimi și intervale de timp. Pe această cale se stabilește câte unități conține mărimea măsurată (ea este egală cu numărul respectiv de unități).

Măsurarea mărimii fizice constă în compararea ei cu o mărime de aceeași natură, considerată ca unitate.

În prezent se utilizează *Sistemul Internațional* (SI), ce are **șapte unități fundamentale** (metrul, kilogramul, secunda, amperul, kelvinul, molul, candela) stabilite pentru șapte mărimi fizice. Unitățile altor mărimi fizice se exprimă prin cele fundamentale și sunt numite **unități derivate**.

Este bine să știți

Din gimnaziu cunoașteți unitățile de lungime și de timp – metrul (m) și secunda (s).

O secundă este egală cu durata a 9 192 631 770 de perioade ale radiației ce corespunde tranziției dintre cele două niveluri hiperfine ale stării fundamentale ale atomului de cesiu -133.

Un metru este egal cu distanța parcursă de lumină în vid în intervalul de timp egal cu $1/299\,792\,458$ dintr-o secundă.

De rând cu unitățile fundamentale ale SI, metrul și secunda, se mai folosesc și alte unități, cum ar fi kilometrul (km), microsecunda (μs) etc., unde prefixele „kilo” și „micro” sunt multiplicatori ai unităților de bază reprezentând diferite puteri ale numărului 10. În Tabelul 1.1 sunt prezentate prefixele pentru diferite puteri ale numărului 10 și abrevierile lor. Este de menționat că aceste prefixe se utilizează cu toate unitățile mărimilor fizice. De exemplu, 10^{-6} m este echivalent cu un micrometru ($1\ \mu\text{m}$), iar 10^6 V – cu un megavolt (1 MV).

Tabelul 1.1

Prefix	Simbol	Factor
atto	a	10^{-18}
femto	f	10^{-15}
pico	p	10^{-12}
nano	n	10^{-9}
micro	μ	10^{-6}
mili	m	10^{-3}
centi	c	10^{-2}
deci	d	10^{-1}
deca	da	10^1
hecto	h	10^2
kilo	k	10^3
mega	M	10^6
giga	G	10^9
tera	T	10^{12}
peta	P	10^{15}
exa	E	10^{18}

d Spațiul și timpul în mecanica clasică

Corpurile se mișcă în spațiu și în timp. Spațiul descrie poziția și distanțele dintre corpuri, iar timpul

descrie succesiunea și durata fenomenelor. Aceste noțiuni se consideră fundamentale în fizică.

În mecanica clasică sau newtoniană, ale cărei principii fundamentale au fost formulate de către Newton, **spațiul și timpul sunt considerate absolute, independente unul de altul, de corpurile ce se află și se mișcă în spațiu**. De aici rezultă concluzii importante: distanța dintre două puncte (lungimea segmentului) pentru observatorii din diferite sisteme de referință este una și aceeași; aceasta se referă și la durata intervalului de timp dintre două evenimente – la determinarea ei observatorii din diferite sisteme de referință obțin una și aceeași valoare.

Analizează și aplică!

- Mai multe automobile se află în fața barierei în așteptarea traversării căii ferate. Poate fi considerat trenul drept un punct material față de automobile?
- Analizați situațiile următoare: o albină se mișcă pe petalele unei flori în căutarea nectarului; albină se află în zbor spre stup; albină zboară în fața urdinișului pentru a intra în stup. În ce caz albină poate fi considerată punct material și în care nu? Argumentați răspunsul.
- Un pescar traversează râul cu o luntre vâslind. Ce corpuri pot fi luate drept corpuri de referință la descrierea mișcării vâslei?

AUTOEVALUARE

- 1 Ce reprezintă punctul material? Exemplificați.
- 2 Care este deosebirea dintre noțiunea de punct material și cea de mobil?
- 3 Care corpuri solide se numesc rigide?
- 4 Explicați, în baza unor exemple concrete, relativitatea mișcării.
- 5 Când este necesar să folosim un corp de referință?
- 6 Din ce este compus sistemul de referință?
- 7 Care este deosebirea dintre unitățile fundamentale și cele derivate?
- 8 Ce înțelegeți prin caracterul absolut al spațiului și al timpului?
- 9 Care este corpul de referință preferat la studiul mișcării planetelor? Dar al sateliților acestora?
- 10 Poate fi considerat corp de referință corpul a cărui mișcare se studiază?

Traectoria. Deplasarea și distanța parcursă

a Descrierea mișcării unui punct material

Mișcarea unui punct material este considerată cunoscută (descrisă) dacă poate fi identificată poziția lui la orice moment de timp.

Metode de descriere a mișcării:

Metoda coordonatelor. Analizăm mișcarea unui punct material de-a lungul unei linii drepte (de exemplu, mișcarea automobilului sau a trenului pe o porțiune rectilinie de drum).

În acest caz reprezentăm grafic sistemul de coordonate astfel încât o axă a lui, de exemplu axa Ox , să coincidă cu această linie (fig. 1.4). Poziția mobilului M pe axă este determinată de valoarea coordonatei x egală cu distanța de la originea O până la punctul M , luată cu semnul plus, dacă pentru a ajunge din O în M trebuie să ne mișcăm în sensul pozitiv al axei Ox , și luată cu semnul minus – în sens contrar. Astfel, coordonata mobilului M variază, adică este o funcție de timp:

$$x = x(t). \quad (1.1)$$

Ecuatia dată descrie mișcarea punctului material de-a lungul unei linii drepte și este numită **ecuația (legea) mișcării**.

Pentru descrierea mișcării unui punct material pe o suprafață plană (de exemplu: o luntre pe apa stătătoare a unui lac sau o bilă pe masa de biliard), desenăm un sistem de două axe de coordonate situate în acest plan (fig. 1.5). Poziția punctului material M pe plan este determinată de coordonatele x și y , egale cu distanțele lui de la axele de coordonate și luate cu semnele plus sau minus în acord cu convenția stabilită în cazul precedent. De exemplu, coordonatele punctului M sunt:

$$x = OM_2 = MM_1 \text{ și } y = OM_1 = MM_2,$$

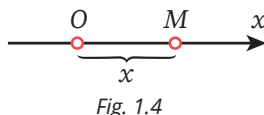


Fig. 1.4

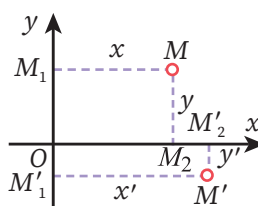


Fig. 1.5

iar coordonatele punctului M' :

$$x' = OM'_2 = M'M'_1 \text{ și } y' = -OM'_1 = -M'M'_2.$$

La mișcarea punctului material, coordonatele lui variază:

$$x = x(t), y = y(t). \quad (1.2)$$

Astfel, mișcarea punctului material pe o suprafață plană este descrisă de două ecuații cinematice ale mișcării.

Metoda vectorială. Poziția mobilului M în raport cu sistemul de coordonate, legat rigid cu corpul de referință, poate fi determinată, de asemenea, de un vector numit **vector de poziție**. Vectorul este un segment de dreaptă orientat, caracterizat prin *modul* (valoare), *punct de aplicație* (origine), *direcție* și *sens*. Originea vectorului de poziție $\vec{r} = \overline{OM}$ coincide permanent cu originea sistemului de coordonate O , iar extremitatea sa cu poziția punctului material M (fig. 1.6). Modulul vectorului de poziție este egal cu distanța de la originea sistemului de coordonate până la punctul M .

Pentru a descrie mișcarea corpului într-un plan, reprezentăm vectorul de poziție al unui punct material ce se mișcă în acest plan (fig. 1.6). Notăm cu α unghiul măsurat în sens trigonometric, de la axa Ox spre vectorul de poziție. Cunoașterea modulului vectorului de poziție și a unghiului α permite calcularea coordonatelor mobilului și invers.

Din figura 1.6 obținem:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Aceste relații rămân valabile pentru orice valori ale unghiului α .

Vectorul de poziție al mobilului M variază în modul și direcție, originea axelor de coordonate rămâne fixă (în O), iar sensul este mereu orientat de la O spre M . Astfel, vectorul $\vec{r}$ este o funcție de timp:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.4)$$

Această ecuație descrie complet mișcarea mobilului.

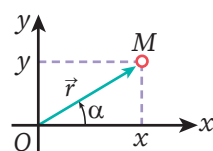


Fig. 1.6

b Traectoria

Mobilul în timpul mișcării sale trece dintr-o poziție în alta.

Ansamblul pozițiilor ocupate succesiv de mobil constituie o linie numită *traectorie*.

Traectoria permite vizualizarea simultană a tabloului integral al mișcării, a tuturor punctelor prin care a trecut sau va trece mobilul în timpul mișcării.

Forma traectoriei este pusă la baza primei clasificări a mișcărilor mecanice ale mobilului: în mișcări rectilinii (traectoriile sunt *linii drepte*) și în mișcări curbilinii (traectoriile sunt *linii curbe*, în plan sau în spațiu).

Traectoria reprezintă o linie imaginară și doar uneori este materializată de corpuri.

De exemplu, linia de cale ferată determină traectoria trenului, sârma care trece printr-o bilă determină traectoria acesteia în timpul alunecării pe sârmă etc.

c Deplasarea și distanța parcursă

Considerăm traectoria unui mobil (fig. 1.7) și două poziții ocupate de el pe traectorie: poziția M la momentul de timp t și poziția M' la momentul ulterior de timp $t' = t + \Delta t$.

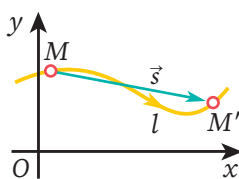


Fig. 1.7

Vectorul $\vec{s} = \overrightarrow{MM'}$ care unește poziția inițială M și cea finală M' se numește *vector deplasare* sau *deplasare* $\vec{s}$ a mobilului în intervalul de timp $\Delta t = t' - t$.

Modulul deplasării (lungimea vectorului deplasare) este distanța minimă dintre aceste poziții și nu depinde de forma traectoriei dintre ele.

Lungimea traectoriei l dintre pozițiile M și M' se numește *distanță parcursă de mobil în intervalul de timp Δt* .

Deplasarea mobilului este o mărime vectorială și nu poate fi comparată cu distanța parcursă, care reprezintă o mărime scalară. Ultima poate fi comparată doar cu modulul deplasării ce nu poate depăși distanța parcursă: $|\vec{s}| \leq l$. Unitatea în SI atât a deplasării, cât și a distanței parcurse este **metrul** (m).

Analizează și aplică!

- Poate oare modulul deplasării unui corp să fie egal cu distanța parcursă? Dar mai mare? Mai mic? Argumentați răspunsul.
- Deplasarea mobilului într-un interval de timp este egală cu zero. Se poate oare afirma că în acest interval mobilul s-a aflat în repaus? Justificați răspunsul.

AUTOEVALUARE

- 1 Numiți ce metode de descriere a mișcării mobilului cunoașteți.
- 2 Explicați ce reprezintă vectorul de poziție.
- 3 Definiți traectoria unui punct material.
- 4 Definiți vectorul deplasare. Stabiliți care este deosebirea dintre deplasare și distanța parcursă.
- 5 Coordonatele punctului material la un moment de timp sunt: $x = 8$ m, $y = 6$ m. Reprezentați într-un sistem de coordonate poziția punctului și vectorul lui de poziție. Determinați din figura obținută modulul vectorului de poziție și unghiul format de el cu axa Ox .
- 6 Un corp aruncat vertical în sus de la înălțimea $h = 3$ m deasupra pământului se ridică în sus cu $H = 7$ m deasupra locului lansării, apoi cade pe pământ. Determinați modulul deplasării și distanța parcursă de corp în această mișcare.
- 7 Un grup de turiști parcurge distanța $l_1 = 1,6$ km în direcția Nord, apoi $l_2 = 1,2$ km în direcția Vest. Determinați modulul deplasării grupului de turiști și cu cât el este mai mic decât distanța parcursă.
- 8 **BIO** Trecând de pe un copac pe altul, o veveriță efectuează un salt pe o linie dreaptă, înclinată sub un unghi de 30° față de orizont. În poziția inițială veverița se află la înălțimea de 4,0 m deasupra solului, iar distanța dintre copaci este de 3,0 m. Determinați care este distanța parcursă de veveriță și la ce înălțime de la sol se va afla ea în al doilea copac.
- 9 O bilă se mișcă de la un capăt până la altul al unui jgheab de forma unui semiinel de rază $R = 0,5$ m. Determinați modulul deplasării bilei și distanța parcursă de ea.
- 10 Un sportiv aleargă pe un stadion distanța $L = 200,0$ m. Pista de alergări prezintă un semicerc care continuă cu o porțiune rectilinie de lungime $l = 100,0$ m. Care este modulul deplasării sportivului?

Operații cu vectori

a Adunarea vectorilor

Mărimile vectoriale sunt pe larg utilizate în domeniul fizicii. La lecțiile precedente au fost explicate conceptele: *vectorul de poziție* și *deplasarea*. De la orele de *Matematică* vă amintiți de unele elemente de algebră vectorială. Analizăm regula adunării vectorilor în exemplul ce urmează:

Exemplu

Intersecția a două străzi. Un pieton se află în poziția A și trebuie să ajungă în poziția B (fig. 1.8). Trecerea directă de la A la B , în linie dreaptă, este interzisă de regulile de circulație. De aceea pietonul traversează mai întâi una din străzi ca să ajungă în poziția C , apoi strada a doua și ajunge în poziția B .

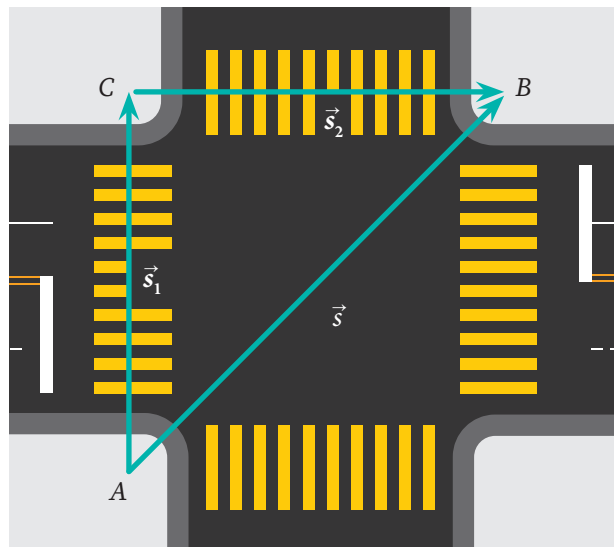


Fig. 1.8

În conformitate cu definiția, vectorul $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ este deplasarea pietonului în tot intervalul de timp. Această deplasare se compune din două etape, $\vec{s}_1 = \overrightarrow{AC}$ și $\vec{s}_2 = \overrightarrow{CB}$, efectuate succesiv. Deci

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2. \quad (1.5)$$

Acest exemplu ilustrează regula adunării vectorilor. Considerăm doi vectori: $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (fig. 1.9, a) și notăm suma lor cu $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Reprezentăm în figura 1.9, b vectorul $\vec{a}$, apoi translăm paralel vectorul $\vec{b}$ cu originea sa în extremitatea vectorului $\vec{a}$. Vectorul sumă $\vec{c}$, numit și *rezultantă*, își are originea în cea a primului vector $\vec{a}$ și extremitatea în cea a vectorului al doilea $\vec{b}$. Același rezultat $\vec{c}$ se obține dacă efectuăm operația menționată mai sus în ordine inversă, adică reprezentăm mai întâi vectorul $\vec{b}$, după care vectorul $\vec{a}$ (fig. 1.10, a). Această regulă de adunare a vectorilor este cunoscută ca **regula triunghiului**.

Rezultatul adunării vectorilor rămâne același dacă realizăm o altă figură: reprezentăm vectorii ce se adună, $\vec{a}$ și $\vec{b}$, cu originea comună, construim pe aceștia un paralelogram, apoi diagonala lui, care pornește din originea comună a vectorilor. Vectorul sumă $\vec{c}$ pornește din această origine și are ca extremitate vârful opus al paralelogramului (fig. 1.10, b). Această regulă a fost denumită **regula paralelogramului**.

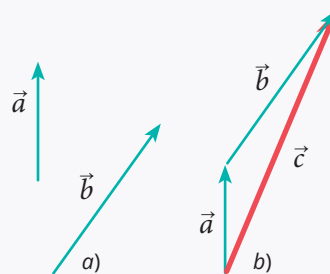


Fig. 1.9

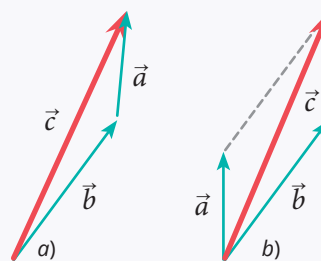
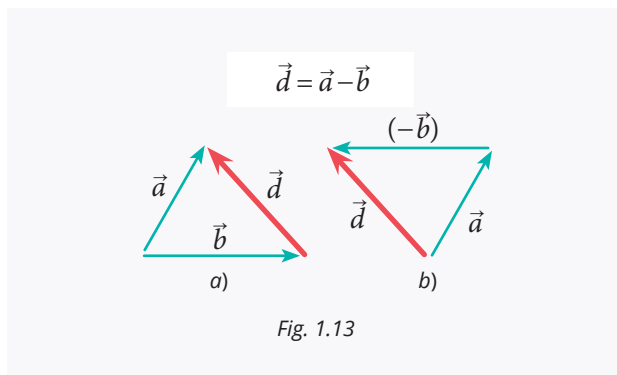
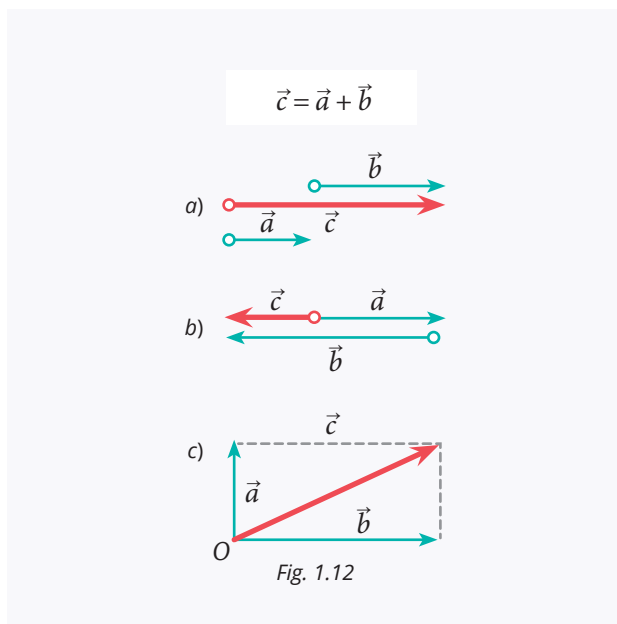
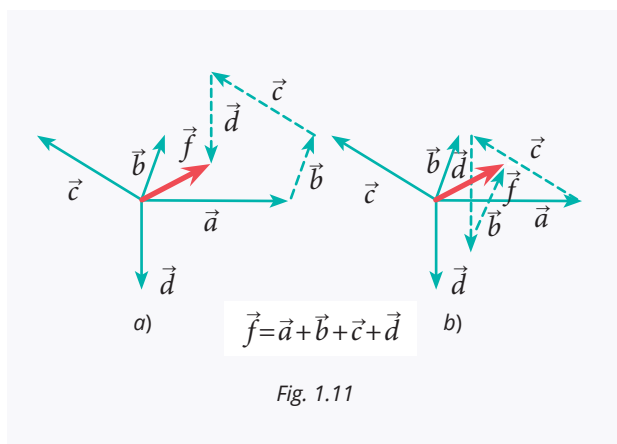


Fig. 1.10

La adunarea mai multor vectori, una dintre regulile expuse mai sus se aplică de mai multe ori, rezultatul fiind independent de ordinea în care aceștia se adună (fig. 1.11).



Modulul vectorului sumă poate fi determinat atât grafic, prin construirea figurii corespunzătoare la o scală aleasă, cât și analitic. Dacă vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt paraleli și au același sens (fig. 1.12, a), atunci modulul sumei este egal cu suma modulelor; dacă însă vectorii sunt paraleli, dar au sensuri contrare (fig. 1.12, b), vectorul sumă este orientat în sensul vectorului cu modulul mai mare și are modulul egal cu diferența modulelor vectorilor ce se adună; în cazul în care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ formează între ei un unghi drept (fig. 1.12, c), modulul vectorului sumă se determină pe baza teoremei lui Pitagora: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

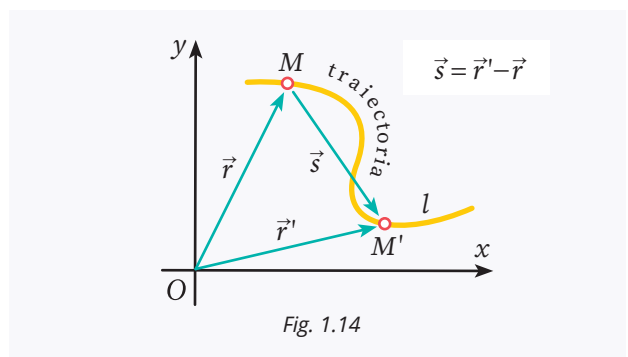
b Scăderea vectorilor

În figura 1.13 sunt reprezentați grafic doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Diferența lor $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ poate fi determinată prin câteva metode.

Observăm că $\vec{a} = \vec{b} + \vec{d}$, adică vectorul $\vec{a}$ este vector sumă. Construim vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ cu origine comună. Vectorul $\vec{d}$ este segmentul orientat din extremitatea vectorului $\vec{b}$ spre extremitatea lui $\vec{a}$ (fig. 1.13, a).

Transformăm relația $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Astfel, vectorul diferență $\vec{d}$ se obține prin adunarea vectorilor $\vec{a}$ și $(-\vec{b})$, ultimul având același mod $\vec{u}$ l și aceeași linie de suport ca și vectorul $\vec{b}$, dar sens contrar (fig. 1.13, b).

Cunoașterea operației de scădere a vectorilor permite să exprimăm vectorul deplasării $\vec{s}$ al mobilului prin vectorii de poziție $\vec{r}$ și $\vec{r}'$ ai locurilor ocupate de acesta la începutul și la sfârșitul intervalului de timp. Din figura 1.14 observăm că $\vec{s} = \vec{r}' - \vec{r} = \Delta\vec{r}$, unde cu $\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$ s-a notat variația vectorului de poziție al mobilului.



Vectorul deplasării mobilului într-un interval oarecare de timp este egal cu variația vectorului de poziție al mobilului în acest timp.

C Componentele și proiecțiile unui vector

Din cele expuse rezultă că este relativ simplu a determina modulul vectorului sumă sau al vectorului diferență a doi vectori, dacă acești vectori sunt coliniari sau reciproc perpendiculari. Dacă însă unghiul dintre vectori este arbitrar și se operează cu mai mulți vectori, procedura adunării (scăderii) devine mai complexă. Pentru a o simplifica, se introduc noțiunile de componente și de proiecții ale vectorilor.

Orice vector situat în planul de coordonate xOy poate fi prezentat ca suma a doi vectori paraleli la axele de coordonate (fig. 1.15).

Acești vectori se numesc **componentele ale vectorului**. Prin urmare, **componentele unui vector sunt, la rândul lor, tot vectori**. Componenta se notează ca și vectorul corespunzător, dar cu indice care arată axa căreia îi este paralelă. Astfel, $\vec{c}_x$ este componenta vectorului $\vec{c}$ paralelă la axa Ox , iar $\vec{c}_y$ este componenta aceluiași vector, paralelă la axa Oy .

Conform definiției

$$\vec{c}_x + \vec{c}_y = \vec{c}.$$

Folosind componentele vectorilor, sistemul inițial de vectori orientați arbitrar în plan se înlocuiește cu un sistem de vectori în număr de două ori mai mare, dintre care o jumătate sunt paraleli la axa Ox , iar altă jumătate – paraleli la axa Oy . După adunarea vectorilor din fiecare jumătate, se obțin doi vectori reciproc perpendiculari. Procedura adunării vectorilor s-a simplificat.

Pentru a efectua calculele prin metoda analitică, introducem încă o noțiune – **proiecția vectorului pe o axă**, în particular, pe axa de coordonate.

Proiecția unui vector pe o axă reprezintă o mărime scalară algebrică egală cu modulul componentei vectorului în direcția acestei axe, luat cu semnul plus dacă componenta și axa respectivă au același sens sau cu semnul minus în cazul în care sensul componentei este contrar sensului axei.

Proiecția vectorului $\vec{a}$ pe axa Ox se notează cu a_x , proiecția vectorului $\vec{b}$ pe axa Oy – cu b_y etc. Conform figurii 1.15, proiecțiile vectorilor sunt:

$$a_x = |\vec{a}_x|, a_y = |\vec{a}_y|, b_x = -|\vec{b}_x|, b_y = -|\vec{b}_y|, \\ c_x = -|\vec{c}_x|, c_y = |\vec{c}_y|.$$

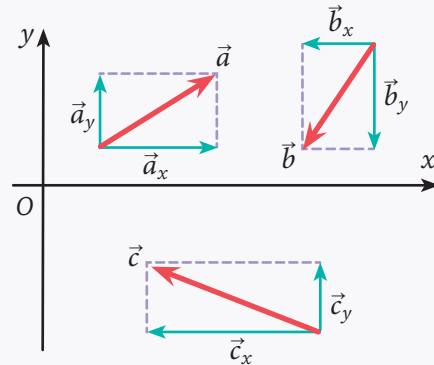


Fig. 1.15

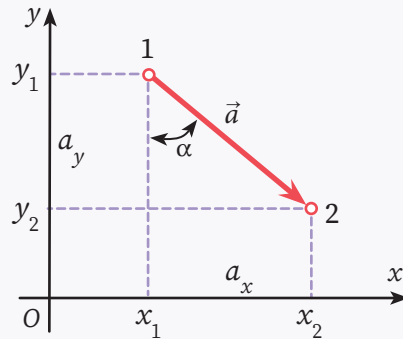


Fig. 1.16

Există și o altă definiție, echivalentă, a proiecției vectorului pe o axă. Să examinăm vectorul $\vec{a}$ din figura 1.16. Coborâm perpendiculare din originea și extremitatea lui pe axele de coordonate. Astfel, se obțin proiecțiile punctelor respective pe axe.

Proiecția vectorului pe o axă este egală cu diferența dintre coordonatele extremității și originii proiecției vectorului.

Adică $a_x = x_2 - x_1$ și $a_y = y_2 - y_1$. Observăm că $a_x > 0$ și $a_y < 0$, ceea ce rezultă și din definiția precedentă.

Proiecțiile vectorului se pot calcula ca lungimile catetelor triunghiurilor dreptunghice. Cunoscând un unghi α (fig. 1.16), pentru proiecții avem:

$$a_x = a \sin \alpha \quad \text{și} \quad a_y = -a \cos \alpha.$$

Din aceeași figură se obține și relația dintre modulul vectorului și proiecțiile lui pe axe de coordonate:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}. \quad (1.6)$$

Ilustrăm aplicarea noțiunii de proiecție a vectorului la calcularea sumei a trei vectori $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ (fig. 1.17). Din figură observăm că proiecția vectorului sumă pe axa Ox este

$$s_x = x_4 - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) = a_x + b_x + c_x.$$

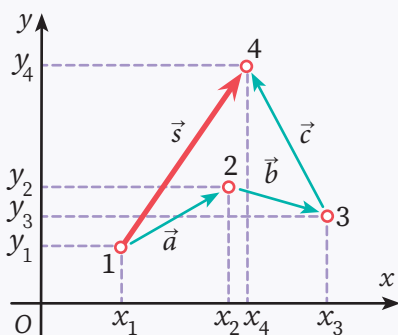


Fig. 1.17

În mod similar se obține: $s_y = a_y + b_y + c_y$.

Proiecția vectorului sumă a unui sistem de vectori este egală cu suma proiecțiilor acestor vectori pe axa corespunzătoare.

Ținând seama de relația (1.6), pentru modulul vectorului sumă avem

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x + c_x)^2 + (a_y + b_y + c_y)^2}. \quad (1.7)$$

În cazul diferenței vectorilor, proiecțiile respective se iau cu semnul minus.

Analizează și aplică!

- Suma a căror doi vectori este egală cu zero?
- În ce caz modulul sumei a doi vectori este egal cu diferența modulelor vectorilor ce se adună?
- Modulul vectorului sumă a doi vectori de module identice este egal cu modulul unuia dintre ei. Care este unghiul dintre vectorii ce se adună?
- Admitem că vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ satisfac relația $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Ce condiții trebuie să îndeplinească acești vectori pentru a se realiza egalitățile 1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ și 2) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ale modulelor vectorilor?

AUTOEVALUARE

- 1 Explicați cum se adună doi vectori după regula triunghiului. Dar după regula paralelogramului?
- 2 Argumentați modul de obținere a componentelor unui vector.
- 3 Explicați cum se determină proiecția unui vector pe o axă.
- 4 Cu ce este egală proiecția pe o axă a vectorului?
- 5 Trei vectori de module egale, situați în același plan, formează între ei unghiuri de 120° . Care este modulul sumei acestor vectori?
- 6 Proiecțiile vectorului $\vec{a}$ pe axe de coordonate sunt $a_x = 2\sqrt{3}$ unități și $a_y = 2$ unități. Determinați modulul acestui vector și unghiurile formate de el cu axe de coordonate.
- 7 Vectorul $\vec{a}$ are proiecțiile pe axe de coordonate $a_x = 6$ unități și $a_y = -4$ unități, iar vectorul $\vec{b}$ – proiecțiile egale cu $b_x = -2$ unități și $b_y = 2$ unități. Determinați modulul vectorului sumă $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ și modulul vectorului diferență $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.
- 8 Un punct material s-a deplasat din poziția M_1 determinată de coordonatele $x_1 = 6$ m, $y_1 = -2$ m în poziția M_2 cu coordonatele $x_2 = 2$ m, $y_2 = 1$ m. Alegeți un sistem plan de coordonate xOy și scala respectivă pentru lungime. Indicați pozițiile M_1 și M_2 , trasați vectorii respectivi de poziție $\vec{r}_1$ și $\vec{r}_2$, precum și vectorul deplasare $\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Determinați, în baza figurii obținute, modulul vectorului deplasare. Verificați rezultatul prin calculele respective.

Noțiuni elementare despre calculul erorilor

a Măsurări și erori

Procesul de măsurare a unei mărimi fizice constă în compararea acesteia cu o mărime de aceeași natură, aleasă convențional în calitate de unitate. Rezultatul măsurării este valoarea numerică a mărimii măsurate, care indică de câte ori este cuprinsă unitatea ei în mărimea fizică respectivă. Măsurând masa unui corp cu unitatea **kilogram**, se obține $m = 2$ kg, adică unitatea de 1 kg este cuprinsă în masa acestui corp de două ori.

Măsurările mărimilor fizice sunt de două tipuri: **directe** și **indirecte**. Dacă mărimea fizică este independentă de alte mărimi, măsurarea este numită directă. De exemplu, distanța se măsoară cu metrul-etalon, timpul – cu cronometrul, temperatura – cu termometrul etc. Când mărimea fizică este dependentă de alte mărimi independente măsurate direct, adică se exprimă prin acestea, ea se calculează cu ajutorul unei relații în care se introduc rezultatele măsurărilor directe. De exemplu, pentru determinarea energiei cinetice a unui corp în mișcare, mai întâi se măsoară direct masa și viteza corpului (cu vitezometrul), apoi, conform relației $E_c = mv^2/2$, se calculează energia cinetică.

Valorile numerice obținute prin măsurarea mărimilor fizice întotdeauna sunt afectate de **erori**. Sursele de erori sunt diverse, principalele fiind cauzate de imperfecțiunea metodelor de măsurare, sensibilitatea limitată a aparatelor de măsură; influența mediului înconjurător (temperatura, presiunea, umiditatea, câmpurile electrice și magnetice etc.), calitățile și deprinderile experimentatorului ș.a. Astfel, în orice măsurare se obține doar o valoare aproximativă a mărimii fizice măsurate, care nu coincide cu cea adevărată (exactă). Abaterea rezultatelor măsurărilor de la valoarea adevărată este caracterizată cantitativ cu **erorile de măsurare**.

După caracterul lor, erorile de măsurare pot fi clasificate în **accidentale** (întâmplătoare), **sistematice** și **grave**.

Erorile accidentale variază imprezvizibil de la o măsurare la alta, au un caracter aleatoriu și pot avea atât valori pozitive, cât și negative. Existența acestor

erori este determinată de un ansamblu de cauze greu de sesizat, care, practic, nu pot fi înlăturate. De exemplu, măsurarea repetată a timpului de mișcare a unui vehicul pe un drum arbitrar este influențată de acțiunea mereu diferită a vântului, iar rezultatele obținute întotdeauna se deosebesc puțin. Din cauza fluctuațiilor din rețeaua de alimentare, la măsurarea repetată a intensității curentului electric de fiecare dată se obțin valori diferite, chiar dacă metoda, aparatul de măsură și condițiile mediului înconjurător rămân aceleași.

Erorile sistematice sunt determinate de anumite defecte ale aparatelor de măsură și de imperfecțiunea metodelor aplicate. Pe parcursul măsurărilor repetate, aceste erori sunt aceleași ca valoare numerică și ca semn. De exemplu, cântărirea unui corp cu o balanță cu brațele inegale cauzează o eroare sistematică constantă (**eroare instrumentală**); dacă la aplicarea metodei pendulului matematic la măsurarea accelerației gravitaționale nu se ține seama de forțele de rezistență a aerului, rezultatul este afectat de o oarecare eroare permanentă (**eroare de metodă**). În cazul în care la începutul experimentului se înregistrează surse de erori sistematice, ele pot fi înlăturate fie prin înlocuirea aparatelor cu defecte și a metodei aplicate, fie prin introducerea unor corecții la rezultatele obținute.

Erorile grave sunt, de obicei, cauzate de neatenția experimentatorului în timpul citirii unei valori de pe scala aparatului de măsură sau de o modificare bruscă și de scurtă durată a condițiilor în care se realizează experimentul. În majoritatea cazurilor, din șirul de valori obținute în urma măsurărilor, cele afectate de erori grave se deosebesc foarte mult de celelalte și trebuie înlăturate repetând măsurarea.

Din caracteristica celor trei tipuri de erori rezultă că valoarea mărimii fizice măsurate nu poate fi determinată exact, ci numai cu o anumită incertitudine. Presupunând că erorile sistematice și cele grave au fost eliminate, vom estima erorile accidentale comise la măsurarea unei mărimi fizice.

b Erorile măsurărilor directe

Să analizăm mai întâi cazul **măsurărilor directe**. Admitem că se realizează N măsurări ale mărimii fizice X , obținându-se valorile aproximative $X_1, X_2, \dots, X_N$.

Mărimea

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

reprezintă media aritmetică a măsurărilor individuale și este cea mai apropiată de valoarea adevărată.

Modulul diferenței dintre valoarea medie $\bar{X}$ și cea individuală X_i este numit eroare absolută a măsurării individuale și are unitatea mărimii măsurate.

$$\Delta X_i = |\bar{X} - X_i|. \quad (1.8)$$

Eroarea medie $\Delta \bar{X}$ care afectează mărimea fizică X este determinată de media aritmetică a erorilor (1.8) și este numită **eroare absolută medie**.

$$\Delta \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta X_i. \quad (1.9)$$

Rezultatul măsurării se scrie sub forma:

$$X = \bar{X} \pm \Delta \bar{X}. \quad (1.10)$$

Aceasta înseamnă că valoarea adevărată a mărimii fizice măsurate X se află în intervalul

$$\bar{X} - \Delta \bar{X} \leq X \leq \bar{X} + \Delta \bar{X}.$$

Eroarea absolută însă nu caracterizează deplin calitatea măsurării. Presupunem că două lungimi diferite sunt măsurate cu aceeași eroare absolută egală cu 0,01 m. Atunci pentru o lungime de câțiva metri eroarea comisă este satisfăcătoare, iar pentru alta de ordinul centimetrilor este foarte mare. Astfel, pentru a judeca despre precizia măsurării, se introduce noțiunea de eroare relativă.

Ea arată ce parte din valoarea mărimii fizice măsurate constituie eroarea absolută medie și deseori este numită **precizie**. Eroarea relativă este o mărime adimensională și, de obicei, se exprimă în procente.

Raportul dintre eroarea absolută medie și valoarea medie a mărimii fizice măsurate se numește eroare relativă.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{X}}{\bar{X}}. \quad (1.11)$$

c Erorile măsurărilor indirecte

Măsurările mărimilor fizice de cele mai multe ori sunt indirecte. Rezultatul măsurării se obține cu ajutorul unei relații ce exprimă dependența funcțională a mărimii fizice studiate de alte mărimi măsurate direct. Este evident că și eroarea mărimii fizice respective trebuie calculată cu ajutorul aceleiași dependențe funcționale. Aducem câteva exemple de calcul al erorilor, dependența funcțională corespunzătoare reprezentând o sumă (diferență), produs sau cât a două mărimi fizice A și B măsurate direct cu erorile absolute medii $\Delta \bar{A}$ și $\Delta \bar{B}$.

Eroarea absolută a unei mărimii fizice X exprimată prin suma (diferența) mărimilor A și B măsurate direct este:

$$\Delta \bar{X} = \Delta \bar{A} + \Delta \bar{B}, \quad (1.12)$$

iar cea relativă:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{\Delta \bar{A} + \Delta \bar{B}}{\bar{A} \pm \bar{B}}. \quad (1.13)$$

Eroarea absolută a unei mărimii fizice exprimate prin suma sau diferența altor mărimi fizice independente ce se măsoară direct este egală cu suma erorilor absolute ale acestora.

Dacă $X = A \cdot B$, atunci,

$$\Delta \bar{X} = \bar{A} \cdot \Delta \bar{B} \pm \bar{B} \cdot \Delta \bar{A}, \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \bar{A}}{\bar{A}} + \frac{\Delta \bar{B}}{\bar{B}} = \varepsilon_A + \varepsilon_B, \quad (1.15)$$

iar dacă $X = \frac{A}{B}$, atunci

$$\Delta \bar{X} = \frac{\bar{A} \cdot \Delta \bar{B} + \bar{B} \cdot \Delta \bar{A}}{\bar{B}^2}, \quad (1.16)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta \bar{A}}{\bar{A}} + \frac{\Delta \bar{B}}{\bar{B}} = \varepsilon_A + \varepsilon_B. \quad (1.17)$$

Dacă mărimea fizică măsurată indirect se exprimă printr-un produs sau cât al mai multor variabile independente, atunci eroarea ei relativă este egală cu suma erorilor relative ale variabilelor independente măsurate direct.

Mărimea fizică măsurată indirect poate fi dependentă funcțional de cele măsurate direct, exprimată și prin operații matematice mai complicate. În asemenea cazuri și erorile absolute și relative se calculează mai dificil.

d Eroarea unei singure măsurări

În unele situații suntem nevoiți să efectuăm o singură măsurare. Atunci, eroarea măsurării se consideră egală cu cea a aparatului de măsură folosit (este indicată pe aparat sau în pașaportul tehnic). Dacă precizia aparatului nu este indicată, atunci eroarea absolută trebuie evaluată. De obicei, **ea nu depășește jumătate din valoarea celei mai mici diviziuni a scalei aparatului utilizat**. De exemplu, măsurările făcute cu o riglă milimetrică au eroarea absolută de 0,5 mm. Dacă în calcule sunt folosite constante universale, atunci eroarea lor absolută se consideră egală cu jumătate din rangul ultimei cifre semnificative păstrate. De exemplu, dacă $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, atunci $\Delta g = 0,05 \text{ m/s}^2$, iar dacă $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, eroarea absolută este $\Delta g = 0,005 \text{ m/s}^2$.

Se consideră semnificative toate cifrele, în afara de zerourile aflate în stânga numărului. Astfel, numerele 0,0271 și 310 au câte 3 cifre semnificative. La adunarea (scăderea) a două mărimi care conțin numere diferite de cifre semnificative rezultatul se scrie păstrând cel mai mic număr de zecimale, iar la înmulțirea (împărțirea) acestora rezultatul se scrie păstrând cel mai mic număr de cifre semnificative. De exemplu: $5,478 + 2,7 = 8,178 \approx 8,2$; $5,478 \cdot 2,7 = 14,7906 \approx 14,8$.

La prelucrarea datelor experimentale obținute în urma măsurărilor, se efectuează diferite calcule. Deseori se consideră eronat că numărul mare de zecimale păstrate mărește precizia rezultatului măsurării.

Exemplu

Admitem că pentru determinarea volumului V al unui corp paralelipipedic cu laturile a , b și c s-au efectuat măsurări cu o riglă centimetrică, obținându-se următoarele rezultate: $a = 25,5 \text{ cm}$, $b = 10,0 \text{ cm}$ și $c = 1,5 \text{ cm}$. Să calculăm eroarea relativă a rezultatului (precizia) considerând eroarea absolută a riglei egală cu 0,5 cm (jumătate din valoarea celei mai mici diviziuni). Deoarece volumul corpului $V = a \cdot b \cdot c$ se exprimă printr-un produs de mărimi independente, eroarea relativă este

$$\varepsilon_V = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

$$\text{și numeric obținem } \varepsilon_V = \frac{0,5}{25,5} + \frac{0,5}{10,0} + \frac{0,5}{1,5} \approx 0,02 +$$

$$+ 0,05 + 0,33 \approx 0,4; \varepsilon_V = 40\%.$$

Menționăm că din cele 40% ale erorii relative a rezultatului, 33% revin celei mai imprecise măsurări ale laturii c , 5% – ale laturii b și numai 2% – ale laturii a . Evident că pentru a mări precizia rezultatului, este nevoie să mărim precizia măsurării laturii c . Utilizând în acest scop o riglă milimetrică (eroarea absolută a riglei este 0,5 mm), obținem un rezultat mai exact al măsurării, $c = 1,3 \text{ cm}$. Acum eroarea relativă a rezultatului este

$$\varepsilon_V = \frac{0,5}{25,5} + \frac{0,5}{10,0} + \frac{0,05}{1,3} \approx 0,02 + 0,05 + 0,04 \approx 0,11; \varepsilon_V = 11\%.$$

Astfel, eroarea relativă a rezultatului s-a mărit aproximativ de 4 ori și dacă dorim ca el să fie și mai exact, este necesar să mărim precizia măsurărilor tuturor laturilor, utilizând, de exemplu, un șubler.

Precizia măsurărilor indirecte poate fi mărită prin creșterea preciziei măsurărilor directe, iar păstrarea unui număr mare de zecimale duce numai la complicarea inutilă a calculelor.

Din exemplul considerat mai rezultă și modul de scriere a rezultatului final. Prezentarea acestuia, de pildă, sub forma $V = (3,825 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$ este absurdă. Ținând seama de faptul că eroarea absolută conține o singură zecimală, ultimele două cifre ale numărului 3,825 nu au nicio însemnătate. Folosind regulile de rotunjire cunoscute din matematică, obținem rezultatul înscris sub forma corectă: $V = (3,8 \pm 0,4) \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$.

Rezultatul final trebuie să conțină același număr de zecimale ca eroarea absolută. În calculele intermediare se păstrează o zecimală în plus pentru efectuarea rotunjirilor.

e Prelucrarea grafică a datelor experimentale

Deseori în procesul prelucrării datelor experimentale se utilizează metoda reprezentării lor prin grafice. Această metodă oferă posibilitatea vizualizării dependenței cercetate și stabilirii caracteristicilor acesteia. Pentru reprezentarea grafică a dependenței studiate, de obicei, se folosește sistemul de coordonate rectangular. Pe axa absciselor se depun valorile

mărimii independente (date de experimentator), iar pe axa ordonatelor – valorile mărimii măsurate. Pentru reprezentarea acestor valori, se alege o anumită scară, astfel încât cea mai mică valoare care se poate citi pe grafic să nu fie mai mică decât mărimea erorii absolute a măsurărilor, dar nici mult mai mare decât aceasta. Originea coordonatelor nu trebuie neapărat să coincidă cu valorile nule ale mărimilor reprezentate. Ea se alege pornind de la condiția utilizării complete a întregii suprafețe atribuite graficului. Diviziunile indicate pe fiecare axă de coordonate trebuie reprezentate echidistant, iar la capătul lor se scriu nu numai simbolurile mărimilor fizice, ci și unitățile lor cu multiplii sau submultiplii eventuali (fig. 1.18).

Fiecare punct experimental trebuie marcat vizibil pe grafic, folosind în acest scop diferite semne distincte (cerculeț, cruciuliță, triunghi etc.). Apoi se trasează o curbă continuă, care să treacă prin cât mai multe puncte experimentale, lăsând de o parte și de alta ale ei un număr cât mai mic de puncte depărtate, aproximativ egal de la curbă (fig. 1.18).

O caracteristică importantă a dependenței liniare în cazul reprezentării datelor prin grafice este **panta** curbei experimentale, sau unghiul de înclinare al acesteia. Din figura 1.18, care reprezintă dependența forței de elasticitate a unui resort în funcție de alungirea lui, se observă că panta dreptei ce descrie această dependență coincide cu constanta de elasticitate:

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta F}{\Delta l}.$$

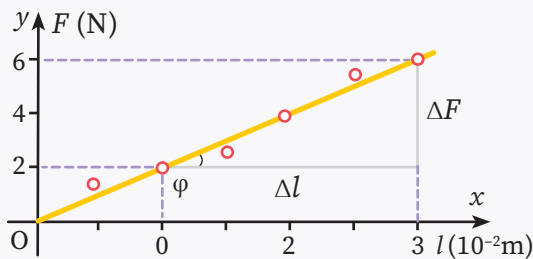


Fig. 1.18

Analizează și aplică!

- Stabiliți câte cifre semnificative se conțin în numerele: a) 3,09; b) $4,589 \cdot 10^7$; c) $1,38 \cdot 10^{-23}$; d) 0,0001.
- Măsurând diametrul unui conductor subțire, s-a obținut o valoare de ordinul milimetrilor. Ce trebuie de întreprins pentru a mări precizia măsurării?
- Analizați figura 1.18 și determinați panta dependenței experimentale (constanta de elasticitate a resortului).

AUTOEVALUARE

- 1 Explicați care măsurii sunt directe și menționați prin ce se deosebesc ele de cele indirecte.
- 2 Numiți principalele surse de erori. Clasificați erorile de măsurare după caracterul lor.
- 3 Definiți conceptul de eroare absolută.
- 4 Explicați semnificația noțiunii de eroare relativă.
- 5 Cu ce sunt egale eroarea absolută a unei sume (sau a unei diferențe) și eroarea relativă a unui produs (sau a unui cât) în cazul măsurărilor indirecte?
- 6 Explicați cum poate fi mărită precizia măsurărilor indirecte.
- 7 Cum trebuie să fie prezentat rezultatul final al unei măsurări?
- 8 Explicați cum se trasează o curbă experimentală în cazul reprezentării grafice a rezultatelor măsurării.
- 9 În pașaportul unui ceas este specificat că acesta produce o eroare de 1 minut într-un an. Determinați:
 - a) Care este eroarea relativă a acestui ceas?
 - b) Ce eroare va face acest ceas la sfârșitul unei lecții de 45 de minute?
- 10 Măsurând lungimea și lățimea unui covor, s-au obținut rezultatele de $(4,0 \pm 0,2)$ m și $(2,5 \pm 0,1)$ m, respectiv. Calculați aria și perimetrul covorului, determinând totodată erorile absolute și cele relative ale acestora.

Mișcarea rectilinie uniformă. Viteza

a Legea mișcării rectilinii uniforme

Mișcarea rectilinie a punctului material care parcurge deplasări egale în orice intervale de timp egale se numește mișcare rectilinie uniformă.

Fie $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3, \dots$ sunt deplasările mobilului în intervalele de timp $\Delta t_1, \Delta t_2, \Delta t_3, \dots$ corespunzătoare ($\vec{s}_1 = \vec{s}_2 = \vec{s}_3 = \dots$, pentru orice intervale $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots$). Egalitatea vectorilor deplasare ai punctului material este posibilă numai dacă aceștia sunt orientați de-a lungul aceleiași drepte. Astfel, conchidem că în condițiile prevăzute de definiția de mai sus traiectoria mobilului constituie o linie dreaptă, adică mișcarea este rectilinie, iar din egalitatea deplasărilor și, respectiv, a intervalelor de timp rezultă egalitatea rapoartelor:

$$\frac{\vec{s}_1}{\Delta t_1} = \frac{\vec{s}_2}{\Delta t_2} = \dots = \frac{\vec{s}_1 + \vec{s}_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dots = \text{const.}$$

Deci în mișcarea rectilinie uniformă raportul dintre deplasarea punctului material și intervalul de timp corespunzător este o mărime constantă.

Viteza mobilului în mișcarea rectilinie uniformă este o mărime fizică vectorială determinată cu raportul dintre deplasarea mobilului și intervalul de timp respectiv.

$$\vec{v} = \frac{\vec{s}}{\Delta t} = \text{const.} \quad (1.18)$$

Intervalul de timp $\Delta t > 0$; prin urmare, viteza are aceeași direcție și sens ca și vectorul deplasare.

Mișcarea mobilului cu viteză constantă $\vec{v}$ este o mișcare rectilinie uniformă.

S-a convenit a nota unitățile mărimilor fizice cu simbolurile respective luate între paranteze pătrate. De exemplu, unitatea deplasării $[\vec{s}] = \text{m}$, a intervalului de timp $[\Delta t] = \text{s}$. La stabilirea unității de viteză în SI, obținem

$$[\vec{v}] = \frac{[\vec{s}]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Unitatea de viteză este o unitate derivată, deoarece se exprimă prin unitățile fundamentale.

Pentru a descrie mișcarea mobilului de-a lungul traiectoriei sale rectilinii, luăm o axă de coordonate, de exemplu Ox , de-a lungul traiectoriei (fig. 1.19). Indicăm pe axă poziția inițială a mobilului M_0 (la momentul $t_0 = 0$) și poziția finală $\vec{M}$ (la momentul t). Deplasarea mobilului în intervalul $\Delta t = t - 0 = t$ este egală cu vectorul $\vec{M_0M} = \vec{s}$, iar viteza lui $\vec{v} = \frac{\vec{s}}{t}$. Astfel, deplasarea mobilului în intervalul $\Delta t = t$:

$$\vec{s} = \vec{v}t. \quad (1.19)$$

Deplasarea mobilului ce se mișcă rectiliniu uniform este direct proporțională cu durata mișcării.

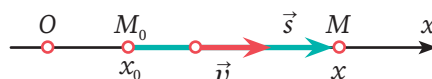


Fig. 1.19

În proiecții pe axa Ox avem

$$s_x = v_x t. \quad (1.20)$$

Din figura 1.19 observăm că proiecția deplasării $s_x = x - x_0$, deci $x - x_0 = v_x t$. Astfel, coordonata mobilului ce se mișcă rectiliniu uniform este dată de expresia

$$x = x_0 + v_x t, \quad (1.21)$$

care este numită **ecuația (legea) mișcării rectilinii uniforme**.

b* Reprezentarea grafică a legii mișcării rectilinii uniforme

Din (1.21) observăm că pentru $v_x > 0$, când viteza este orientată în sensul pozitiv al axei Ox , coordonata x crește cu timpul, iar pentru $v_x < 0$ ea scade.

Desenăm graficele pentru proiecțiile vitezei și pentru coordonata mobilului în mișcare rectilinie uniformă.

Proiecția vitezei rămâne constantă în timp, graficul ei este o dreaptă paralelă la axa timpului (fig. 1.20). Dreapta 2 corespunde mișcării cu o viteză v_{2x} mai

mare decât viteza v_{1x} , iar dreapta 3 corespunde mișcării în sensul negativ al axei Ox ($v_{3x} < 0$).

Cunoașterea graficului pentru proiecția vitezei mobilului permite calcularea proiecției deplasării lui. Din graficul reprezentat în *figura 1.21* și luând în considerare formula (1.20), constatăm că proiecția deplasării $s_{1x} = v_{1x} \cdot t_1$ este numeric egală cu aria dreptunghiului colorat dintre grafic și axa timpului. Dacă proiecția vitezei $v_{2x} < 0$, atunci și proiecția deplasării este negativă.

În conformitate cu ecuația mișcării (1.21), la momentul inițial ($t_0 = 0$) coordonata mobilului este egală cu x_0 , apoi crește liniar pentru $v_x > 0$ (graficul 1 din *figura 1.22*). Graficul 2 corespunde mișcării cu o viteză mai mare, ambele mobile pornind din aceeași poziție. Graficul 3, paralel cu graficul 1, corespunde mișcării ce are ca poziție inițială originea coordonatelor și viteza $v_{3x} = v_{1x}$. Graficul 4 corespunde mișcării mobilului care începe din poziția cu coordonata x'_0 și are proiecția vitezei $v_{4x} < 0$, adică mobilul se mișcă în sensul negativ al axei Ox .

Distanța parcursă de punctul material în mișcare rectilinie uniformă este egală cu modulul deplasării, deoarece sensul mișcării rămâne permanent același. Avem $l = |s_x| = |v_x|t$.

Dacă graficul proiecției vitezei permite determinarea deplasării, deci și a coordonatei, atunci graficul coordonatei permite calcularea proiecției vitezei. În acest scop, determinăm din grafic variația coordonatei (egală cu proiecția deplasării) într-un interval oarecare de timp Δt (*fig. 1.23*), apoi calculăm:

$$v_x = \frac{s_x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.22)$$

Din aceeași figură observăm că această mărime este raportul catetei opuse la cateta alăturată unghiului α , adică un raport asemănător celui care definește tangenta unghiului. Aceasta însă este o mărime adimensională, în timp ce raportul catetelor triunghiului din *figura 1.23* reprezintă o mărime dimensională și se măsoară în unități de viteză (m/s).

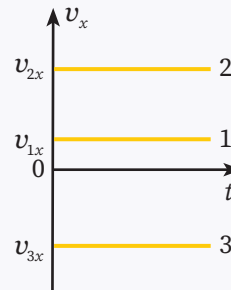


Fig. 1.20

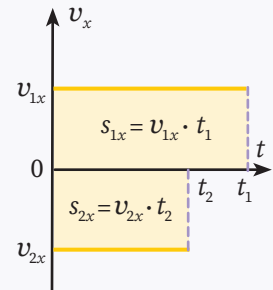


Fig. 1.21

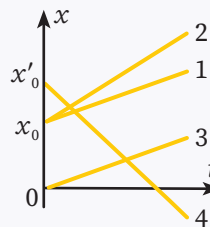


Fig. 1.22

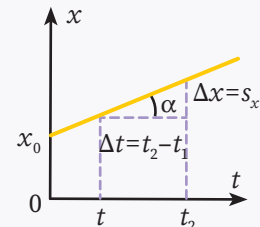


Fig. 1.23

COMUNICARE

Vitezometrul

Creați 2 grupuri de lucru și **repartizați** volumul activităților.

Studiați diferite surse pentru informare și selectare a materialului necesar.

Realizați comunicarea după următoarele **obiective**:

- 1 **Identificați** contextul istoric și **descoperiți** cine a fost inventatorul vitezometrului.
- 2 **Studiați** principiul de funcționare a vitezometrului și **analizați** modul de construcție al acestui dispozitiv.
- 3 **Clasificați** vitezometrele în funcție de criteriile tehnice.
- 4 **Investigați** domeniul de aplicare a vitezometrelor și **argumentați** importanța acestora.
- 5 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 6 **Prezentați** și **evaluați** reciproc produsele realizate.

Problemă REZOLVATĂ

În figura 1.24 sunt reprezentate graficele mișcării pentru două mobile. Utilizând graficele:

- determinați intervalele de timp și distanțele parcurse de mobile până la întâlnirea lor;
- determinați vitezele mobilelor;
- scrieți ecuațiile mișcării mobilelor;
- determinați distanța dintre mobile la $\Delta t = 4$ s după întâlnire.

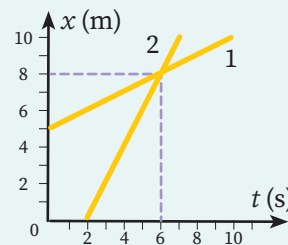


Fig. 1.24

Rezolvare

- Punctul de intersecție al graficelor corespunde întâlnirii mobilelor, adică aceasta are loc la momentul de timp $t_{int} = 6$ s în punctul cu coordonata $x_{int} = 8$ m. Mobilul 1 începe mișcarea sa din punctul cu coordonata $x_{01} = 5$ m la momentul $t_{01} = 0$, deci până la întâlnire parcurge distanța $l_1 = x_{int} - x_{01} = 3$ m în timpul $\Delta t_1 = t_{int} - t_{01} = 6$ s. Mobilul 2 începe să se deplaseze la momentul $t_{02} = 2$ s din origine: $x_{02} = 0$. Până la întâlnire, el parcurge distanța $l_2 = x_{int} - x_{02} = 8$ m în timpul $\Delta t_2 = t_{int} - t_{02} = 4$ s.
- Vitezele ambelor mobile sunt orientate în sensul pozitiv al axei Ox : $v_{1x} = \frac{l_1}{\Delta t_1} = 0,5$ m/s și $v_{2x} = \frac{l_2}{\Delta t_2} = 2$ m/s.
- Ecuația mișcării mobilului 1 se obține din expresia generală $x = x_0 + v_x t$, în care se substituie valorile obținute mai sus: $x_1 = x_{01} + v_{1x} t = 5 + 0,5 t$. Cel de-al doilea mobil începe să se deplaseze din origine ($x_{02} = 0$) cu $t_{02} = 2$ s mai târziu decât primul, ecuația mișcării lui fiind $x_2 = v_{2x} (t - t_{02}) = 2(t - 2)$. În această expresie se pot substitui doar valorile $t \geq 2$ s.
- Distanța dintre mobile $d = |x_1 - x_2| = |5 + 0,5 t - 2(t - 2)| = |9 - 1,5 t|$. Intervalul de timp $\Delta t = 4$ s după întâlnire corespunde momentului de timp $t_1 = t_{int} + \Delta t = 10$ s. Distanța d la acest moment: $d = 6$ m.

Analizează și aplică!

- Cum poate fi determinată proiecția deplasării mobilului în mișcare rectilinie uniformă când este cunoscut graficul vitezei?
- Ce indică vitezometrul automobilului: proiecția vitezei sau modulul ei?

AUTOEVALUARE

- Care mișcare a mobilului este numită rectilinie uniformă?
- Ce se numește viteză a mobilului în mișcare rectilinie uniformă?
- Definiți mișcarea rectilinie uniformă cu ajutorul noțiunii de viteză.
- ING** Un automobil care se mișcă rectiliniu uniform cu viteza $v_1 = 54,0$ km/h a parcurs în $t_1 = 10$ s o distanță egală cu cea parcursă de un motociclist în $t_2 = 12$ s. Care este viteza motociclistului, considerând mișcarea lui, de asemenea, rectilinie uniformă?
- ING** Un tren cu lungimea $l = 160$ m traversează un râu pe un pod cu lungimea $L = 290$ m. Cât timp durează mișcarea trenului pe pod cu viteza constantă $v = 18$ km/h?
- Un mobil se mișcă rectiliniu uniform. La momentul $t_1 = 2$ s coordonata lui $x_1 = 5$ m, iar la momentul $t_2 = 4$ s coordonata devine egală cu $x_2 = 2$ m. Scrieți ecuația mișcării mobilului.
- Un punct material se mișcă uniform de-a lungul axei Ox astfel încât la momentul de timp $t_1 = 1$ s coordonata lui $x_1 = 4$ m, iar la momentul $t_2 = 6$ s coordonata devine $x_2 = -2$ m. Determinați viteza, deplasarea și drumul parcurs ale punctului material. Scrieți ecuația mișcării.
- * Două mobile se mișcă de-a lungul axei de coordonate Ox conform ecuațiilor $x_1 = -3 + 2t$ și $x_2 = 17 - 3t$, în care timpul t este exprimat în s, iar coordonata x - în m. Construiți graficele pentru coordonatele și proiecțiile vitezelor mobilelor; determinați momentul întâlnirii lor și distanțele parcurse de ele până la întâlnire.

Lucrarea de laborator

Nr. 1

Studiul mișcării rectilinii uniforme

Scopul lucrării

Cercetarea experimentală a mișcării rectilinii uniforme a unui corp și determinarea vitezei lui în această mișcare.

Dispozitive și materiale

Un tub de sticlă închis la un capăt cu lungimea de 60–70 cm, pe care este lipită o fâșie de hârtie milimetrică în calitate de riglă; ulei, plastilină, cronometru.

Considerații teoretice

La căderea liberă a unui corp de masă mică într-un lichid, forța de greutate a corpului este echilibrată de forța Arhimede și de cea de rezistență a lichidului, iar după un timp scurt de la începutul căderii, corpul se mișcă uniform. Viteza într-o mișcare rectilinie uniformă reprezintă distanța parcursă de corp în orice intervale egale de timp și este dată de relația $v = s/\Delta t$. Pentru determinarea vitezei, trebuie să măsurăm distanțele Δs parcurse de corp în diferite intervale de timp Δt .

În calitate de corp aflat în cădere pe verticală vom considera o bilă mică de plastilină, care se mișcă într-un tub de sticlă umplut cu ulei.

Modul de lucru:

- 1 Confectionați 5-7 bile de plastilină cu diametrul de până la 5 mm.
- 2 Marcați pe întreaga lungime a tubului de sticlă 5 poziții, care vor delimita 5 distanțe parcurse de bilele de plastilină de la diviziunea „0”.
- 3 Umpleți cilindrul cu ulei astfel încât nivelul lui să fie cu aproximativ 5 cm mai sus de diviziunea „0” de pe fâșia de hârtie milimetrică lipită pe tub (fig. 1.25).
- 4 Luați una dintre bile și, aducând-o la capătul de sus al tubului, eliberați-o astfel încât ea să cadă liber în ulei.
- 5 La momentul când bila ajunge la nivelul „0” considerat inițial, porniți cronometrul.
- 6 Când bila ajunge la prima poziție marcată, opriți cronometrul și citiți indicațiile intervalului de timp Δt_1 și ale distanței parcurse $\Delta s_1 = s_1 - 0$. Introduceți în caiet datele colectate folosind tabelul alăturat.

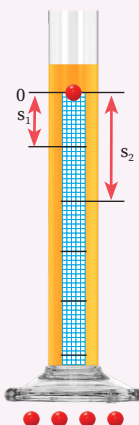


Fig. 1.25

Nr. crt.	s (10^{-2} m)	Δs (10^{-2} m)	Δt (s)	v (m/s)	Δv (m/s)	ε (%)
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
Valoarea medie						

- 7 Repetați încă de 4 ori procedeele de la punctele 4–6 pentru alte distanțe măsurate de la același nivel „0”, parcurse de alte bile de plastilină.
- 8 Calculați viteza bilei de plastilină pe fiecare dintre cele 5 distanțe parcurse, convingându-vă că ea este aproximativ aceeași, adică mișcarea este practic uniformă. Calculați valoarea medie a acesteia.
- 9 Calculați erorile absolute $\Delta v = |\bar{v} - v_i|$ și relativă $\varepsilon = \Delta v / \bar{v}$ ale măsurărilor individuale, precum și valorile lor medii, $\bar{v}$ și $\Delta \bar{v}$.
- 10 Prezentați rezultatul final sub forma $v = (\bar{v} \pm \Delta \bar{v}) \frac{\text{m}}{\text{s}}$; $\varepsilon = \dots\%$.
- 11 Formulați concluzii referitor la rezultatele obținute.

Analizează și aplică!

- ▶ De ce la căderea liberă a unui corp într-un lichid cu rezistență mare mișcarea este aproximativ uniformă?
- ▶ De ce în acest experiment este bine să luăm bile de plastilină? Cum credeți că s-ar mișca în același lichid o bilă de oțel de aceleași dimensiuni?

Cinematica mișcării relative

În *paragraful 1.1*, *b* s-a menționat că mișcarea este relativă, adică poate fi descrisă simultan față de mai multe sisteme de referință. În acest caz este important să stabilim ce relații există între caracteristicile mișcării unui și aceluiași corp în sisteme de referință diferite.

De exemplu, o elevă se deplasează cu autobuzul. Admitem că ea s-a așezat pe un scaun (*fig. 1.26, a*). Față de autobuz eleva se află în repaus, dar față de stația de autobuze (de Pământ) ea se mișcă împreună cu autobuzul. Astfel, această elevă față de un referențial se află în repaus, iar față de altul se mișcă. În cazul dat, starea de repaus este relativă și depinde de alegerea referențialului. Deplasarea elevei față de referențialul legat de autobuz (referențialul mobil) este nulă $\vec{s}_1 = 0$, iar deplasarea sa $\vec{s}$ față de referențialul legat de Pământ (referențial considerat convențional fix) devine egală cu deplasarea $\vec{s}_2$ a autobuzului, adică

$$\vec{s} = \vec{s}_2 \text{ pentru } \vec{s}_1 = 0. \quad (1.23)$$

O altă situație: un elev intră în autobuz prin ușa din spate și trece până la ușa din față în timp ce autobuzul se mișcă. După cum se observă din *figura 1.26, b*, deplasarea $\vec{s}$ a elevului față de Pământ este egală cu deplasarea sa $\vec{s}_1$ față de autobuz, plus deplasarea $\vec{s}_2$ a acestuia:

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2. \quad (1.24)$$

Deplasările elevului în raport cu cele două referențiale sunt diferite, deci ele sunt relative, adică dependente de referențialul ales.

Dacă însă elevul intră în autobuz prin ușa din față și se deplasează spre cea din spate, relativitatea mișcării este și mai evidentă: în raport cu autobuzul, elevul se deplasează într-un sens (în sensul deplasării sale $\vec{s}_1$), iar în raport cu Pământul, în sens contrar. Din *figura 1.26, c* observăm că și în acest caz deplasările corpurilor corespund relației (1.24).

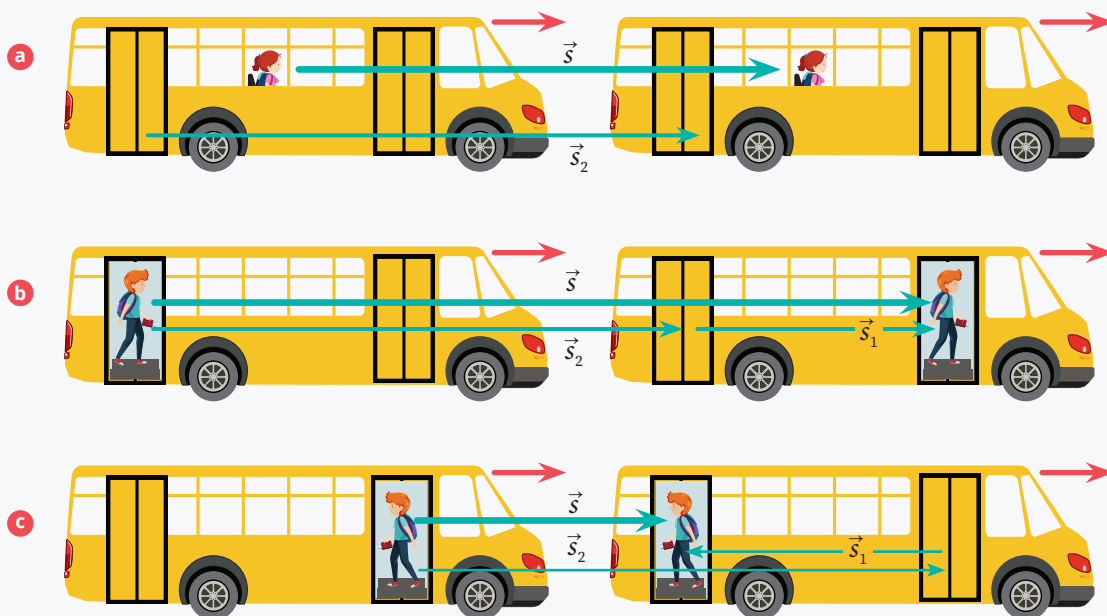


Fig. 1.26

Examinăm un caz (fig. 1.27) când corpurile se mișcă în direcții diferite: pe suprafața apei unui râu se deplasează simultan, pornind din același loc, o plută și o luntre cu vâsle, ultima ținând cursul său perpendicular pe direcția curentului de apă.

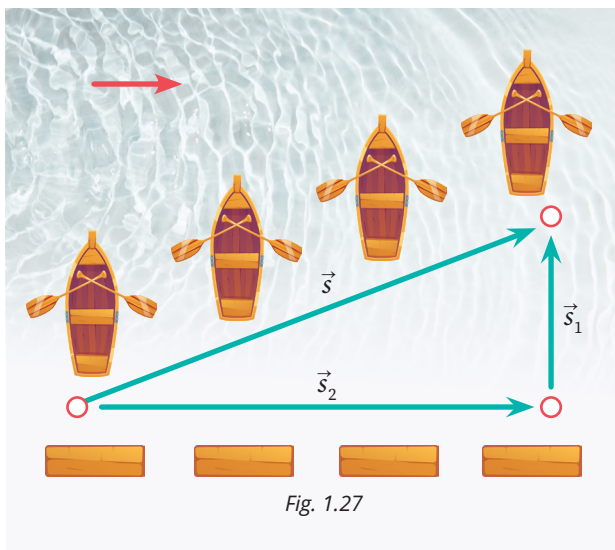


Fig. 1.27

Pluta și luntrea sunt antrenate în mișcare de curentul de apă la fel, rămânând permanent pe o direcție perpendiculară față de curentul de apă. În timpul în care luntrea ajunge la malul opus al râului, aceasta, ca și pluta, s-a deplasat în direcția curentului de apă cu $\vec{s}_2$. Deplasarea luntrei în raport cu pluta, deci și față de curentul de apă, este egală cu $\vec{s}_1$. Din figură observăm că deplasarea $\vec{s}$ a luntrei în raport cu malul satisface relația $\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$, obținându-se din nou relația (1.24).

Mișcarea corpului față de sistemul mobil și caracteristicile acesteia sunt numite relative: deplasare relativă, viteză relativă.

Mișcarea corpului și caracteristicile ei în raport cu sistemul de referință considerat fix sunt numite absolute: deplasare absolută, viteză absolută.

Mișcarea corpului cauzată numai de mișcarea sistemului mobil este numită mișcare de transport și, respectiv, caracteristicile ei: deplasare de transport, viteză de transport.

Din aceste definiții reiese că, pentru a evidenția mișcarea de transport și a determina caracteristicile ei, este necesar să ne imaginăm corpul în repaus față de referențialul mobil. Astfel, în exemplele de mai sus, deplasarea autobuzului sau a plutei (a apei din

râu) este deplasarea de transport $\vec{s}_2 = \vec{s}_t$. Deplasarea elevului/elevei față de autobuz sau a luntrei în raport cu pluta este deplasarea relativă $\vec{s}_1 = \vec{s}_r$, iar deplasările elevului/elevei și a luntrei în raport cu Pământul sunt deplasări absolute $\vec{s} = \vec{s}_a$.

În acești termeni relația (1.24) se enunță astfel:

Deplasarea absolută a corpului este egală cu suma deplasării relative și a celei de transport.

$$\vec{s}_a = \vec{s}_r + \vec{s}_t. \quad (1.25)$$

Relația (1.25) reprezintă legea compunerii deplasărilor.

La prima vedere, relația (1.24) este identică cu relația (1.5). În ambele cazuri se adună vectorii deplasare. Dar în relația (1.5) se adună vectorii deplasare ai corpului pentru intervale succesive de timp Δt_1 și Δt_2 , obținându-se deplasarea corpului în întreg intervalul de timp ($\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$). În relația (1.24) însă figurează deplasări ale corpului în unul și același interval de timp, dar față de referențiale diferite, și deplasarea corpului condiționată de mișcarea referențialului mobil.

Considerăm că mișcarea relativă a corpului și cea a referențialului mobil sunt rectilinii și uniforme. Atunci și mișcarea în raport cu referențialul fix este rectilie și uniformă.

Notăm cu Δt durata mișcării (timpul este absolut, deci durata Δt este aceeași în ambele sisteme de referință). Împărțind termenii relației (1.25) la Δt , obținem

$$\frac{\vec{s}_a}{\Delta t} = \frac{\vec{s}_r}{\Delta t} + \frac{\vec{s}_t}{\Delta t}. \quad (1.26)$$

Mărimea $\vec{v}_a = \frac{\vec{s}_a}{\Delta t}$ constituie viteza absolută (în raport cu referențialul fix), $\vec{v}_r = \frac{\vec{s}_r}{\Delta t}$ este viteza relativă (în raport cu referențialul mobil) și $\vec{v}_t = \frac{\vec{s}_t}{\Delta t}$ – viteza de transport, adică viteza pe care o are corpul datorită mișcării referențialului mobil.

Relația (1.26) ia forma

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_t. \quad (1.27)$$

Viteza absolută a mobilului este egală cu suma vitezei relative și a celei de transport.

Aceasta este legea compunerii vitezelor.

Astfel, nu numai deplasarea mobilului, ci și viteza lui este o caracteristică relativă, dependentă de sistemul de referință ales.

Problemă REZOLVATĂ

O sportivă traversează un râu cu lăţimea L în direcţie perpendiculară pe mal. Ea ajunge în punctul B de pe malul opus, situat vizavi de locul de plecare, apoi se reîntoarce la acesta. A doua oară sportiva înoată în sens opus curentului de apă (în amonte) la o distanţă egală, de asemenea, cu lăţimea L , după care se întoarce la locul iniţial. În caz sportiva a consumat un timp mai mare şi de câte ori? Viteza sportivei în apă stătătoare $v_r = 0,90$ m/s, viteza de curgere a apei din râu $v_t = 0,54$ m/s.

Rezolvare

Se dă:

$$v_r = 0,90 \text{ m/s,}$$

$$v_t = 0,54 \text{ m/s}$$

$$\frac{t_1}{t_2} = ?$$

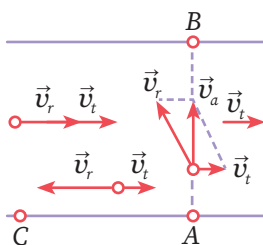


Fig. 1.28

Reprezentăm în figura 1.28 poziţia iniţială A , poziţia B de pe malul opus al râului şi poziţia C în amonte. Distanţele $AB = AC = L$. La traversarea râului din A în B şi înapoi, viteza $\vec{v}_r$ a sportivei în raport cu apa trebuie să fie orientată sub un anumit unghi faţă de această direcţie, astfel încât viteza ei $\vec{v}_a$ faţă de mal să fie perpendiculară pe acesta. Din figură observăm că

$v_a = \sqrt{v_r^2 - v_t^2}$. Deci timpul deplasării din A în B şi înapoi este $t_1 = \frac{2L}{v_a} = \frac{2L}{\sqrt{v_r^2 - v_t^2}}$. Viteza sportivei faţă de mal la deplasarea ei din A în C este egală cu $(v_r - v_t)$, iar la deplasarea din C în A – cu $(v_r + v_t)$.

Timpul total în acest caz: $t_2 = \frac{L}{v_r - v_t} + \frac{L}{v_r + v_t} = \frac{2Lv_r}{v_r^2 - v_t^2}$.

Calculăm raportul timpilor: $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_r^2 - v_t^2}{v_r \sqrt{v_r^2 - v_t^2}} = \sqrt{1 - \frac{v_t^2}{v_r^2}}$; $\frac{t_1}{t_2} = 0,8$, de unde obţinem $t_2 = 1,25 t_1$.

Astfel, în cel de-al doilea caz sportiva are nevoie de un interval de timp de 1,25 ori mai mare decât în primul caz.

AUTOEVALUARE

- 1 În ce caz caracteristicile mişcării sunt numite absolute? Dar de transport?
- 2 Formulaţi legea compunerii vitezelor.
- 3 Viteza unui biciclist $v_1 = 12$ m/s, iar viteza vântului ce-i suflă în faţă este $v_2 = 4$ m/s, ambele viteze fiind considerate în raport cu Pământul. Determinaţi viteza vântului în raport cu biciclistul.
- 4 **ING** Viteza de curgere a apei este egală cu 1,2 m/s. O luntre cu motor se deplasează în amonte (în sens contrar curentului de apă) cu viteza de 3,0 m/s faţă de mal. Cu ce viteză se mişcă luntrea în aval (în sensul curgerii apei)? Regimul de funcţionare a motorului luntrei în ambele cazuri este acelaşi.
- 5 **ING** Pe două linii paralele de cale ferată se deplasează în acelaşi sens două trenuri: un marfar cu lungimea $L = 640$ m, cu viteza $v_1 = 36$ km/h şi un tren de pasageri cu viteza $v_2 = 64,8$ km/h. Determinaţi intervalul de timp în care pasagerul vede marfarul atunci când acesta este depăşit de trenul de pasageri.
- 6 **ING** O scară rulantă urcă o persoană aflată în repaus în timpul $t_1 = 1$ min. Pe scara imobilă persoana urcă în $t_2 = 3$ min. În cât timp ea va urca mişcându-se pe scara cu platformă mobilă?
- 7 Un sportiv trece înot un râu în direcţie perpendiculară pe mal cu viteza $v = 0,5$ m/s faţă de acesta. Determinaţi viteza de curgere a apei din râu, dacă se ştie că ea este de $\sqrt{2}$ ori mai mică decât viteza sportivului în raport cu apa.
- 8 O luntre traversează un râu cu lăţimea $L = 60,0$ m, viteza ei faţă de apă fiind perpendiculară pe direcţia curentului de apă. Ştiind că viteza luntrei în apă stătătoare este egală cu $v_1 = 3,0$ m/s, iar viteza curentului de apă – cu $v_2 = 1,0$ m/s, determinaţi:
 - a viteza luntrei faţă de mal;
 - b distanţa cu care a fost deplasată luntrea de curentul de apă;
 - c modulul deplasării luntrei faţă de malul râului.

Mișcarea rectilinie uniform variată. Accelerația

a Mișcarea rectilinie neuniformă. Viteza medie. Viteza momentană

În viața cotidiană întâlnim rar corpuri ce se mișcă rectiliniu uniform. În majoritatea cazurilor, ele efectuează deplasări diferite în intervale de timp egale, adică mișcările lor sunt **neuniforme**.

Pentru a caracteriza *mișcarea rectilinie neuniformă* a mobilului și pentru a compara mișcările neuniforme ale diferitelor mobile, se introduce noțiunea de **viteză medie**.

Admitem că deplasarea mobilului într-un interval de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ este egală cu $\vec{s}$.

Mărimea fizică egală cu raportul dintre deplasare și intervalul de timp corespunzător se numește viteză medie a unui corp.

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{s}}{t_2 - t_1}. \quad (1.28)$$

Vectorul viteză medie are direcție și sens comune cu deplasarea corpului, adică este orientat de-a lungul dreptei ce prezintă traiectoria sa.

Viteza medie caracterizează mișcarea mobilului în întreg intervalul de timp $(t_2 - t_1)$. Cunoașterea ei nu permite determinarea deplasării mobilului într-o anumită porțiune a acestui interval, de exemplu, în prima treime a lui.

Mărimea care permite o descriere mai detaliată a mișcării neuniforme este viteza mobilului la un moment dat, numită viteză momentană sau instantanee.

Un motociclist se deplasează pe o porțiune rectilinie de șosea. Se cere să se determine viteza instantanee a lui la momentul trecerii pe lângă borna kilometrică, mai exact a unui punct, de exemplu, al axului roții din față, la momentul când trece prin planul din față P al bornei (fig. 1.29).

Admitem că în intervalul de timp Δt_1 motociclistul a ajuns din poziția A_1 în B_1 efectuând deplasarea $\vec{s}_1$. Viteza medie a lui în acest interval constituie:

$$\vec{v}_{med1} = \frac{\vec{s}_1}{\Delta t_1}.$$

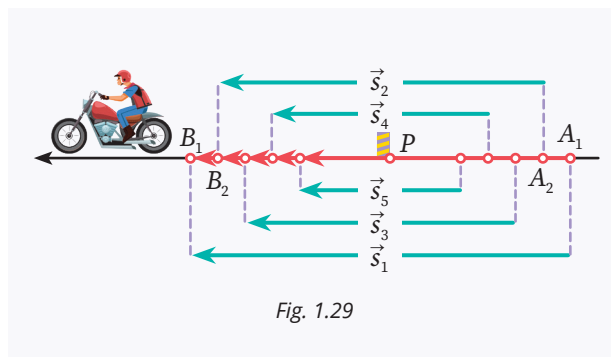


Fig. 1.29

Luăm un interval mai mic Δt_2 , deplasarea mobilului este mai mică și egală cu $\vec{s}_2$, iar viteza medie în acest interval:

$$\vec{v}_{med2} = \frac{\vec{s}_2}{\Delta t_2}.$$

$\vec{v}_{med2}$ diferă de viteza $\vec{v}_{med1}$. Unor intervale de timp din ce în ce mai mici $\Delta t_3 > \Delta t_4 > \Delta t_5 \dots$ le corespund deplasări din ce în ce mai mici $\vec{s}_3, \vec{s}_4, \vec{s}_5 \dots$ și viteze medii:

$$\vec{v}_{med3} = \frac{\vec{s}_3}{\Delta t_3}, \vec{v}_{med4} = \frac{\vec{s}_4}{\Delta t_4}, \vec{v}_{med5} = \frac{\vec{s}_5}{\Delta t_5}.$$

Calculând viteza medie în intervale mici, vom obține valoarea vitezei momentane. Notând cu $\Delta \vec{s}$ o deplasare mică a mobilului și cu Δt intervalul de timp corespunzător, aflăm viteza momentană a mobilului:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{s}}{\Delta t}. \quad (1.29)$$

Cu cât intervalul de timp Δt este mai mic, cu atât acesta se apropie tot mai mult de un moment de timp, iar viteza medie pe acest interval se apropie de viteza momentană.

În cazul mișcării rectilinii neuniforme, viteza momentană, care ulterior va fi numită viteză, ia valori diferite pentru momente de timp diferite, adică este o funcție de timp:

$$\vec{v} = \vec{v}(t). \quad (1.30)$$

Ea crește în modül atunci când mobilul începe mișcarea sa și se micșorează când acesta frânează.

În cazul în care mobilul se mișcă în unul și același sens, modulul deplasării lui este egal cu distanța parcursă $|\vec{s}| = l$, astfel pentru modulul vitezei medii avem

$$v_{med} = \frac{l}{t_2 - t_1}. \quad (1.31)$$

Dacă însă mobilul se mișcă într-un sens, apoi în sens contrar, atunci modulul deplasării devine mai mic decât distanța parcursă. Dacă mobilul se întoarce în poziția inițială, modulul deplasării devine nul, deci viteza medie calculată după formula (1.28) este egală cu zero, de parcă mobilul nu s-ar fi mișcat pe parcursul acestui interval de timp.

De aceea atunci când mobilul își schimbă sensul mișcării, ca în cazul mișcării pe traiectorii curbilinii, este mai eficient a utiliza **viteza medie de distanță**. Ea este o mărime scalară egală cu raportul dintre distanța parcursă și intervalul de timp corespunzător. Expresia respectivă coincide cu relația (1.31).

b Mișcarea rectilinie uniform variată. Accelerația

Corpul ce se mișcă rectiliniu uniform are viteză constantă, aceasta fiind cea mai simplă formă de mișcare. Există însă o mișcare rectilinie a corpului, în care viteza lui variază într-un anumit mod.

Mișcarea rectilinie a corpului este uniform variată, dacă în orice intervale egale de timp variația vitezei lui momentane este una și aceeași.

Conform definiției, variațiile vitezei corpului $\Delta \vec{v}_1, \Delta \vec{v}_2, \Delta \vec{v}_3, \dots$ în intervalele de timp egale $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \dots$ satisfac condiția $\Delta \vec{v}_1 = \Delta \vec{v}_2 = \Delta \vec{v}_3 = \dots$. De asemenea, dacă divizăm unul dintre intervalele Δt_i în mai multe intervale egale mai mici, atunci fiecărui interval mai mic îi corespunde o variație a vitezei tot de atâtea ori mai mică față de variația vitezei în intervalul Δt_i .

Din cele expuse mai sus rezultă egalitatea raporturilor $\frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t_2} = \frac{\Delta \vec{v}_3}{\Delta t_3} = \dots = \text{const.}$

Acest raport, constant pentru mișcarea dată, este numit **accelerație** (în latină *acceleratio* „a grăbi”):

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.32)$$

Unitatea pentru accelerație în SI este

$$[\vec{a}] = \frac{[\Delta \vec{v}]}{[\Delta t]} = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Accelerația este mărimea fizică vectorială ce caracterizează rapiditatea variației vitezei mobilului. Accelerația mobilului în mișcare rectilinie uniform variată este o mărime constantă: $\vec{a} = \text{const.}$

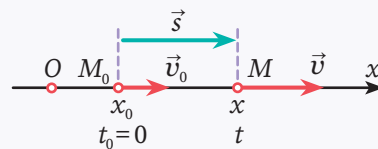


Fig. 1.30

Viteza mobilului în mișcarea rectilinie uniformă rămâne constantă, deci variația ei, ca și accelerația mobilului, este nulă. Astfel, **mișcarea rectilinie uniformă este mișcarea cu accelerație nulă**. Considerăm mișcarea rectilinie uniform variată a unui mobil. Orientăm axa de coordonate Ox în direcția mișcării (fig. 1.30). Admitem că la momentul inițial $t_0 = 0$ mobilul ocupa poziția M_0 cu coordonata x_0 și avea viteza inițială $\vec{v}_0$, iar la momentul t ocupă poziția M cu coordonata x și are viteza $\vec{v}$. Deci în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0 = t$, viteza mobilului s-a modificat cu $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$. Accelerația lui este

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t},$$

de unde exprimăm viteza mobilului la momentul t :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \quad (1.33)$$

Pentru proiecția vitezei pe axa Ox (fig. 1.30) avem

$$v_x = v_{0x} + a_x t. \quad (1.34)$$

Această ecuație reprezintă **legea vitezei**.

Din aceste relații observăm că viteza mobilului în mișcare rectilinie uniform variată este o funcție liniară de timp. În cazul în care proiecțiile vitezei v_{0x} și ale accelerației a_x au același semn, proiecția v_x crește în modl cu timpul, dacă însă ele au semne opuse, proiecția v_x scadește. În primul caz mișcarea este numită **accelerată**, în cazul al doilea **încetinită**.

Determinăm proiecția deplasării în mișcarea uniform accelerată a unui mobil. În acest scop vom utiliza relația (1.28). Deoarece viteza mobilului se modifică uniform, valoarea ei medie se determină cu expresia $v_{med, x} = (v_{0x} + v_x)/2$. Astfel, pentru proiecția deplasării mobilului (distanța parcursă) în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0 = t$ obținem

$$s_x = v_{med, x} \Delta t = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \cdot t. \quad (1.35)$$

Relația (1.35) este comodă la determinarea distanței parcurse în mișcarea uniform variată când nu este cunoscută accelerația mobilului.

Folosind legea vitezei (1.34), din (1.35) rezultă

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}. \quad (1.35, a)$$

Luând în considerare că $s_x = x - x_0$ pentru coordonata mobilului la momentul de timp t , obținem

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \quad (1.36)$$

care mai este numită și **ecuația (legea) mișcării uniform accelerate**.

G* Graficele proiecțiilor accelerației și vitezei

Proiecția accelerației mobilului în mișcare rectilinie uniform variată este constantă $a_x = \text{const}$. Graficul ei reprezintă o dreaptă paralelă cu axa timpului (fig. 1.31). Din figură observăm că graficul 2 corespunde mișcării cu o accelerație mai mare decât cea din mișcarea reprezentată de graficul 1: $a_{2x} > a_{1x}$. Graficul 3 corespunde mișcării uniform variate cu proiecția negativă a accelerației ($a_{3x} < 0$), adică orientate în sens contrar sensului pozitiv al axei Ox .

Graficul proiecției vitezei v_x ca funcție liniară de timp (1.35) este o linie dreaptă. În figura 1.32 sunt reprezentate diferite grafice posibile. Graficul 1 reprezintă mișcarea rectilinie uniform variată cu viteza inițială v_{0x} și accelerația a_{1x} , ambele proiecții fiind pozitive, adică vectorii corespunzători sunt orientați în sensul pozitiv al axei Ox , deci mișcarea este uniform accelerată.

Graficul 2 redă o mișcare uniform variată cu proiecția vitezei inițiale $v_{0x} > 0$ și cea a accelerației $a_{2x} < 0$. Cu timpul viteza mobilului se micșorează, deci mișcarea lui este uniform încetinită. La momentul t_2 , care corespunde punctului de intersecție a graficului 2 cu axa timpului, viteza mobilului a devenit nulă, deci el s-a oprit. După aceasta (la $t > t_2$), proiecția vitezei a devenit negativă, corpul se mișcă în sens contrar mișcării inițiale cu viteză crescândă în mod. Astfel, mișcarea descrisă de graficul 2 este inițial uniform încetinită, până la momentul t_2 , când trece în mișcare uniform accelerată.

Graficul 3 corespunde mișcării uniform încetinite în sensul negativ al axei Ox până la momentul t_3 , în

care viteza mobilului devine nulă, după ce mișcarea lui devine uniform accelerată în sensul pozitiv al axei Ox .

Punctele de intersecție a graficelor vitezelor pentru diferite mobile corespund momentelor de timp la care mobilele au viteze egale. De exemplu, mobilele 1 și 3 au viteze egale la momentul $t_{1,3}$.

Așadar,

Dacă modulul proiecției vitezei v_x crește (descrește) uniform cu timpul, accelerația este pozitivă (negativă) și mișcarea este numită uniform accelerată (încetinită).

În paragraful 1.5 s-a constatat că în mișcarea rectilinie uniformă valoarea proiecției deplasării mobilului este egală numeric cu aria figurii (dreptunghiului) formată de graficul proiecției vitezei, axa timpului și ordonatele ce corespund începutului și sfârșitului intervalului de timp corespunzător (vezi figura 1.21). Să analizăm dacă această constatare rămâne valabilă și în cazul mișcării uniform accelerate, în care proiec-

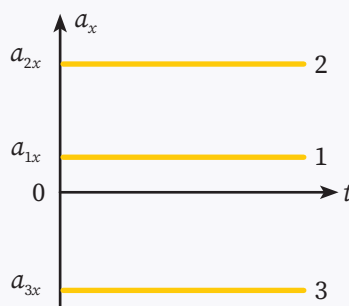


Fig. 1.31

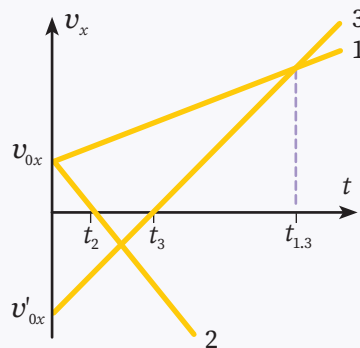
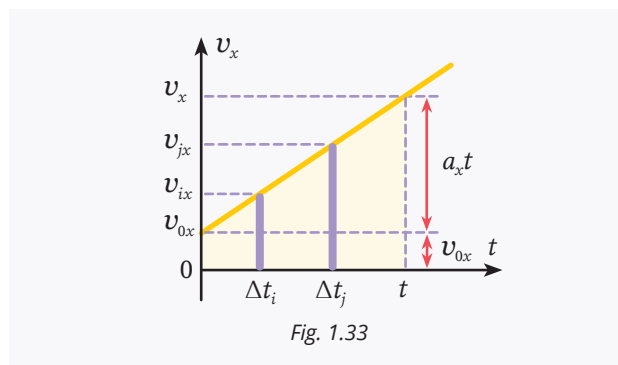


Fig. 1.32

ția vitezei mobilului variază pe parcursul intervalului $0 \div t$ de la valoarea v_{0x} până la valoarea $v_x = v_{0x} + a_x t$.

Pentru aceasta împărțim imaginar intervalul de timp într-un număr mare: $\Delta t_1, \Delta t_2 \dots \Delta t_i, \dots, \Delta t_j \dots$ atât de mici, încât în decursul lor variația proiecției vitezei să poată fi neglijată în comparație cu valoarea ei (fig. 1.33). Astfel, pe durata fiecăror dintre intervalele mici de timp mișcarea poate fi considerată uniformă, iar proiecția deplasării mobilului egală cu aria uneia dintre fâșiile evidențiate în figura 1.33.



Însumarea proiecțiilor deplasărilor în toate intervalele mici de timp se reduce la adunarea ariilor tuturor fâșiilor, obținându-se, astfel, aria figurii de sub grafic. Figura respectivă este un trapez având bazele egale cu v_{0x} și $(v_{0x} + a_x t)$ și înălțimea egală cu t . Folosind expresia pentru aria trapezului, egală cu semisuma bazelor înmulțită cu înălțimea, obținem același rezultat (1.35, a):

$$s_x = \frac{v_{0x} + (v_{0x} + a_x t)}{2} \cdot t = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}.$$

d Formula lui Galilei

Rezumând rezultatele privitor la mișcarea rectilinie uniform variată, pentru proiecția deplasării și a vitezei mobilului în această mișcare avem relațiile

$$\begin{cases} s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \\ v_x = v_{0x} + a_x t. \end{cases} \quad (1.37)$$

Ecuatiile de mai sus conțin cinci mărimi: s_x, v_x, v_{0x}, a_x și t , permițând a determina două dintre aceste mărimi când sunt cunoscute celelalte trei. În acest mod se rezolvă toate problemele ce se referă la forma dată de mișcare.

În unele probleme timpul t nu este cunoscut și nici nu se cere determinarea lui. În astfel de cazuri este utilă folosirea unei relații ce se obține din cele două (1.37) după excluderea din ele a timpului t . Exprimăm din cea de-a doua formulă timpul $t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$ și îl substituim în prima formulă din (1.37):

$$s_x = v_{0x} \left[\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right] + \frac{a_x}{2} \left[\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right]^2 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$$

sau

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x. \quad (1.38)$$

Relația respectivă este cunoscută ca **formula lui Galilei**. Ea nu conține timpul și permite determinarea uneia dintre mărimi când sunt cunoscute celelalte trei.

Fizicieni celebri



Galileo GALILEI (1564-1642), fizician și astronom italian

A descoperit principiul inerției, a stabilit caracterul relativ al mișcării mecanice, a formulat principiul clasic al relativității și legea compunerii vitezelor. A stabilit legițile căderii libere, ale mișcării corpului pe planul înclinat și ale oscilațiilor pendulului.

Cu ajutorul unei lunete confecționate de el, a descoperit munții pe Lună, patru sateliți ai planetei Jupiter; a stabilit natura stelară a Căii-Lactee. A construit un telescop care i-a permis să descopere fazele planetei Venus, petele pe Soare.

Galilei a fost adept al sistemului heliocentric al lui Copernic, pentru aceasta fiind persecutat de inchiziție.

e Mișcarea corpului pe verticală

Un exemplu de mișcare rectilinie uniform variată este mișcarea corpului pe verticală la înălțimi mult mai mici decât raza Pământului. Mișcarea pe verticală este mișcarea corpului liber lansat vertical în sus, mișcarea unui corp în cădere liberă (cu sau fără viteză inițială, orientată vertical în jos ori în sus).

Este bine să știți



Fig. 1.34

Printre primii savanți care au studiat experimental căderea liberă a corpurilor a fost Galileo Galilei. El lăsa corpuri diferite să cadă de pe vestitul turn înclinat de la Pisa (fig. 1.34), comparând timpii de cădere a acestora (timpul era evaluat numărând bătăile inimii sau după volumul de apă ce se scurgea printr-un orificiu al unui vas). În urma unor multiple experimente, Galilei a ajuns la concluzia că, în absența rezistenței aerului, toate corpurile cad cu aceeași accelerație gravitațională, indiferent de masa lor.

Să analizăm căderea unei foi de hârtie. Ea nu cade pe verticală, așa cum cade, de exemplu, o bilă metalică, pentru că mișcarea foi este influențată de curenții de aer care îi pot devia mișcarea. Este deci necesară realizarea unui experiment în care ar fi exclusă influența aerului.

Experiment

Luăm tubul Newton – un tub de sticlă lung de circa 1 m având în interiorul său o pană, o bucățică de plută și o alică de plumb. La un capăt al său se află un robinet, care permite evacuarea aerului din tub, apoi închiderea etanșă a acestuia.

În poziția verticală a tubului, corpurile se află în partea lui de jos. Întoarcem tubul astfel încât corpurile să se afle în partea lui de sus. Ce observăm? Corpurile cad diferit: prima cade alicea, ultima – pana (fig. 1.35, a). Repetăm experimentul după ce aerul este evacuat parțial din tub. Ce se observă la răsturnarea lui? Corpurile au căzut în aceeași ordine, dar diferența dintre timpii de cădere a devenit mai mică. La evacuarea aproape totală a aerului se observă căderea aproape simultană a corpurilor (fig. 1.35, b). Astfel, presupunerea ce se referă la influența aerului asupra căderii diferite a corpurilor prin el este justificată.

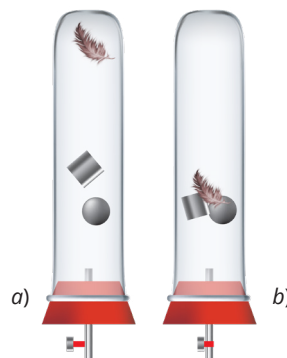


Fig. 1.35

Concluzia privind căderea identică a corpurilor pe Pământ se referă nu numai la căderea acestora în vid, dar și la căderea corpurilor din substanțe de densitate mare cu viteze nu prea mari (experimentul a confirmat influența mult mai slabă a aerului asupra căderii aliciei de plumb).

Experimental s-a constatat faptul că un corp, fiind lăsat să cadă liber, se mișcă uniform accelerat. Această accelerație, unică pentru toate corpurile, numită **accelerație gravitațională**, este orientată vertical în jos. Pentru a o evidenția, ea se notează cu $\vec{g}$. Valoarea ei depinde de latitudinea geografică a locului unde se află corpul și de înălțimea lui deasupra Pământului.

La nivelul mării, accelerația gravitațională ia următoarele valori: la poli $g = 9,8324 \text{ m/s}^2$, la latitudinea de 45° valoarea $g = 9,8067 \text{ m/s}^2$, iar la ecuator $g = 9,7805 \text{ m/s}^2$. Pentru rezolvarea problemelor se iau valorile indicate în textul lor: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ sau, pentru a simplifica calculele numerice, $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Analizăm o situație concretă. Un corp este lansat vertical în sus, de la nivelul Pământului, cu viteza $\vec{v}_0$. Luăm axa Oy orientată vertical în sus cu originea în locul de lansare (fig. 1.36). Reprezentăm vectorul accelerației gravitaționale $\vec{g}$, orientat vertical în jos, puțin într-o parte de axa de coordonate, pentru a nu complica desenul. La aceas-

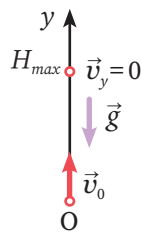


Fig. 1.36

tă alegere a axei coordonatelor, proiecția accelerației $a_y = -g$, proiecția vitezei inițiale $v_{0y} = v_0$, coordonata inițială $y_0 = 0$. Expresiile generale (1.34) și (1.36) în cazul de față iau forma

$$v_y = v_0 - gt, \quad (1.39)$$

$$y = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.40)$$

La momentul atingerii înălțimii maxime $v_y = 0$ și din (1.39) se obține timpul de urcare a corpului $t_u = v_0/g$. Când $t = t_u$, coordonata $y = H_{\max}$ și din (1.40) rezultă expresia înălțimii maxime $H_{\max} = v_0^2/2g$. Menționăm că atunci când rezistența aerului poate fi neglijată, timpul total de mișcare a corpului până la reîntoarcerea acestuia în punctul de lansare $t_t = 2t_u = 2v_0/g$.

Probleme REZOLVATE

- 1 Un mobil parcurge prima treime din distanță cu viteza $v_1 = 7,5 \text{ m/s}$, iar restul distanței – cu viteza $v_2 = 10 \text{ m/s}$. Determinați viteza medie a mobilului pe întreaga distanță.

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} v_1 &= 7,5 \text{ m/s}, \\ v_2 &= 10 \text{ m/s}, \\ l_1 &= l/3, \\ l_2 &= 2l/3 \end{aligned}$$

$$v_{\text{med}} = ?$$

Mișcarea mobilului este compusă din două mișcări uniforme: pe distanța $l_1 = \frac{1}{3}l$, unde l este distanța totală, parcursă de mobil cu viteza v_1 în timpul $t_1 = \frac{l_1}{v_1} = \frac{l}{3v_1}$, și pe distanța $l_2 = \frac{2}{3}l$ parcursă cu viteza v_2 în timpul $t_2 = \frac{l_2}{v_2} = \frac{2l}{3v_2}$. Viteza medie pe întreaga distanță este $v_{\text{med}} = \frac{l_1 + l_2}{t_1 + t_2} = \frac{l}{\frac{l}{3v_1} + \frac{2l}{3v_2}} = \frac{3v_1 v_2}{2v_1 + v_2}$; $v_{\text{med}} = 9,0 \text{ m/s}$.

- 2* Două mobile încep să se miște de-a lungul unei drepte dintr-un punct al acesteia. Cunoscând graficele pentru proiecțiile vitezelor mobilelor (fig. 1.37): a) descrieți calitativ mișcarea mobilelor; b) determinați accelerațiile mobilelor; c) scrieți expresiile pentru proiecțiile vitezelor și pentru coordonatele mobilelor; d) determinați momentul de timp când mobilele se întâlnesc; e) determinați distanțele parcurse de mobile până la întâlnire.

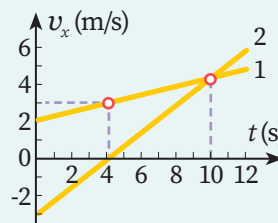


Fig. 1.37

Rezolvare

- a) Luăm originea O a coordonatelor în locul în care mobilele se aflau la momentul inițial de timp ($t_0 = 0$). Deci coordonatele inițiale $x_{01} = x_{02} = 0$. În conformitate cu graficul 1 din figura 1.37, mobilul 1 se mișcă uniform accelerat cu viteză inițială în sensul pozitiv al axei Ox . Mobilul 2 se mișcă uniform încetinit în sensul negativ al axei Ox până la momentul $t_1 = 4 \text{ s}$, când viteza lui devine nulă, adică el se oprește. După aceasta mobilul 2 se mișcă uniform accelerat în sensul pozitiv al axei Ox , viteza sa crește și la momentul $t_2 = 10 \text{ s}$ devine egală cu viteza mobilului 1, apoi o depășește. Astfel, până la momentul $t_2 = 10 \text{ s}$ mobilele mai întâi se îndepărtează unul de altul, după care se apropie până la întâlnirea lor.

- b** Variația vitezei primului mobil în intervalul de timp de la $t_0 = 0$ până la $t_1 = 4$ s este egală cu $\Delta v_{1x} = 1$ m/s. Prin urmare, proiecția accelerației lui $a_{1x} = \frac{\Delta v_{1x}}{\Delta t} = 0,25$ m/s². În același interval de timp proiecția vitezei mobilului 2 variază de la (-3) m/s până la 0, adică $\Delta v_{2x} = 0 - (-3) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3$ m/s, deci accelerația acestuia $a_{2x} = 0,75$ m/s².
- c** Vitezele inițiale ale mobilelor au proiecțiile $v_{10x} = 2$ m/s și $v_{20x} = -3$ m/s. În conformitate cu formula (1.34), proiecțiile vitezelor sunt: $v_{1x} = 2 + 0,25 t$ și $v_{2x} = -3 + 0,75 t$. Coordonatele inițiale ale mobilelor sunt egale cu zero, astfel, în acord cu (1.36), pentru valorile lor la orice moment de timp putem scrie: $x_1 = 2t + 0,25 \frac{t^2}{2}$ și $x_2 = -3t + 0,75 \frac{t^2}{2}$.
- d** La momentul întâlnirii mobilele au coordonate egale: $x_1 = x_2$. Egalând coordonatele, obținem pentru timpul t ecuația: $t(5 - 0,25 t) = 0$. Această ecuație are două rădăcini: prima dintre ele $t_0 = 0$ corespunde momentului inițial când mobilele se află în originea sistemului de coordonate; rădăcina a doua $t_3 = 20$ s corespunde momentului întâlnirii lor.
- e** Din expresiile pentru coordonate obținem valoarea lor la momentul întâlnirii $x_1 = x_2 = 90$ m. Primul mobil nu-și schimbă sensul mișcării și distanța parcursă de el este egală cu modulul variației coordonatei: $l_1 = x_1 - x_0 = 90$ m. Pentru a determina distanța parcursă de mobilul 2 până la întâlnire, trebuie să se țină seama de faptul că el mai întâi s-a mișcat în sensul negativ al axei Ox . La momentul opririi sale ($t_1 = 4$ s), mobilul avea coordonata $x_2 = -6$ m. Astfel, mobilul 2 a parcurs în sensul negativ al axei Ox o distanță egală cu 6 m, apoi această distanță în sens invers până la origine și încă 90 m până la locul întâlnirii. Deci mobilul 2 a parcurs până la întâlnire distanța $l_2 = (2 \cdot 6 + 90) \text{ m} = 102 \text{ m}$.

- 3*** Un corp lansat vertical în sus de la suprafața Pământului se află la înălțimea $h = 58,8$ m de două ori, cu un interval de timp $\Delta t = 4$ s. Să se determine înălțimea maximă atinsă de corp și viteza cu care acesta a fost lansat. Se va lua $g = 9,8$ m/s². Rezistența aerului se neglijează.

Rezolvare

Se dă:

$$h = 58,8 \text{ m},$$

$$\Delta t = 4 \text{ s},$$

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$H_{\max} - ?, v_0 - ?$$

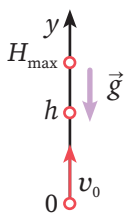


Fig. 1.38

La înălțimea h corpul se află pentru prima dată urcând, a doua oară coborând (fig. 1.38) după un interval de timp Δt . Astfel, în timpul Δt corpul urcă de la înălțimea h până la $H_{\max}$ și apoi coboară de la $H_{\max}$ până la h . Deoarece rezistența aerului se neglijează, timpul urcării este egal cu timpul coborării. Rezultă că în timpul $\frac{\Delta t}{2}$ corpul parcurge în cădere liberă distanța $(H_{\max} - h)$. Viteza inițială fiind nulă, avem $H_{\max} - h = \frac{1}{2} g \left[\frac{\Delta t}{2} \right]^2$, de unde exprimăm înălțimea maximă $H_{\max} = h + \frac{g (\Delta t)^2}{8}$; $H_{\max} = 78,4$ m. Viteza inițială poate fi determinată mai simplu, utilizând

formula lui Galilei: $v_y^2 - v_{0y}^2 = 2a_y s_y$. Din figura 1.38 avem: $v_y = 0$, $v_{0y} = v_0$, $a_y = -g$ și $s_y = H_{\max}$. Formula lui Galilei pentru acest caz ia forma: $0 - v_0^2 = 2(-g)H_{\max}$, de unde viteza inițială $v_0 = \sqrt{2gH_{\max}}$; $v_0 = 39,2$ m/s.

Analizează și aplică!

- ▶ În care mișcare viteza momentană a corpului este permanent egală cu cea medie? Argumentați.
- ▶ Poate oare mobilul să posede accelerație la momentul în care viteza momentană a lui este nulă? Ilustrați cu exemple.
- ▶* Explicați în ce mod se determină proiecția accelerației mobilului ce se mișcă rectiliniu uniform variat, fiind cunoscut graficul proiecției vitezei lui.
- ▶* Dacă este cunoscut graficul proiecției vitezei unui mobil ce se mișcă rectiliniu uniform variat, cum poate fi determinată proiecția deplasării lui?
- ▶* Ce condiție trebuie îndeplinită pentru a determina timpul ridicării unui corp lansat vertical în sus?

- 1 Ce reprezintă viteza medie a unui corp?
- 2 Definiți noțiunea de viteză momentană.
- 3 Care viteză este indicată de vitezometrul automobilului: cea medie sau cea momentană?
- 4 Care mișcare se numește rectilie uniform variată?
- 5 Definiți accelerația mobilului. Ce caracterizează ea?
- 6* Ce prezintă graficul proiecției vitezei mobilului în mișcare uniform accelerată?
- 7 Explicați modalitatea de obținere a înălțimii maxime la care se ridică un corp lansat vertical în sus.
- 8 Un corp se mișcă o treime din timp cu viteza $v_1 = 21$ m/s, iar următoarele două treimi din timp cu viteza $v_2 = 30$ m/s. Determinați viteza medie a corpului.
- 9 Un mobil a parcurs în timpul $t_1 = 2$ s o distanță $l_1 = 5$ m, apoi în timpul $t_2 = 3$ s s-a mișcat uniform cu viteza $v_2 = 5$ m/s. Să se determine viteza medie a mobilului în această mișcare.
- 10 **ING** Un biciclist a parcurs 6 km cu viteza de 12 km/h, s-a oprit, apoi ultimii 10 km s-a deplasat cu viteza de 10 km/h. Cât timp a durat staționarea biciclistului, dacă viteza medie a lui pe drumul întreg este egală cu 8 km/h?
- 11 **ING** Un motociclist care se deplasa cu viteza $v_1 = 72$ km/h și-a micșorat-o până la $v_2 = 54$ km/h într-un interval de timp $\Delta t = 25$ s. Care este accelerația motociclistului? Cum este orientată ea față de viteză?
- 12 **ING** Un automobil ce avea viteza $v_0 = 7$ m/s a început să se deplaseze cu accelerația $a = 0,25$ m/s². Care va fi viteza lui după $\Delta t = 20$ s?
- 13* În figura 1.39 este reprezentat graficul proiecției vitezei unui corp care la momentul inițial ($t = 0$) se afla în originea coordonatelor. Determinați coordonata corpului la momentul $t_1 = 10$ s, modulul deplasării lui și distanța parcursă până la acest moment.
- 14 În cât timp un automobil care începe să se deplaseze cu accelerația $a = 0,6$ m/s² parcurge distanța $l = 30$ m?
- 15 **ING** Un automobil ce se deplasează cu viteza $v_0 = 54$ km/h frânează și se oprește după $\Delta t = 6$ s de la începutul frânării. Calculați distanța parcursă de automobil la frânare.
- 16 **BIO** Când clipim, pleoapa superioară a ochiului deschis îl acoperă complet, într-un timp de 100 ms parcurgând o distanță de 1 cm. Determinați accelerația pleoapei presupunând că ea este constantă. Care este viteza finală a pleoapei superioare când ea atinge pleoapa inferioară?
- 17 Un schior a coborât în intervalul de timp $\Delta t = 20$ s o pantă cu lungimea $l = 100$ m, accelerația lui fiind $a = 0,3$ m/s². Care era viteza schiorului la începutul și la sfârșitul pantei?
- 18* **BIO** Pescărușul albastru este o pasăre micuță care poate pescui plonjând de la o anumită înălțime deasupra apei. Dacă pescărușul atinge apa cu viteza de 39,6 km/h, care este înălțimea de la care el plonjează? Se presupune că pescărușul era nemișcat înainte de a-și începe plonjarea.
- 19* Un corp lăsat să cadă liber a atins suprafața Pământului după $t = 6$ s. De la ce înălțime a căzut corpul și cu ce viteză a atins suprafața Pământului?
- 20* **BIO** Comoția cerebrală se întâmplă când are loc o mișcare bruscă a capului cu o accelerație foarte mare. Se consideră că o astfel de leziune se produce la o accelerație mai mare de 1 000 m/s² care durează cel puțin 1 ms. Să presupunem că un copil, întorcându-se în somn de pe o parte pe alta, cade de pe pat păstrându-și poziția orizontală și parcurge o distanță de 60 cm până la podea. Calculați modulul accelerației capului copilului și durata acesteia după căderea lui pe podea și determinați riscul comoției cerebrale în două cazuri: după cădere capul copilului se oprește la distanța de 5 mm de podeaua din lemn tare și la distanța de 1 cm de podeaua acoperită cu un covor pufos.
- 21* O bilă a fost aruncată vertical în sus cu viteza $v_0 = 49$ m/s. După cât timp ea se va afla la înălțimea $h = 102,9$ m? Comentați rezultatul obținut.
- 22* Un corp cade liber de la înălțimea $h = 176,4$ m. Ce distanță a parcurs el în ultima secundă înainte de a atinge Pământul? Dar în penultima?
- 23* **ING** Un aerostat se ridică vertical în sus uniform, cu viteza $v_0 = 4,9$ m/s. La momentul în care aerostatul se afla la înălțimea $h = 147$ m, din el a fost scăpată o minge. După cât timp și cu ce viteză aceasta va ajunge pe Pământ?
- 24* Două corpuri au fost lansate succesiv din același loc, vertical în sus, cu un interval de timp $\tau = 1$ s. Viteza inițială a fost $v_0 = 29,4$ m/s pentru ambele corpuri. După cât timp de la aruncarea corpului al doilea ele se vor ciocni?

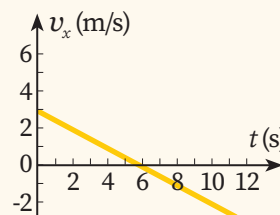


Fig. 1.39

Studiul mișcării rectilinii uniform accelerate a unui corp

Scopul lucrării

Studiul experimental al mișcării uniform accelerate și determinarea accelerației unui corp.

Dispozitive și materiale

Un cronometru (de preferat electronic), o ruletă, un uluc metalic, un stativ cu clește, o bilă metalică, un cilindru metalic.

Considerații teoretice

Mișcarea uniform accelerată a unui corp este descrisă de ecuația (1.36).

Montajul experimental (fig. 1.40) realizat în această lucrare de laborator permite măsurarea distanței parcurse de o bilă metalică în mișcare uniform accelerată fără viteză inițială și a timpului de mișcare. În baza acestor măsurări, se determină accelerația bilei cu ajutorul relației $a = \frac{2s}{t^2}$, care rezultă din (1.36) când $v_0 = 0$.

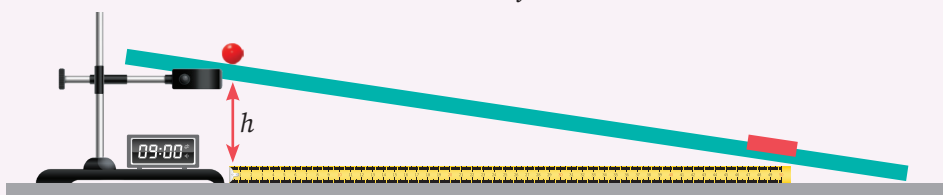


Fig. 1.40

Modul de lucru:

- 1 Realizați montajul experimental după cum este arătat în figura 1.40. Unghiul de înclinare a ulucului trebuie să fie mic ($h \approx 3 \div 4$ cm la 1 m de lungime a ulucului).
- 2 Simultan cu declanșarea cronometrului, eliberați bila ținută într-un anumit punct la capătul superior al ulucului. La momentul când se aude sunetul produs la ciocnirea bilei cu cilindrul plasat la capătul inferior al ulucului, închideți cronometrul și citiți indicația lui.
- 3 Măsurați distanța parcursă de bilă.
- 4 Calculați erorile absolută și relativă ale valorii accelerației determinate experimental.

- 5 Repetați de 4-5 ori măsurările descrise în punctele 2 și 3 pentru diferite distanțe și treceți în caiet de fiecare dată rezultatele obținute, folosind tabelul de mai jos.

Nr. crt.	t (s)	s (m)	a (m/s ²)	Δa (m/s ²)
1.				
2.				
⋮				
Valoarea medie				

- 6 Prezentați rezultatul final sub forma $a = (\bar{a} \pm \Delta \bar{a}) \text{ m/s}^2$; $\varepsilon = \dots\%$.
- 7 Expuneți concluziile referitor la rezultatele obținute.

Analizează și aplică!

- Explicați de ce unghiul de înclinare a ulucului prin care se mișcă bila trebuie să fie mic.
- Argumentați care este rolul cilindrului metalic așezat la capătul inferior al ulucului.
- Explicați cum se modifică accelerația bilei metalice în funcție de timpul de mișcare a ei.
- Determinați sursa principală de erori în experiența efectuată.

Mișcarea circulară uniformă. Accelerația centripetă

a Mișcarea circulară uniformă. Perioada și frecvența de rotație

În afară de formele de mișcare rectilinie (uniformă și uniform variată), mai există și forme de mișcare curbilinie, cea mai simplă fiind mișcarea circulară uniformă.

Prin mișcare circulară a unui mobil se subînțelege mișcarea acestuia pe un cerc.

Importanța studierii acestei mișcări este determinată de doi factori.

În primul rând, mișcarea circulară este foarte răspândită. Punctele corpurilor rigide ce se rotesc în jurul axelor fixe – ale turbinelor și rotoarelor stațiilor electrice, ale osiilor și roților dințate ale strungurilor, ale aripilor morilor de vânt, ale ácelor ceasornicului etc. – se mișcă pe cercuri. În al doilea rând, orice traiectorie curbilinie poate fi aproximativ reprezentată printr-o succesiune de arcuri de cerc (fig. 1.41). De aceea unele dintre afirmațiile ce se referă la mișcarea circulară sunt valabile și pentru mișcarea pe o traiectorie curbilinie oarecare.

Pentru a determina direcția vitezei momentane a mobilului ce se mișcă pe un cerc, admitem că în intervalul de timp Δt_1 el s-a deplasat din poziția M_0 în poziția M_1 (fig. 1.42). Deplasarea mobilului este secanta $\vec{s}_1 = \overline{M_0M_1}$, iar viteza medie corespunzătoare $\vec{v}_{med1} = \frac{\vec{s}_1}{\Delta t_1}$ are direcția acestei secante. Considerăm

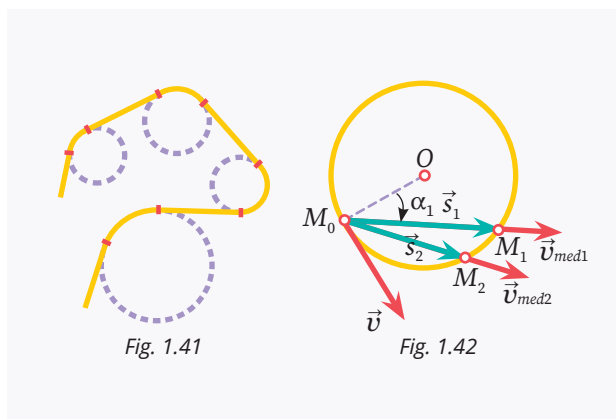


Fig. 1.41

Fig. 1.42

un interval de timp mai mic $\Delta t_2 < \Delta t_1$. La sfârșitul acestuia, mobilul ocupă o poziție M_2 mai aproape de poziția inițială M_0 . Atât deplasarea $\vec{s}_2$, cât și viteza medie $\vec{v}_{med2} = \frac{\vec{s}_2}{\Delta t_1}$ orientată de-a lungul secantei $\overline{M_0M_2}$ au altă direcție, dar care trece prin aceeași poziție inițială M_0 . Observăm că la micșorarea intervalului de timp unghiul α dintre viteza medie și raza M_0O a cercului se mărește. Acest unghi α se apropie tot mai mult de 90° pe măsură ce intervalul Δt devine tot mai mic. Conchidem că viteza momentană a mobilului este perpendiculară pe raza cercului pe care se mișcă, adică este orientată tangent la cerc.

Pentru orice mișcare curbilinie – viteza momentană a mobilului este tangentă la traiectoria în punctul ocupat de acesta.

Din figura 1.42 observăm, de asemenea, că diferența dintre modulul deplasării $|\vec{s}|$ și distanța parcursă corespunzătoare l_i (lungimea arcului M_0M_i) se micșorează concomitent cu micșorarea intervalului de timp. De aceea pentru modulul vitezei momentane putem scrie

$$v = \frac{|\vec{s}|}{\Delta t} = \frac{l}{\Delta t}, \quad (1.41)$$

unde intervalul Δt este foarte mic.

Dacă în orice intervale egale de timp mobilul parcurge distanțe egale, mișcarea circulară este uniformă.

Adică, în intervale mici de timp egale $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \dots$ mobilul parcurge distanțe egale $l_1 = l_2 = \dots$. În acest caz viteza momentană rămâne constantă în mod:

$$v = \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{l_2}{\Delta t_2} = \dots = \frac{l_1 + l_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \dots = \text{const.}$$

Mișcarea mobilului pe un cerc cu viteză constantă în mod este o mișcare circulară uniformă.

Pentru a caracteriza această mișcare, se introduc mărimi specifice. Cercul este o linie închisă și mișcarea mobilului se repetă după un anumit interval de timp caracteristic mișcării date. De

exemplu, vârful acului minutar după fiecare 3 600 s se află în fața cifrei 3 (sau a altui număr de pe cadranul ceasului).

Intervalul minim de timp, după care mișcarea mobilului se repetă întocmai, se numește perioadă de rotație T sau perioadă.

Notăm cu Δt intervalul de timp în care mobilul efectuează N rotații complete în jurul centrului cercului, adică parcurge N lungimi ale acestuia. În conformitate cu definiția, perioada de rotație este

$$T = \frac{\Delta t}{N}. \quad (1.42)$$

Mărimea egală cu numărul de rotații efectuat într-o unitate de timp este numită **frecvență de rotație ν** :

$$\nu = \frac{N}{\Delta t}. \quad (1.43)$$

Între frecvența de rotație și perioadă există relația:

$$\nu = \frac{1}{T} \text{ și } T = \frac{1}{\nu}. \quad (1.44)$$

Unitățile acestor mărimi sunt: $[T] = \text{s}$ și $[\nu] = \text{s}^{-1}$.

În tehnică se utilizează mărimea numită **turație**. Ea se notează cu n și este egală cu numărul de rotații complete într-un minut. Unitatea în SI pentru turație este $[n] = \frac{\text{rot.}}{\text{s}}$.

Noțiunile de perioadă și de frecvență de rotație au sens numai dacă mișcarea circulară este uniformă.

În cazul rigidului cu axă fixă de rotație, perioada, deci și frecvența de rotație, sunt aceleași pentru toate punctele lui, adică reprezintă o caracteristică unică pentru rigid.

Cunoașterea razei r a cercului descris de mobil și a perioadei T permite să se calculeze viteza mobilului. Într-o perioadă mobilul parcurge o distanță egală cu lungimea cercului $l = 2\pi r$, deci viteza lui

$$\nu = \frac{l}{T} = \frac{2\pi r}{T}. \quad (1.45)$$

Ținând seama de relația (1.44), pentru viteză putem scrie

$$\nu = 2\pi \nu r. \quad (1.46)$$

Expresiile pentru viteză demonstrează că vitezele punctelor rigidului sunt cu atât mai mari, cu cât ele se află la distanțe mai mari de axa de rotație.

b Accelerația centripetă

Viteza mobilului în mișcare circulară uniformă, rămânând constantă în mod, variază după direcție. Cunoașteți că rapiditatea variației vitezei este caracterizată de accelerație, a cărei definiție se dă de expresia (1.32): $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Viteza mobilului în mișcare rectilinie uniform variată are direcție constantă, variază doar modulul ei. În cazul mișcării circulare uniforme a mobilului, situația este inversă: variază direcția vitezei, modulul ei însă rămâne constant. Deci accelerația mobilului în acest caz va avea o expresie deosebită de cea din mișcarea rectilinie uniform variată.

Considerăm un mobil ce se mișcă cu viteză de mod constant egală cu v pe un cerc de rază r . Admitem că la momentul t_0 mobilul ocupă poziția M_0 și are viteza egală cu $\vec{v}_0$, iar la momentul t ocupă poziția M și are viteza egală cu $\vec{v}$ (fig. 1.43). Pentru a determina variația vitezei $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$, translăm vectorul $\vec{v}$ paralel cu el însuși, astfel ca originea lui să coincidă cu originea vectorului $\vec{v}_0$ (cu punctul M_0). Vectorul diferență $\Delta \vec{v}$ unește extremitățile vectorilor $\vec{v}_0$ și $\vec{v}$. Acești vectori au module egale ($|\vec{v}_0| = |\vec{v}| = v$), deci triunghiul M_0AB este isoscel. Vectorii vitezelor sunt perpendiculari pe razele pozițiilor corespunzătoare ale mobilului ($\vec{v}_0 \perp M_0O$ și $\vec{v} \perp MO$), deci unghiul AM_0B este egal cu unghiul $\Delta\alpha$ dintre raze (fig. 1.43).

La determinarea accelerației, intervalul de timp Δt este considerat foarte mic, deci și unghiul $\Delta\alpha$ este foarte mic. În acest caz arcul M_0M poate fi înlocuit cu secanta M_0M , a cărei lungime este modulul deplasării, egal cu distanța parcursă de mobil: $M_0M = |\vec{s}| = l = v\Delta t$. În această aproximație sectorul de cerc M_0OM poate fi considerat un triunghi isoscel. Astfel, s-au

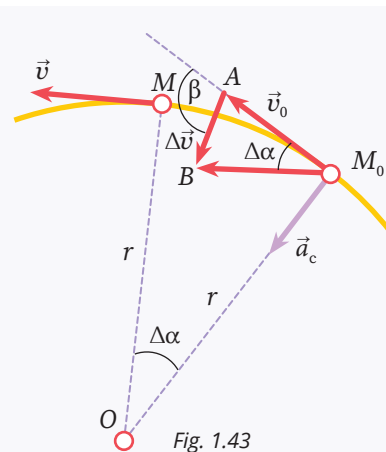


Fig. 1.43

obținut două triunghiuri isoscele – M_0AB și OM_0M , care au unghiurile de la vârf egale cu $\Delta\alpha$, deci triunghiurile sunt asemenea. Egalăm rapoartele laturilor corespunzătoare:

$$\frac{AB}{M_0A} = \frac{M_0M}{M_0O}.$$

După cum se vede din figura 1.43: $AB = |\Delta\vec{v}|$, $M_0A = |\vec{v}_0| = v$, $M_0M = v\Delta t$ și $M_0O = r$. Egalitatea rapoartelor ia forma

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{v\Delta t}{r}.$$

De aici exprimăm modulul accelerației:

$$a = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}. \quad (1.47)$$

Vectorul accelerației, cu originea în poziția M_0 ocupată de mobil, este orientat spre centrul cercului.

Accelerația mobilului în mișcare circulară uniformă se numește accelerație centripetă.

Ea se notează cu a_c . Avem

$$a_c = \frac{v^2}{r}. \quad (1.48)$$

Pornind de la expresiile (1.45) și (1.46) pentru viteza mobilului, transcriem expresia (1.48) astfel:

$$a_c = \frac{4\pi^2}{T^2} r = 4\pi^2 v^2 r. \quad (1.49)$$

Aceste relații arată că accelerația centripetă a punctului unui corp rigid ce se rotește este direct proporțională cu distanța dintre punct și axa de rotație.

C Viteza unghiulară

Examinăm un solid rigid cu axă fixă de rotație. Admitem că rotația acestuia este uniformă, adică punctele lui efectuează mișcări circulare uniforme. Distanțele parcurse de acestea în unul și același interval de timp, deci și vitezele, și accelerațiile lor sunt diferite, în funcție de distanțele punctelor de la axa de rotație.

Să luăm două puncte arbitrare, A și B , ale unui rigid cu axă fixă de rotație (fig. 1.44). Coborâm din aceste puncte perpendicularele AA_0 și BB_0 pe axa de rotație. În intervalul de timp Δt , punctul A descrie arc-ul AA' , raza AA_0 rotindu-se cu unghiul $\Delta\alpha$. În același timp, punctul B descrie un alt arc BB' , dar raza lui BB_0 se rotește cu același unghi $\Delta\alpha$. Aceasta rezultă din faptul că corpul este rigid și distanțele dintre punctele lui nu se modifică în timpul mișcării. Unghiul $\Delta\alpha$, unic pentru toate punctele rigidului, este numit **unghi de rotație** sau **deplasare unghiulară** a rigidului.

Viteza unghiulară momentană ω este o mărime fizică determinată cu raportul dintre unghiul de rotație $\Delta\alpha$ și intervalul foarte mic de timp Δt :

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \quad (1.50)$$

Viteza unghiulară ω caracterizează rotația corpului rigid, adică mișcarea circulară a tuturor punctelor sale.

Unghiurile de rotație se exprimă în **radiani (rad)** (unghiul central care sprijină un arc de lungime egală cu raza cercului), deci viteza unghiulară se exprimă în rad/s. Radianul, ca raport al lungimii arcului la rază, este adimensional. La substituirea valorilor concrete ale vitezei unghiulare în formule termenul „rad” se omite.

Putem stabili ușor relația dintre viteza unghiulară ω și perioada T . Într-un interval de timp de o perioadă, $\Delta t = T$, unghiul de rotație al corpului $\Delta\alpha = 2\pi$. Substituind aceste valori în definiția (1.50), obținem

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu, \quad (1.51)$$

unde s-a ținut seama de relația (1.44).

Pentru a nu confunda viteza unghiulară ω cu viteza v a unui punct al rigidului, ultima este numită **viteză liniară**.

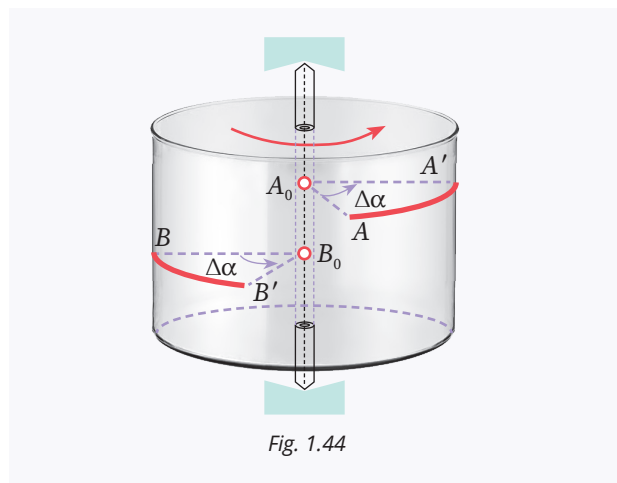


Fig. 1.44

Formula (1.51) permite exprimarea vitezei liniare (1.46) și a accelerației centripete (1.48) prin viteza unghiulară:

$$v = \omega r, \quad a_c = \omega^2 r. \quad (1.52)$$

Mișcarea circulară uniformă, în care punctele corpului au viteze liniare constante în moduli ($v = \text{const.}$), poate fi definită ca rotație cu viteză unghiulară constantă ($\omega = \text{const.}$).

Analizează și aplică!

- ▶ Explicați cum este orientată accelerația mobilului în mișcarea circulară uniformă. Ce unghi formează ea cu viteza momentană?
- ▶ Un disc efectuează o mișcare uniformă de rotație. Care puncte ale discului au o viteză liniară mai mare – cele mai apropiate de centrul discului sau cele de la marginea lui?
- ▶ De câte ori viteza unghiulară a mișcării circulare uniforme a acului unui ceasornic este mai mare decât cea de rotație a Pământului în jurul axei sale?

Elaborați un rezumat la tema: * Tipuri de mișcări ale punctului material.

AUTOEVALUARE

- 1 Definiți mișcarea circulară uniformă.
- 2 Descrieți forma traiectoriilor punctelor unui rigid cu axă fixă de rotație.
- 3 Care mișcări sunt numite periodice? Exemplificați.
- 4 Definiți noțiunea de perioadă de rotație.
- 5 Care este direcția vectorului viteză medie a mobilului în mișcarea circulară? Dar a celei momentane?
- 6 Definiți mărimea fizică numită viteză unghiulară. Care este unitatea de viteză unghiulară?
- 7 Frecvența de rotație a unui disc de rază $r = 0,2 \text{ m}$ este $\nu = 15 \text{ s}^{-1}$. Determinați viteza punctelor de la marginea discului.
- 8 **ING** Viteza punctelor de la marginea unui volant, al cărui diametru este $d = 0,3 \text{ m}$, are valoarea $v = 1,57 \text{ m/s}$. Determinați care este perioada de rotație a volantului.
- 9 Stabiliți viteza unui punct de la ecuatorul Pământului, datorită rotației diurne a acestuia. Se va lua raza Pământului $R = 6\,400 \text{ km}$.
- 10 Un punct al unui corp ce se rotește uniform în jurul unei axe fixe are viteza $v_1 = 8 \text{ m/s}$, iar punctul situat cu $d = 0,15 \text{ m}$ mai aproape de axă are viteza $v_2 = 5 \text{ m/s}$. Calculați distanța celui de-al doilea punct de la axa de rotație.
- 11 **ING** Acul minutar al unui ceasornic este de $k = 3$ ori mai lung decât acul ce indică secunde. Calculați raportul vitezelor medii ale punctelor situate la capetele acestor ace.
- 12 **ING** Un biciclist parcurge un semicerc de rază $r = 60 \text{ m}$ a unui traseu cu viteza $v = 12 \text{ m/s}$. Care este accelerația centripetă a biciclistului?
- 13 Accelerația centripetă a unui mobil ce se mișcă pe un cerc cu viteza $v_1 = 0,6 \text{ m/s}$ este $a_{c1} = 0,9 \text{ m/s}^2$. Determinați accelerația centripetă a mobilului atunci când el se mișcă pe același cerc cu viteza $v_2 = 0,8 \text{ m/s}$.
- 14 Un punct al unui corp care se rotește are viteza $v = 3,2 \text{ m/s}$ și accelerația centripetă $a_c = 25,6 \text{ m/s}^2$. Determinați viteza unghiulară a corpului și distanța dintre punctul considerat și axa de rotație.
- 15 **ING** Două roți, având razele $r_1 = 6 \text{ cm}$ și $r_2 = 15 \text{ cm}$, sunt unite printr-o curea de transmisie. Determinați viteza unghiulară a roții a doua, știind că perioada de rotație a primei roți este $T_1 = (0,2\pi) \text{ s}$.
- 16 **ING** Punctul de la marginea discului de rază $r = 0,2 \text{ m}$, ce se rotește uniform, are accelerația centripetă $a_c = 1,8 \text{ m/s}^2$. Stabiliți viteza unghiulară a discului.
- 17 **BIO** Un avion cu reacție intră în picaj pe o traiectorie foarte abruptă având în partea de jos forma unei porțiuni de cerc cu raza de curbură de 350 m , după care își continuă mișcarea aproape vertical în sus. Conform testelor medicale, piloții își pierd cunoștința la o accelerație de $5,6 g$, unde $g = 10 \text{ m/s}^2$ este accelerația gravitațională. La ce viteză își va pierde cunoștința pilotul în timpul acestui picaj?

STEAM

De la „frecvența de pedalare” la viteza de mișcare a bicicletei

Scopul proiectului

Analiza evoluției bicicletei, a principiilor ei de funcționare, precum și a modului de dezvoltare și utilizare în istoria umanității. Stabilirea legăturii dintre frecvența de pedalare și viteza de mișcare a bicicletei prin realizarea unor experimente practice.

Formați 4 echipe de lucru.

Discutați și repartizați volumul de lucru între echipe.



Realizați proiectul STEAM efectuând cercetări după următoarele repere:

Studiați istoricul apariției și dezvoltării diverselor tipuri de biciclete și a mijloacelor tehnice asemănătoare.

Analizați principiile de funcționare și de construcție a bicicletei moderne.

Explicați importanța invenției bicicletei atât din punct de vedere tehnologic, cât și social, ecologic etc.

Investigați și **constatați** care sunt avantajele ciclismului. Cicloturismul.

Documentați-vă despre diverse competiții sportive cu participarea bicicliștilor (Turul Franței; Turul Italiei; Ciclismul montan; Triatlonul sportiv ș.a.) și **formulați** opinii proprii cu referire la rolul acestora din perspective: sportive, economice, sociale, de mediu etc.

Utilizând cunoștințele din alte domenii (literatură, artă plastică, educație muzicală, cinematografie) **identificați** opere literare, filme, picturi sau melodii în care bicicleta este menționată, ilustrată.

Analizați modul în care înlocuirea mijloacelor de transport poluante cu bicicleta poate contribui la reducerea impactului negativ asupra mediului și **propuneți** soluții pentru promovarea acestui tip de mobilitate sustenabilă.

Estimați dacă soluțiile propuse sunt fezabile în contextul actual.

Realizați următorul experiment:

- ▶ Eliberați roata din spate a bicicletei și numărați câte rotații face ea la o rotație completă a pedalelor.
- ▶ Obțineți și explicați relațiile pentru determinarea vitezei de mișcare a bicicletei și pentru distanța parcursă într-un anumit interval de timp într-o mișcare uniformă exprimate prin diametrul roții și prin frecvența de pedalare.

Elaborați o prezentare Power Point în care **să reflectați** cercetările și rezultatele obținute în cadrul proiectului.

Test de evaluare sumativă

PROFIL REAL

1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p.** **a** Sistemul de coordonate legat rigid cu un corp și împreună cu instrumente de măsurare a distanțelor și a timpului reprezintă un _____ ;
- 1 p.** **b** Mărimea fizică ce caracterizează rapiditatea variației deplasării unui mobil este numită _____ ;
- 1 p.** **c** Dacă la mișcarea mobilului pe un cerc modulul vitezei acestuia este constant, atunci mișcarea circulară este _____ .

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

- | | | |
|-------------|---------------------|------------------|
| 1 p. | Accelerația | rad/s |
| 1 p. | Viteza unghiulară | ms |
| 1 p. | Perioada de rotație | cm/s |
| | | m/s ² |

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- 1 p.** **A** **F** **a** Distanța parcursă de un mobil întotdeauna este mai mare sau egală cu modulul vectorului deplasării acestuia.
- 1 p.** **A** **F** **b** Într-o mișcare uniform accelerată, în intervale egale de timp consecutive viteza mobilului se micșorează cu una și aceeași valoare.
- 1 p.** **A** **F** **c** Un corp lansat vertical în jos are accelerația de atâtea ori mai mare de câte ori este mai mare viteza lui inițială de lansare.

4 **3 p.** În figura 1.45 sunt reprezentate graficele proiecției vitezei în funcție de timp pentru mișcarea mobilelor A, B și C. Analizând aceste grafice, descrieți mișcarea mobilelor.

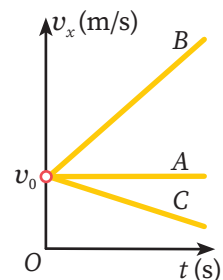


Fig. 1.45

5 **2 p.** Un elev se deplasează făcând 180 de pași într-un minut. Să se determine viteza medie a elevului dacă lungimea pasului acestuia este de 60 cm.

6 **2 p.** Viteza unghiulară a unei roți cu raza de 40 cm este egală cu 10 rad/s. Determinați accelerația centripetă a punctelor de pe oboda acestei roți.

7 Un corp se mișcă uniform accelerat fără viteză inițială cu accelerația de 2 m/s², iar altul – uniform încetinit cu viteza inițială de 6 m/s și accelerația de -1 m/s².

- 2 p.** **a** Construiți în același sistem de coordonate graficele proiecțiilor vitezelor celor două corpuri.
- 2 p.** **b** Folosind aceste grafice, determinați momentul de timp la care vitezele corpurilor devin egale.
- 3 p.** **c** Care este distanța parcursă de corpul al doilea în timpul în care vitezele corpurilor se egalează?
- 3 p.** **d** Determinați momentul de timp la care corpurile se întâlnesc.

8 Un corp este lansat de la suprafața Pământului vertical în sus cu viteză inițială de 20 m/s. Neglijând rezistența aerului și considerând accelerația gravitațională $g = 10 \text{ m/s}^2$, determinați:

- 3 p.** **a** Înălțimea la care viteza corpului este de două ori mai mică decât cea inițială;
- 3 p.** **b** Peste cât timp are loc această micșorare a vitezei?

PROFIL UMANIST

1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p.** **a** Vectorul care unește poziția inițială și cea finală de pe traiectoria de mișcare a mobilului se numește _____ ;
- 1 p.** **b** Într-o mișcare uniform încetinită viteza corpului se _____ ;
- 1 p.** **c** Dacă într-o mișcare circulară mobilul parcurge distanțe egale în intervale egale de timp, atunci această mișcare este _____ .

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

1 p.	Viteza	1/s
1 p.	Accelerația centripetă	s
1 p.	Frecvența de rotație	m/s
		m/s ²

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- | | | | |
|-------------|----------|----------|--|
| 1 p. | A | F | a În cazul mișcării rectilinii uniforme, distanța parcursă de un mobil este de atâtea ori mai mare de câte ori durata mișcării este mai mare. |
| 1 p. | A | F | b Un corp care se deplasează într-o direcție considerată pozitivă are accelerație negativă în cazul când viteza lui rămâne constantă. |
| 1 p. | A | F | c Accelerația centripetă a unui punct al corpului rigid în mișcare de rotație este invers proporțională cu distanța de la punct până la axa de rotație. |

4 **2 p.** O elevă parcurge distanța de 2,16 km în 20 min. Determinați viteza medie de mișcare a elevei.

5 **2 p.** Viteza liniară a punctelor de pe marginea unui disc cu raza de 40 cm este egală cu 1,6 m/s. Care este viteza unghiulară a acestui disc?

6 În timp de 30 de secunde un automobil, mișcându-se uniform accelerat, și-a mărit viteza de la 18 km/h până la 72 km/h. Calculați:

- 2 p.** **a** accelerația automobilului;
- 2 p.** **b** distanța parcursă de automobil în această mișcare.

7 Doi sportivi, aflați la o distanță de 90 m, încep să se miște unul în întâmpinarea celuilalt în același moment de timp. Primul sportiv pornește cu o viteză de 2 m/s și își mărește viteza având o accelerație de 1 m/s². Al doilea sportiv pornește în direcția opusă cu viteza de 4 m/s și își mărește viteza mișcându-se cu accelerația de 2 m/s².

- 4 p.** **a** Scrieți ecuația vitezei și cea a mișcării pentru fiecare sportiv în unul și același sistem de coordonate.
- 3 p.** **b** După cât timp se întâlnesc sportivii?
- 2 p.** **c** Care este distanța de la locul întâlnirii până la originea sistemului de coordonate?
- 2 p.** **d** Care este viteza fiecărui sportiv la momentul întâlnirii?

Mișcarea corpurilor pe traiectorii parabolice

O formă de mișcare curbilinie o constituie și mișcarea punctului material lansat sub un unghi față de orizontală. Admitem că punctul material este lansat de la suprafața Pământului cu viteza $\vec{v}_0$, care formează un unghi α cu orizontala. Luăm sistemul de coordonate cu originea O în locul de lansare, cu axa Ox orizontală și cu axa Oy verticală, astfel încât viteza inițială $\vec{v}_0$ să se afle în planul de coordonate xOy (fig. 1.46).

Accelerația corpului este egală cu accelerația gravitațională $\vec{g}$, orientată vertical în jos. Astfel, proiecțiile accelerației corpului pe axele de coordonate sunt

$$a_x = 0, a_y = -g. \quad (1.53)$$

Pentru a analiza mișcarea corpului în planul xOy după lansare, vom descompune această mișcare în două mișcări componente de-a lungul celor două axe de coordonate, Ox și Oy (fig. 1.46).

Prima relație (1.53) arată că mișcarea corpului în direcția axei Ox este o mișcare uniformă. Viteza corpului v_x în această direcție rămâne constantă și egală cu viteza sa inițială $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ (fig. 1.46).

La momentul inițial coordonata $x_0 = 0$, deci pentru coordonata x a mobilului putem scrie în acord cu formula (1.21) pentru mișcarea rectilinie uniformă:

$x = v_x t = v_0 t \cos \alpha$.
Mișcarea în direcția axei Oy este o mișcare a corpului lansat vertical în sus din origine cu viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ (fig. 1.46). Substituind această valoare în formulele (1.39) și (1.40), obținem

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \alpha - gt, \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Astfel, în cazul unui corp lansat din originea coordonatelor cu viteza $\vec{v}_0$, care formează un unghi α cu orizontala, avem expresiile următoare:

1) pentru proiecțiile vitezei:

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad (1.54)$$

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt; \quad (1.55)$$

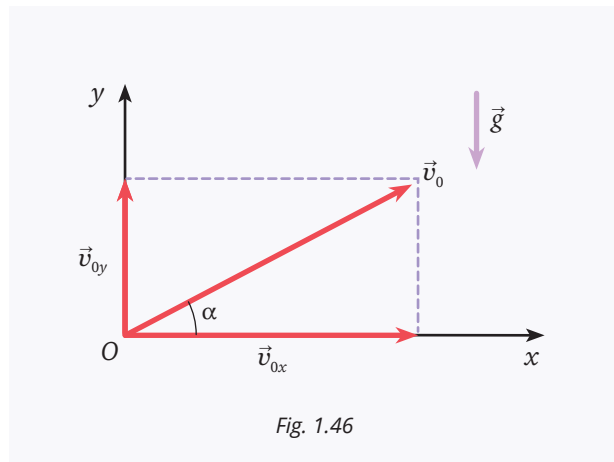


Fig. 1.46

2) pentru coordonate:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (1.56)$$

$$y = v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.57)$$

În primul rând, stabilim forma traiectoriei corpului. Pentru a obține ecuația ei, eliminăm timpul din ecuațiile (1.56) și (1.57). Avem $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$, apoi

$$y = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (1.58)$$

Aceasta este ecuația unei parabole având ramurile orientate în jos (coeficientul de pe lângă x^2 este negativ). Punctele de intersecție ale parabolei cu axa Ox (fig. 1.47) se determină din condiția $y = 0$. Obținem două valori: $x_1 = 0$ și $x_2 = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$. Prima valoare indică faptul că lansarea corpului are loc din originea coordonatelor prin care trece parabola. A doua valoare exprimă distanța parcursă de mobil pe orizontală până la căderea pe Pământ (fig. 1.47), numită bătaie:

$$L = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (1.59)$$

Această expresie arată că la viteza dată v_0 bătaia maximă este atinsă atunci când unghiul $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (deci $\sin 2\alpha = 1$). Avem $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

Un alt punct caracteristic al parabolei este vârful ei. După cum se vede din *figura 1.47*, coordonata y_m a acestui punct este înălțimea maximă $H_{\max}$ atinsă de corp, iar coordonata x_m este distanța pe orizontală a acestui punct de la locul de lansare. Valorile acestor coordonate pot fi calculate în baza condiției că la înălțimea maximă viteza corpului pe verticală v_y este nulă, $v_y = 0$, condiție folosită și la determinarea înălțimii maxime a corpului lansat vertical în sus. Substituind $v_y = 0$ în (1.55), obținem timpul de urcare:

$$t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1.60)$$

apoi din (1.57) înălțimea maximă:

$$H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (1.61)$$

Pentru coordonata x_m , folosind (1.56) și (1.60), avem $x_m = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{L}{2}$, ceea ce arată că parabola este simetrică față de dreapta $x = x_m$.

Timpul total de zbor t_t se obține din expresia (1.57) în care substituim coordonata punctului de cădere $y = 0$:

$$t_t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}, \quad (1.62)$$

adică timpul total de zbor este de două ori mai mare decât timpul de urcare (1.60).

Substituind timpul (1.62) în expresia (1.56) a coordonatei x , obținem pentru bătaie expresia (1.59).

Expresiile (1.54) și (1.55) permit determinarea modulului vitezei corpului la orice moment de timp:

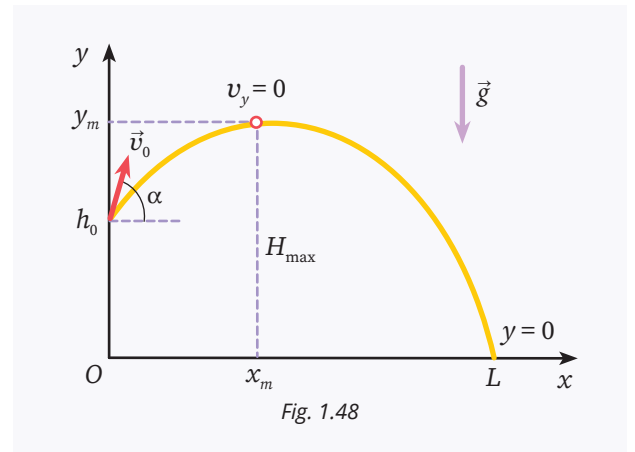
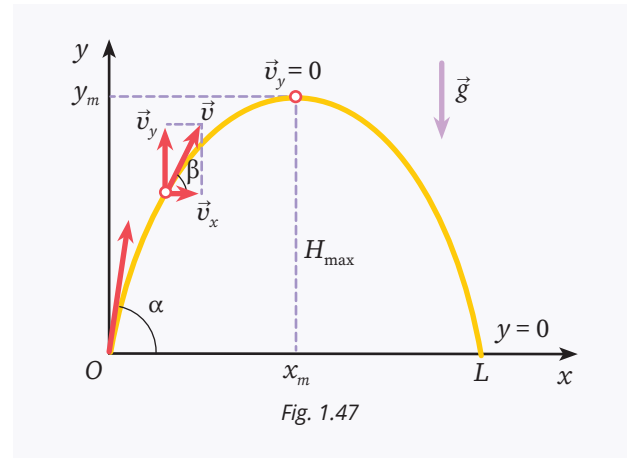
$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \\ &= \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \end{aligned} \quad (1.63)$$

și a unghiului β format de viteză cu orizontala. După cum se vede din *figura 1.47*:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - gt}{v_0 \cos \alpha}. \quad (1.64)$$

Ținând seama de expresia (1.60) pentru timpul de urcare t_u , observăm că $\operatorname{tg} \beta > 0$ pentru $t < t_u$ și $\operatorname{tg} \beta < 0$ pentru $t > t_u$. Aceasta reiese și din forma traiectoriei (*fig. 1.47*), dacă luăm în considerare faptul că viteza momentană este tangentă la traiectorie.

Considerăm un caz mai general: un corp este lansat de la o anumită înălțime h_0 cu viteza care formează



un unghi α cu orizontala (*fig. 1.48*). Unica modificare față de cazul precedent se produce în expresia (1.57) pentru coordonata y , care ia forma

$$y = h_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.65)$$

Să examinăm un caz particular: lansarea orizontală a corpului de la înălțimea h_0 deasupra Pământului. Unghiul $\alpha = 0$, iar formulele (1.54)–(1.56) și (1.65) iau forma

$$v_x = v_0, \quad v_y = -gt, \quad (1.66)$$

$$x = v_0 t, \quad y = h_0 - \frac{gt^2}{2}. \quad (1.67)$$

Aceste expresii permit calcularea tuturor mărimilor ce se referă la corpul lansat orizontal.

Din analiza cazurilor de mișcare, studiate mai sus, conchidem că mișcarea corpului cu accelerație constantă ($\vec{a} = \text{const.}$) este, în genere, o mișcare pe traiectorie parabolică. Doar în cazul particular, când viteza inițială $\vec{v}$ este coliniară cu accelerația constantă $\vec{a}$, mișcarea corpului este rectilie uniform variată.

- 1 Obțineți expresia (1.61) pentru înălțimea maximă de zbor H_{max} , pornind de la ecuația traiectoriei (1.58).
- 2 Pentru ce valoare a unghiului de lansare a unui corp distanța parcursă de acesta pe orizontală până la căderea pe Pământ (bătaia) ia cea mai mare valoare posibilă la viteza dată?
- 3 Considerați două corpuri lansate de la suprafața Pământului cu viteze inițiale egale în mod $\ulcorner$, dar sub unghiuri diferite: $\alpha_1 = \alpha$ și $\alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \alpha$, unde $\alpha < 45^\circ$. Cum sunt bățile acestor corpuri? Dar înălțimile maxime? Prin ce se deosebesc traiectoriile lor?
- 4 Putem afirma că mișcarea cu accelerație constantă ($\vec{a} = \text{const.}$) este totdeauna o mișcare rectilie uniform accelerată? Argumentați răspunsul.
- 5 Bătaia unui corp lansat cu viteza orizontală $v_0 = 20 \text{ m/s}$ este egală cu înălțimea de la care a fost lansat. Determinați această înălțime.
- 6 Un corp este lansat dintr-un turn cu viteza orizontală $v_0 = 12 \text{ m/s}$. Știind că viteza corpului la momentul atingerii solului formează un unghi $\beta = 30^\circ$ cu verticala, determinați:
 - a modulul vitezei corpului atunci când atinge solul;
 - b intervalul de timp în care corpul a ajuns la sol;
 - c înălțimea turnului de unde a fost lansat corpul;
 - d distanța de la baza turnului până la locul unde corpul a atins solul.
- 7 Cu ce viteză minimă trebuie aruncat oblic un corp pentru ca bătaia maximă a lui să fie $L = 40 \text{ m}$?
- 8 Un corp este lansat cu viteza inițială de 10 m/s sub un astfel de unghi față de orizont încât distanța orizontală de zbor este de 3 ori mai mare decât înălțimea maximă atinsă în timpul zborului. Determinați viteza corpului la această înălțime. Rezistența aerului se neglijează.
- 9 Un corp este aruncat sub un unghi $\alpha = 45^\circ$ față de orizont cu o viteză inițială $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Neglijând rezistența aerului, determinați:
 - a proiecțiile orizontală și verticală ale vectorului vitezei corpului la momentul inițial, precum și valoarea vitezei în funcție de timp;
 - b dependența de timp a unghiului dintre vectorul vitezei și orizont;
 - c coordonatele corpului x și y în funcție de timp;
 - d ecuația traiectoriei corpului;
 - e înălțimea maximă atinsă de corp, distanța de zbor pe orizontală și timpul total de zbor.
- 10 **ING** Dintr-o aeronavă folosită în agricultură care zboară orizontal cu viteza de 180 km/h la înălțimea de $H = 150 \text{ m}$ este eliberat un corp. La ce înălțime h viteza corpului va fi orientată sub un unghi de 30° față de orizont? Rezistența aerului se neglijează.
- 11 În sala sportivă un elev lovește o minge imprimându-i o viteză de 20 m/s sub un unghi de 60° . Mingea se lovește de podul sălii și cade pe podea. La ce distanță de la locul lovirii mingii ea atinge podeaua? Înălțimea sălii sportive este de 10 m . Rezistența aerului se neglijează.
- 12 Un copil aruncă o minge cu viteza $v_0 = 20 \text{ m/s}$, care formează un unghi $\alpha = 60^\circ$ cu orizontala. Știind că după $t = 2 \text{ s}$ mingea lovește un perete vertical, determinați înălțimea la care se află locul unde mingea a lovit peretele, viteza ei la momentul lovirii și unghiul format de ea cu orizontala.
- 13 Un corp este aruncat de la înălțimea $h_0 = 15 \text{ m}$ cu viteza $v_0 = 40 \text{ m/s}$, care formează un unghi $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala. Să se determine:
 - a înălțimea maximă la care urcă corpul;
 - b intervalul de timp în care corpul ajunge la sol;
 - c distanța parcursă de corp pe orizontală până la locul unde el a atins Pământul.
- 14 **ING** Dintr-un furtun aflat la suprafața Pământului iese un jet de apă sub un unghi de 30° față de orizontală. Viteza de ieșire a apei din furtun este de 20 m/s . Densitatea apei $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$. Determinați:
 - a distanța la care ajunge jetul de apă și înălțimea maximă la care acesta se ridică;
 - b masa de apă aflată în jetul din aer, dacă aria secțiunii transversale a furtunului este de 5 cm^2 .

În problemele 5–14 se va lua $g = 10 \text{ m/s}^2$.



DINAMICA

În cadrul cinematicii, la descrierea mișcării corpului, s-a menționat că sistemul de referință se alege în funcție de preferință și poate fi legat cu orice alt corp. Astfel, din punctul de vedere al cinematicii, toate sistemele de referință sunt echivalente.

2.1

Principiul inerției. Sisteme de referință inerțiale

Din punctul de vedere al dinamicii, răspunsul la întrebările: „De ce corpul dat se mișcă anume în acest mod, și nu în altul?” și „Există sisteme de referință preferențiale sau toate sistemele sunt echivalente?” este diferit. Răspunsul la ultima întrebare a fost obținut pentru prima dată de către Galilei în urma analizei unor observații și experimente. Examinăm unele dintre ele.

Experiment

Analizăm mișcarea unei bile metalice pe o masă (fig. 2.1), suprafața acesteia fiind acoperită cu diferite materiale. Comunicând bilei de fiecare dată una și aceeași viteză, măsurăm distanța parcursă de aceasta până la oprire. În prima situație, pe masă se așterne o țesătură de lână. Se observă că după parcurgerea unei anumite distanțe bila se oprește. Dacă însă masa este acoperită cu o

bucată de carton, distanța parcursă de bilă este mai mare. Distanța parcursă de bilă va fi și mai mare dacă masa este acoperită cu sticlă.

Constatăm că distanța parcursă de bilă depinde de proprietățile corpului pe care ea se mișcă, de calitățile suprafeței acestuia. Bila este oprită din mișcarea sa de corpul pe care se deplasează, precum și de aerul înconjurător. Cu cât suprafața este mai netedă, cu atât frânarea mișcării este mai mică, bila aflându-se în mișcare mai mult timp și parcurgând o distanță mai mare.



Fig. 2.1

Galilei a ajuns la concluzia: **un corp nu se va opri niciodată din mișcarea sa rectilinie și uniformă, dacă aceasta nu va fi restricționată de alte corpuri.**

Experiment

Să examinăm în continuare un alt experiment. Un cărucior încărcat se află în repaus pe o suprafață orizontală. Observăm că el continuă să se afle în repaus atâta timp cât alte corpuri nu acționează asupra lui (fig. 2.2, a). Pentru a-l pune în mișcare, adică a-l scoate din starea de repaus, este necesară o acțiune din exterior (fig. 2.2, b). Dacă însă căruciorul se mișcă, atunci pentru a-l opri este, de asemenea, necesară o anumită acțiune din exterior (fig. 2.2, c).

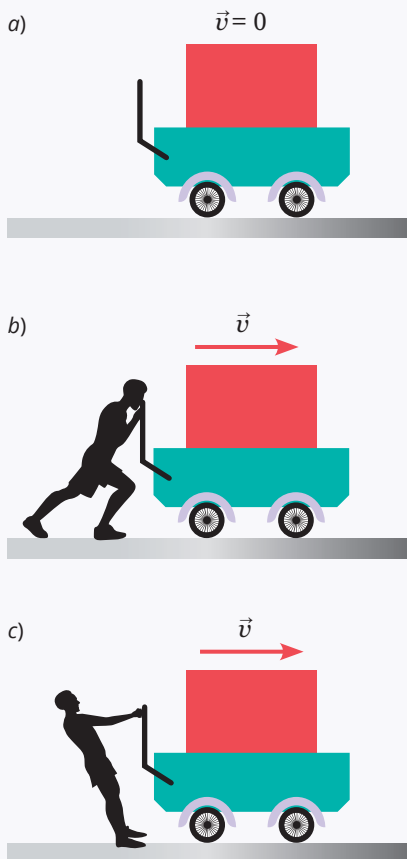


Fig. 2.2

În baza acestor experimente și a multor altele de acest gen, se poate menționa o proprietate importantă a corpurilor de a-și păstra starea de mișcare rectilinie uniformă sau de repaus atâta timp cât alte corpuri nu le impun să și-o modifice. Această proprietate se numește **inerție**.

Inerția se manifestă în cazul corpurilor libere, care nu sunt acționate de alte corpuri din exterior. În experimentele descrise bila sau căruciorul mai sunt acționate de Pământ și de corpul pe a cărui suprafață se află. Însă aceste acțiuni nu influențează starea de mișcare a corpurilor cercetate, de aceea se spune că ele **se compensează** sau **se echilibrează**.

Pentru a ne convinge de existența compensării acțiunii corpurilor, să analizăm experimentul următor (fig. 2.3).

Experiment

O bilă se află în repaus (fig. 2.3, a) sub acțiunea Pământului și a firului de care este suspendată. La tăierea firului (fig. 2.3, b), acțiunea acestuia este înlăturată, compensarea acțiunilor – dezechilibrată, bila cade pe pământ, deci este scoasă din starea de repaus de acțiunea necompensată din partea Pământului.

Rezumând cele expuse mai sus, ajungem la concluzia formulată pentru prima dată de către Galilei și preluată de către Newton în sistemul său de principii ale mecanicii, ca **principiul întâi** sau **principiul inerției**:

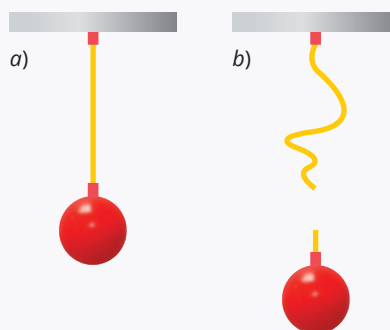


Fig. 2.3

Orice corp continuă să-și păstreze starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atâta timp cât alte corpuri nu acționează asupra lui și nu-l impun să-și modifice această stare.

Experimentele descrise au fost efectuate și analizate în sistemul de referință legat cu Pământul, deci principiul formulat mai sus este valabil în acest sistem. Putem constata însă că există sisteme de referință în care principiul inerției nu este valabil. De exemplu, un observator se află pe un disc rotitor. El vede pomii și casele din preajmă rotindu-se în jurul său fără ca asupra acestora să acționeze unele corpuri în plan orizontal.

Sistemele de referință în care este valabil principiul inerției au fost numite *sisteme de referință inerțiale*, iar cele în care acest principiu nu este valabil sunt numite *neinerțiale*.

Pentru a stabili dacă sistemul de referință considerat este inerțial sau nu, trebuie să se verifice experimental dacă principiul inerției se respectă sau nu față de acest sistem.

În conformitate cu principiul inerției, starea de mișcare rectilinie uniformă a corpurilor este starea normală a lor (despre astfel de corpuri se spune că se mișcă în virtutea inerției). Ele nu pot să se afle decât în mișcare continuă. Corpurile care se află în repaus față de Pământ se rotesc odată cu acesta în jurul axei lui, se rotesc împreună cu Pământul în jurul Soarelui, iar împreună cu acesta se mișcă în Univers.

În jurul nostru observăm frecvent că mișcarea corpurilor, cu timpul, încetează și ele se opresc. Aceasta însă nu contravine principiului inerției – mișcarea corpurilor încetează în urma acțiunii altor corpuri din jur, care le impun corpurilor în mișcare să-și micșoreze treptat viteza, până la oprire.

Analizează și aplică!

- ▶ În partea de jos a bilei din *figura 2.3*, a legați un fir care atârână pe aceeași verticală cu firul din partea de sus. Trageți de firul care atârână o dată lent, iar altă dată rapid. Ce observați? Explicați.
- ▶ De ce înainte de a folosi termometrul medical, de obicei, îl scuturați? Explicați fenomenul.
- ▶ O elevă se află într-un autobuz cu draperiile trase. Alături de el pe culoarul dintre scaune se află o minge în stare de repaus. La un moment eleva observă că mingea începe brusc să se rostogolească spre partea din față a autobuzului. Ce concluzii poate face eleva despre mișcarea autobuzului în baza acestei observații?

AUTOEVALUARE

- 1 Explicați prin ce se manifestă proprietatea de inerție a corpurilor? Aduceți exemple diferite de cele expuse în manual.
- 2 Definiți principiul inerției.
- 3 Care sisteme de referință sunt inerțiale?
- 4 Explicați cum se stabilește dacă un sistem de referință este inerțial.
- 5 Realizați experimentul următor. Confectionați câteva inele identice din hârtie și o vergea subțire din lemn. Luați două suporturi și montați sistemul mecanic reprezentat în *figura 2.4*. Cu o vergea metalică apăsați ușor pe mijlocul vergelei de lemn, apoi apăsați din ce în ce mai puternic. La un moment dat observați că unul dintre inelele de hârtie se rupe. Înlocuiți acest inel cu unul întreg și continuați experimentul. De această dată însă loviți brusc vergeaua de lemn cu cea metalică. Observați că în acest caz vergeaua de lemn se frânge, iar inelele de hârtie rămân întregi. Cum explicați acest fenomen?

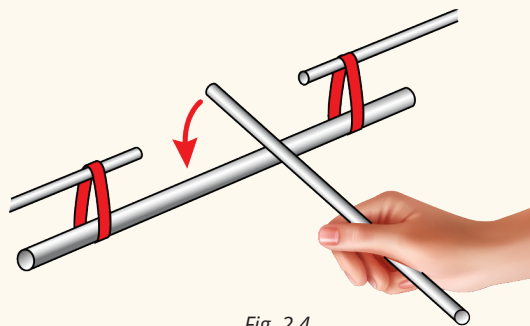


Fig. 2.4

Masa și forța. Principiul fundamental al dinamicii

a Masa

Experiment

Să observăm două cărucioare care se pot mișca pe o porțiune rectilinie de drum neted. Fiecare cărucior are fixat pe el o bară magnetică de-a lungul direcției de mișcare și este dotat cu un accelerometru – aparat pentru determinarea accelerației cu care se mișcă căruciorul (accelerometrele se folosesc, îndeosebi, la vehiculele aeriene). Apropiem cărucioarele cu polii de același nume unul de altul (fig. 2.5, a). La un moment eliberăm cărucioarele: ele se resping și se îndepărtează unul de altul. Înregistrăm accelerațiile lor: la un moment (la o anumită distanță dintre ele) accelerațiile cărucioarelor sunt a_1 și a_2 , iar la un moment ulterior (la o distanță mai mare) valorile accelerațiilor sunt a'_1 și a'_2 . Constatăm că $a'_1 < a_1$ și $a'_2 < a_2$. Calculând rapoartele accelerațiilor, obținem $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a'_2}{a'_1}$.

Repetăm experimentul așezând cărucioarele cu polii de nume diferite unul spre altul (fig. 2.5, b). După eliberare, în urma atracției magnetice, cărucioarele se apropie unul de altul. La un anumit moment accelerațiile lor sunt egale cu a''_1 și a''_2 , iar la un moment ulterior (la o distanță mai mică) valorile accelerațiilor sunt a'''_1 și a'''_2 . Constatăm că $a'''_1 > a''_1$ și $a'''_2 > a''_2$, iar rapoartele sunt egale: $\frac{a''_2}{a''_1} = \frac{a'''_2}{a'''_1}$.

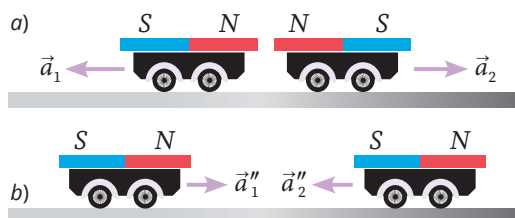


Fig. 2.5

Astfel, efectuând experimente de acest gen, observăm că de fiecare dată când accelerația unui cărucior ia o valoare mai mare (mai mică), accelerația celui de-al doilea de asemenea ia o valoare mai mare (mai mică), adică accelerațiile cărucioarelor se măresc sau se micșorează simultan.

Făcând rapoartele accelerațiilor obținute de fiecare dată de către cărucioare, vom obține o legitate:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a'_2}{a'_1} = \frac{a''_2}{a''_1} = \dots, \quad (2.1)$$

adică raportul accelerațiilor a două corpuri ce interacționează ia o valoare constantă, independentă de caracterul interacțiunii lor.

Despre corpul care în urma interacțiunii a obținut o accelerație mai mică, adică se opune mai mult variației vitezei sale, se spune că este mai inert decât celălalt corp. Pentru a caracteriza această proprietate a corpurilor de a se opune variației vitezei lor, se folosește o mărime fizică scalară numită **masă**.

Dacă notăm masele corpurilor ce interacționează între ele cu m_1 și m_2 , definim raportul lor prin relația

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \quad (2.2)$$

Raportul maselor a două corpuri este egal cu raportul invers al accelerațiilor obținute de aceste corpuri ca rezultat al interacțiunii dintre ele.

Astfel, în urma experimentului descris și în baza relației (2.2), pot fi determinate rapoartele dintre masele diferitelor corpuri.

Este bine să știți

Pentru a determina masa fiecărui corp în parte, este necesar să se considere un anumit corp drept etalon de masă, iar masa acestui etalon să fie luată în calitate de unitate de masă. Un astfel de etalon de masă prezintă un cilindru cu diametrul și înălțimea egale cu 39 mm confecționat dintr-un aliaj special de platină (90%) și iridiu (10%). Masa acestui etalon este considerată în calitate de unitate, numită **kilogram** (kg), și reprezintă una dintre unitățile fundamentale ale SI. Trebuie însă de menționat că din 2019 etalonul masei a fost redefinit: kilogramul este masa unui corp în repaus a cărei energie echivalentă este egală cu energia unui număr de fotoni ale căror frecvențe se însumează conform constantei lui Planck.

Dacă determinăm accelerația a a unui corp oarecare și accelerația a_{et} a etalonului de masă, accelerații obținute în urma interacțiunii dintre ele, iar cu m și m_{et} notăm masele respective, atunci în conformitate cu relația (2.2) avem $\frac{m}{m_{et}} = \frac{a_{et}}{a}$.

Prin urmare, masa corpului

$$m = \frac{a_{et}}{a} \cdot m_{et}. \quad (2.3)$$

Cercetând interacțiunea acestui corp (de masă deja cunoscută) cu altul și determinând accelerațiile lor, putem afla masa celui de-al doilea corp etc.

Metoda descrisă de determinare a masei corpurilor nu este unică. În cazul corpurilor macroscopice, cel mai frecvent este folosită cântărirea corpurilor care are la bază compararea maselor după acțiunea produsă de Pământ asupra corpurilor în cauză. Masele particulelor microscopice – molecule, atomi, electroni ș.a. – se determină prin metode specifice.

Este bine să știți

Masa corpului este caracterizată de două proprietăți importante:

1. Corpul format din corpurile de mase egale, respectiv, cu $m_1, m_2, \dots, m_n$ se comportă asemenea unui corp de masă egală cu suma maselor corpurilor componente:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n. \quad (2.4)$$

Această proprietate a masei se numește **aditivitate** (în lat. *additivus* „obținut prin adunare”).

2. În mecanică masa corpului este considerată o mărime constantă, independentă de sistemul de referință ales pentru descrierea mișcării lui. În 1905 s-a stabilit că această proprietate se manifestă numai la viteze ale corpurilor mult mai mici decât viteza luminii în vid care este $c = 300\,000\text{ km/s}$.

b Forță

În urma interacțiunii dintre corpuri, acestea capătă accelerații. Prin urmare, dacă un corp se mișcă cu accelerație, aceasta este determinată de acțiunea unui alt corp (sau de alte corpuri) asupra lui. Diferențele dintre valorile accelerației indică faptul că acțiunile respective pot fi diferite.

Mărimea fizică ce caracterizează cantitativ acțiunea unui corp asupra altuia se numește forță (se notează, de obicei, cu $\vec{F}$). Forța este determinată de punctul ei de aplicare (de corpul asupra căruia ea acționează), de modul, direcție și sens, deci este o mărime vectorială. Dreapta pe care este situat vectorul forței se numește *dreaptă-suport*.

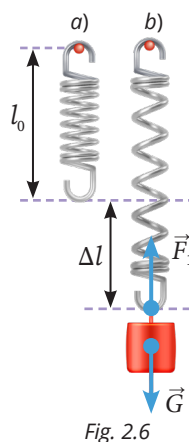
Unitatea de forță în SI este newtonul (N), care va fi definit ulterior.

În apropierea Pământului toate corpurile lăsate liber cad spre el cu una și aceeași accelerație gravitațională g (vezi paragraful 1.7, e). Ea este imprimată corpului de către Pământ, manifestând acțiunea Pământului asupra corpului liber. Accelerația gravitațională este orientată vertical în jos, adică forța care o imprimă este orientată în acest fel.

Forța ce acționează asupra corpului aflat în vecinătatea Pământului din partea acestuia și-i imprimă accelerația gravitațională se numește forță de greutate (se notează cu $\vec{G}$).

Exemplu

Un resort are capătul superior fixat, iar cel inferior are un inel de care pot fi suspendate corpuri cu cârlige (fig. 2.6, a). Notăm cu l_0 lungimea acestui resort în stare nedeformată. La suspendarea de resort a unui corp cu cârlige, lungimea resortului crește cu Δl (fig. 2.6, b). Corpul suspendat se află în repaus, deci acțiunea Pământului asupra lui este echilibrată de acțiunea resortului deformat. Astfel, acțiunea corpurilor poate provoca deformarea altor corpuri.



Asupra corpului suspendat acționează forța de greutate $\vec{G}$ a Pământului, iar din partea resortului deformat – o forță $\vec{F}$ orientată vertical în sus, numită **forță elastică**. Forța elastică echilibrează forța de greutate, suma lor fiind nulă $\vec{F} + \vec{G} = 0$. Aceste două forțe au module egale, aceeași dreaptă-suport și sen-

suri opuse. Punctele de aplicație a forțelor ce acționează asupra corpului, de fapt, sunt diferite, însă aproximarea utilizată în mecanică, conform căreia corpurile pot fi considerate puncte materiale, ne permite să reprezentăm toate forțele având un punct comun de aplicație.

Prin urmare, resortul elastic poate fi utilizat la compararea valorilor forțelor. El este partea principală a dinamometrului (fig. 2.7) – dispozitiv folosit la măsurarea forțelor. Pe scara dinamometrului sunt indicate în newtoni valorile forțelor ce provoacă alungirile respective ale resortului.

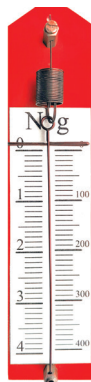


Fig. 2.7

Rezumând cele expuse mai sus, constatăm că forța este o mărime fizică vectorială caracterizată de punctul de aplicație, de modül, direcție și sens. Acționând asupra corpului, forța îi imprimă accelerație sau îl deformează. Forța este determinată de două corpuri: de corpul asupra căruia ea acționează și de corpul ce acționează cu această forță.

C Principiul fundamental al dinamicii

Experiment

Cercetăm mișcarea unui cărucior pe o masă orizontală, netedă și lungă, la capătul căreia este fixat un scripete. Pe cărucior se află câteva corpuri identice cu cârlige. De cărucior este legat un fir trecut peste scripete. Suspendăm unul dintre corpurile de pe cărucior de capătul liber al firului (fig. 2.8, a). Ca rezultat, sub acțiunea forței de greutate G a unui corp suspendat căruciorul începe o mișcare uniform accelerată cu o accelerație $\vec{a}_1$.

Luăm un corp de pe cărucior și-l alăturăm corpului suspendat (fig. 2.8, b). Masa corpurilor aflate în mișcare a rămas aceeași, iar forța de greutate ce le imprimă accelerație s-a dublat, a devenit egală cu $2G$. Se constată că s-a dublat și accelerația corpurilor: $a_2 = 2a_1$. Prin urmare, accelerația sistemului de corpuri de masă constantă este direct proporțională cu forța care imprimă această accelerație:

$$a \sim F \text{ (pentru } m = \text{const.)}.$$

Pentru a studia dependența accelerației de masa corpului (la forța dată), alăturăm la căruciorul de pe masă un cărucior identic cu el, ce are două corpuri identice cu cele de pe primul. Astfel, masa sistemului de corpuri s-a dublat.

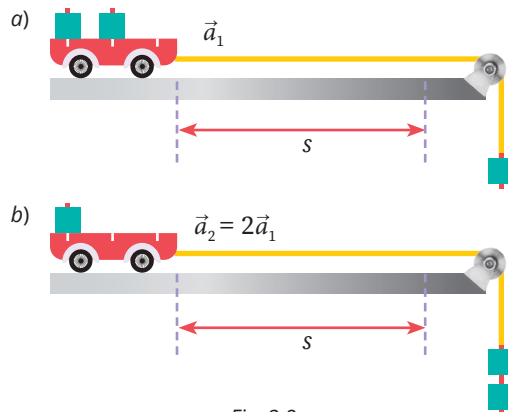


Fig. 2.8

Efectuând experimentul cu un corp suspendat, se obține o accelerație egală cu $\frac{a_1}{m}$, iar în cazul a două corpuri suspendate – o accelerație egală cu $\frac{a_2}{m}$ etc. Prin urmare, una și aceeași forță imprimă sistemului de corpuri cu masa de două ori mai mare o accelerație de două ori mai mică, adică accelerația este invers proporțională cu masa

$$a \sim \frac{1}{m} \text{ (pentru } F = \text{const.)}.$$

Din rezultatele de mai sus obținem

$$a \sim \frac{F}{m} \text{ sau } ma \sim F.$$

Trecând la egalitate, trebuie să introducem un coeficient de proporționalitate care depinde de unitățile alese. În SI acest coeficient se consideră egal cu unitatea; prin urmare, relația obținută ia forma

$$ma = F. \quad (2.5)$$

Forța și accelerația sunt mărimi vectoriale, au aceeași direcție și sens, deci relația (2.5) poate fi scrisă sub formă vectorială:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.6)$$

Produsul dintre masa corpului și accelerația lui este egal cu forța care imprimă corpului această accelerație.

Formularea dată exprimă principiul fundamental al dinamicii, numit și **principiul al doilea al dinamicii**. În baza relației (2.6) poate fi determinată forța care acționează asupra corpului, dacă este cunoscută mișcarea lui și invers, cunoscând forța, se poate determina accelerația corpului, prin urmare, și caracterul mișcării lui.

Substituind în relația (2.5) masa corpului $m = 1 \text{ kg}$ și accelerația $a = 1 \text{ m/s}^2$, obținem unitatea de forță în sistemul internațional de unități – **newtonul (N)**:

$$[F] = [m] \cdot [a] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}.$$

Newtonul este forța care imprimă corpului cu masa de 1 kg o accelerație egală cu 1 m/s².

Experimentele care ilustrează principiul fundamental al dinamicii au fost realizate în sistemul de referință legat cu Pământul, care este un sistem inerțial. Deci principiul dat este aplicabil numai în sisteme inerțiale de referință.

Dacă substituim forța $\vec{F} = 0$ în relația (2.6), obținem accelerația $\vec{a} = 0$, deci viteza corpului $\vec{v} = \text{const.}$, adică mișcarea lui este rectilinie și uniformă. Astfel, în lipsa acțiunii din exterior ($\vec{F} = 0$), corpul se mișcă rectiliniu și uniform ($\vec{v} = \text{const.}$). S-ar părea că princi-

piul inerției constituie o consecință a principiului al doilea. Situația însă este alta: principiul fundamental este valabil numai în sisteme inerțiale, dar acestea pot fi identificate numai utilizând principiul inerției. Prin urmare, concluzia că în lipsa acțiunilor din exterior corpul se mișcă rectiliniu și uniform demonstrează că primul și al doilea principiu ale dinamicii nu se contrazic, ci se află în concordanță.

Relația (2.6) este stabilită pentru corpul asupra căruia acționează o singură forță. Cel mai frecvent însă corpurile sunt supuse acțiunii mai multor forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. În acest caz accelerația corpului este determinată de rezultanta sistemului de forțe $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ care acționează asupra corpului, adică

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_1}{m} + \frac{\vec{F}_2}{m} + \dots + \frac{\vec{F}_n}{m}.$$

Prin urmare,

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (2.7)$$

Produsul dintre masa și accelerația corpului este egal cu rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra lui și-i imprimă această accelerație.

Fizicieni celebri



Isaac NEWTON (1643–1727), savant englez

A obținut rezultate deosebite în mecanică, optică, astronomie și matematică.

Newton a generalizat cercetările predecesorilor săi și cele proprii în domeniul mecanicii și le-a expus în opera sa fundamentală „Principiile matematice ale filosofiei naturale” (1687), unde a enunțat pentru prima dată sistemul de trei principii (principiul inerției, principiul fundamental al dinamicii, principiul acțiunii și reacțiunii), care constituie temelia mecanicii, ulterior numită mecanică newtoniană sau clasică. În această lucrare a expus legea gravitației universale stabilită de el. În baza acestei legi și a principiilor mecanicii, a argumentat legile experimentale ale lui Kepler referitor la mișcarea planete-

telor, a explicat legitățile mișcării Lunii, fluxurile și refluxurile, a dezvoltat teoria privind forma Pământului. Newton a stabilit expresia pentru forța de rezistență care acționează asupra corpului la mișcarea lui în lichide și gaze. A elaborat bazele calculului diferențial și integral.

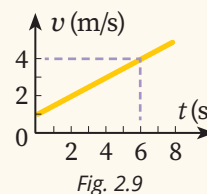
În 1666, folosind o prismă cu trei fețe, a cercetat fenomenul dispersiei luminii. A studiat fenomene optice precum, culorile peliculelor subțiri și a descoperit inelele de interferență (inelele lui Newton). A construit un telescop reflector cu un sistem optic original (telescopul lui Newton), în care una dintre lentile a fost înlocuită cu o oglindă sferică concavă. Rezultatele cercetărilor în acest domeniu au fost expuse în lucrarea sa „Optica” (1704).

Analizează și aplică!

- ▶ Ca rezultat al interacțiunii dintre două corpuri, accelerația primului corp este de trei ori mai mare decât accelerația corpului al doilea. Ce putem afirma referitor la masele acestor corpuri?
- ▶ Din expresia principiului fundamental al dinamicii exprimăm masa corpului: $m = \frac{F}{a}$. Se poate oare afirma pe baza acestei relații că masa corpului este direct proporțională cu forța ce acționează asupra lui? Justificați răspunsul.
- ▶ În ce condiții corpul se mișcă uniform accelerat? Argumentați răspunsul pornind de la principiul fundamental al dinamicii.
- ▶ Analizați dacă poate fi considerat principiul inerției o consecință a principiului fundamental al dinamicii. Argumentați răspunsul.

AUTOEVALUARE

- 1 Caracterizați raportul accelerațiilor a două corpuri obținute în urma interacțiunii dintre ele.
- 2 Ce proprietate a corpului este caracterizată de masa lui?
- 3 În ce mod se poate determina masa unui corp?
- 4 Explicați ce înțelegeți prin faptul că masa este o mărime aditivă.
- 5 Care este unitatea de forță în SI? Cum se definește ea?
- 6 **BIO** Un alergător care participă la o competiție de talie mondială pornește de pe blocurile de start cu o accelerație practic orizontală de $1,2 \text{ m/s}^2$.
 - a Ce forță orizontală trebuie să exercite alergătorul de 55 kg asupra blocurilor de start în timpul startului pentru a obține această accelerație?
 - b Cine exercită forța care propulsează alergătorul – blocurile de start sau alergătorul însuși?
- 7 La interacțiunea dintre corpurile A și B, accelerația corpului A este de 3 ori mai mare decât a corpului B. Accelerația obținută de corpul B în urma interacțiunii cu corpul C este de 2 ori mai mică decât cea a corpului C. Determinați masa corpului C, dacă $m_A = 0,4 \text{ kg}$.
- 8 Asupra unui corp acționează o forță al cărei modül este egal cu 42 N . Care este masa corpului, dacă accelerația ce-i este imprimată de această forță este egală cu 6 m/s^2 ?
- 9 O forță imprimă unui corp cu masa de $1,5 \text{ kg}$ o accelerație egală cu $0,3 \text{ m/s}^2$. Determinați masa corpului, căruia această forță îi imprimă o accelerație egală cu $0,4 \text{ m/s}^2$.
- 10 O forță de 15 N imprimă unui corp o accelerație egală cu $1,2 \text{ m/s}^2$. Ce accelerație imprimă acestui corp o forță egală cu 60 N ?
- 11 **ING** Un avion mic cu reacție are o masă de $50\,000 \text{ kg}$ și se află în repaus. Forța de tracțiune a motoarelor cu reacție ale avionului îl accelerează pe pistă și, parcurgând o distanță de $1\,000 \text{ m}$, acesta atinge viteza de decolare de 80 m/s și se ridică de la sol. Care este forța de tracțiune a motoarelor?
- 12 **ING** Un automobil se deplasează cu o accelerație de $6,0 \text{ m/s}^2$ atunci când în acesta se află doar șoferul. Masa totală a automobilului și a șoferului este de $3\,000 \text{ kg}$. Care este accelerația automobilului după ce în el au urcat patru pasageri cu bagajele lor, adăugând o masă suplimentară de 500 kg ?
- 13 **ING** Un camion se deplasează cu o accelerație de $10,0 \text{ m/s}^2$. Care va fi accelerația camionului dacă el trage un automobil a cărui masă constituie jumătate din cea a camionului?
- 14* Un corp se mișcă rectiliniu având viteza egală cu 4 m/s . La un moment dat, asupra corpului începe să acționeze, în direcția vitezei lui, o forță egală cu $0,8 \text{ N}$. Ca rezultat, viteza corpului crește până la 6 m/s în timp ce el parcurge o distanță de 15 m . Determinați masa corpului.
- 15* Rezultanta a două forțe reciproc perpendiculare este egală cu 10 N . Una dintre forțe este egală cu 6 N . Ce accelerație imprimă forța a doua unui corp cu masa de 4 kg ?
- 16* Graficul vitezei unui corp cu masa de $1,2 \text{ kg}$ este reprezentat în figura 2.9. Determinați forța care acționează asupra corpului.



Principiul acțiunii și reacțiunii

Se știe că la interacțiune corpurile acționează cu forțe unul asupra altuia. Există vreo relație între aceste forțe, iar dacă există, atunci care este ea?

Să pornim de la relația (2.2) dintre masele corpurilor și accelerațiile obținute de acestea în urma interacțiunii:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}, \text{ sau, } m_1 a_1 = m_2 a_2. \quad (2.8)$$

Din experimentul reprezentat în figura 2.5 se poate vedea că vectorii accelerațiilor $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ au sensuri opuse, de aceea, trecând de la relația scalară (2.8) la relația vectorială, avem

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2. \quad (2.9)$$

În conformitate cu principiul fundamental (2.6), produsul $m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{12}$ este forța care acționează asupra corpului 1 din partea corpului 2. Respectiv, $m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{21}$ este forța ce acționează asupra corpului 2 din partea corpului 1, prin urmare, relația (2.9) ia forma

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.10)$$

Aceasta este expresia matematică a principiului al treilea al dinamicii, numit și **principiul acțiunii și reacțiunii**.

Două corpuri acționează unul asupra altuia cu forțe egale în mod, situate pe aceeași dreaptă-suport și orientate în sensuri opuse.

Pentru a ilustra acest principiu, analizăm următorul exemplu.

Un corp de forma unui paralelipiped este așezat pe un burete aflat pe o masă (fig. 2.10). Asupra corpului acționează forța de greutate $\vec{G}$ datorită atracției exercitate de Pământ, corpul aflându-se în repaus. Asupra lui acționează vertical în sus o forță $\vec{F}_{cb}$ din

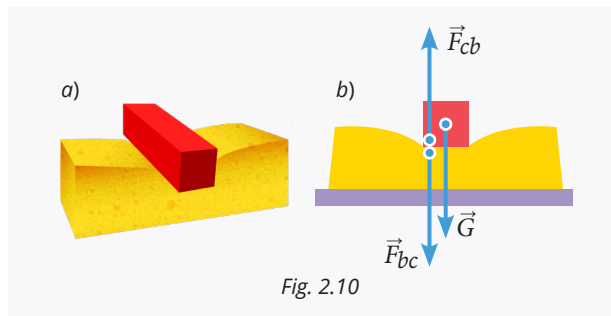


Fig. 2.10

partea buretelui, astfel încât $\vec{G} + \vec{F}_{cb} = 0$. Se observă că buretele este deformat, deci asupra lui acționează o forță $\vec{F}_{pc}$ exercitată de corpul așezat pe el. Aceste forțe, $\vec{F}_{cb}$ și $\vec{F}_{pc}$, satisfac relația (2.10), adică $\vec{F}_{cb} = -\vec{F}_{pc}$. Forța aplicată buretelui este numită, de obicei, **acțiune**, iar cea exercitată de burete asupra corpului a fost numită **reacțiune**.

În legătură cu acest principiu al dinamicii trebuie menționate următoarele:

- 1 Forțele de interacțiune dintre două corpuri au întotdeauna aceeași natură fizică: ambele forțe de acțiune și de reacțiune sunt condiționate de deformările corpurilor ce interacționează.
- 2 Forțele de interacțiune se aplică la corpuri diferite și, prin urmare, nu se pot echilibra între ele.
- 3 Forțele de interacțiune apar simultan.

Cele trei principii ale dinamicii formulate mai sus nu sunt independente, ci constituie un sistem integrat de principii interdependente. Justețea acestor principii este confirmată de faptul că rezultatele obținute pe baza lor pentru sisteme mecanice concrete corespund realității.

AUTOEVALUARE

- 1 Comentați situația în care un corp poate să acționeze asupra altuia, dar al doilea să nu acționeze asupra primului.
- 2 Se pot oare echilibra forțele de interacțiune dintre două corpuri? Argumentați răspunsul.
- 3 Un elev ține în mână un dinamometru și acționează asupra cârligelor lui, întinzând resortul, cu două forțe egale cu câte 25 N. Care este indicația dinamometrului?
- 4 Un fir se rupe dacă suspendăm de el un corp asupra căruia acționează o forță de greutate de cel puțin 15 N. Se va rupe firul întins, dacă se aplică simultan la capetele lui forțe a câte 10 N?

Atracția universală

a Legea atracției universale

Corpurile aflate în cădere liberă se mișcă accelerat. Din principiul doi al dinamicii rezultă că asupra lor acționează o forță oarecare din partea altui corp. Ce reprezintă această forță și care este natura ei? Întrucât toate corpurile din apropierea Pământului, indiferent de masa lor, au aceeași accelerație $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, se poate presupune că ea este determinată de Pământ și reprezintă o forță de atracție orientată spre centrul lui. Această forță a fost numită **forță de greutate**. Conform legii a doua a lui Newton, asupra unui corp de masă m aflat în cădere liberă acționează o forță de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$.

Conform unei legende, observând căderea unui măr, Newton și-a pus întrebarea: „Dacă mărul lăsat liber cade spre Pământ, atunci Luna, care este de asemenea liberă, nu va cădea și ea în direcția Pământului?” Astfel, Newton a ajuns la concluzia că asupra Lunii trebuie să acționeze o forță care este de aceeași natură cu forța de greutate ce acționează asupra mărului. Ea a fost numită **forță gravitațională**. Anume acțiunea ei impune „căderea” permanentă a Lunii în direcția Pământului prin abaterea mișcării de pe o traiectorie rectilinie pe una aproape circulară. Într-adevăr, dacă n-ar acționa forța gravitațională, atunci peste un interval mic de timp, mișcându-se rectiliniu cu viteza v , Luna ar ajunge în punctul A (fig. 2.11). Sub acțiunea ei însă, Luna „cade” până în punctul B, parcurgând distanța de cădere AB.

Pentru obținerea relației ce exprimă forța gravitațională, Newton a analizat acțiunea ei asupra corpurilor de la suprafața Pământului și asupra Lunii.

În baza rezultatelor obținute din această analiză, Newton a presupus că toate corpurile din Univers se atrag reciproc cu o anumită forță gravitațională care le imprimă o accelerație invers proporțională cu pătratul distanței r dintre ele:

$$a \sim \frac{1}{r^2}. \quad (2.11)$$

Conform principiului doi al dinamicii, $F \sim a$ și, luând în considerare (2.11), rezultă că $F \sim 1/r^2$. Se poate demonstra că această forță mai este proporțională și cu produsul dintre masele corpurilor ce interacționează.

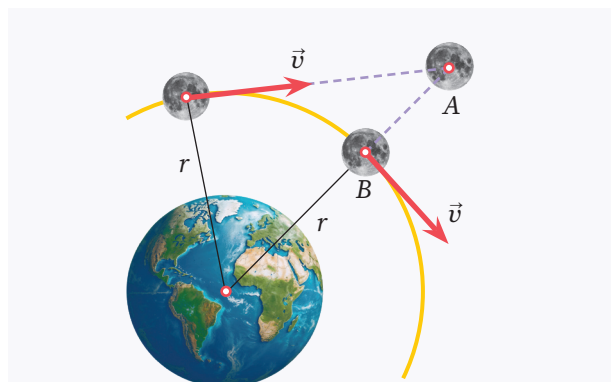


Fig. 2.11

Astfel, în anul 1687, Newton formulează **legea atracției universale**:

Forța gravitațională ce acționează între două corpuri punctiforme din Univers este direct proporțională cu produsul dintre masele lor, invers proporțională cu pătratul distanței dintre ele și este orientată de-a lungul dreptei ce unește centrele corpurilor.

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.12)$$

Interacțiunea gravitațională dintre corpuri reprezintă întotdeauna o pereche de forțe acțiune-reacțiune. Corpul de masă m_1 acționează asupra corpului având masa m_2 cu o forță $\vec{F}_{21}$ orientată de la corpul 2 spre corpul 1 (fig. 2.12). În același timp, corpul cu masa m_2 acționează asupra celui de masă m_1 cu forța $\vec{F}_{12}$ de sens opus cu $\vec{F}_{21}$, dar egale în modül.

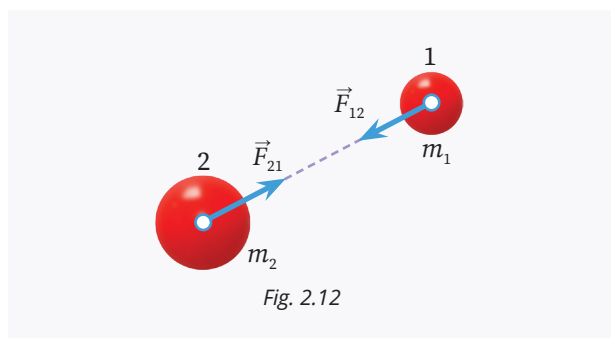


Fig. 2.12

Legea atracției universale a fost formulată pentru corpuri punctiforme, adică corpuri cu dimensiunile mult mai mici decât distanța dintre ele. Se poate însă demonstra că ea este valabilă și în cazul corpurilor sferice omogene, r fiind distanța dintre centrele lor.

Constanta K din (2.12) are una și aceeași valoare pentru oricare două corpuri din Univers și este numită **constantă gravitațională**. Ea este numeric egală cu forța de interacțiune, exprimată în newtoni, dintre două corpuri punctiforme cu masa de 1 kg fiecare și situate la distanța de 1 m unul față de celălalt. În SI unitatea ei este

$$[K] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} = \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}.$$

Este bine să știți

Valoarea numerică a constantei gravitaționale universale a fost determinată experimental pentru prima dată în anul 1798 de către fizicianul și chimistul englez *Henry Cavendish* (1731–1810).

$$K = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}.$$

Aceasta înseamnă că două corpuri cu masele de câte 1 kg, aflate la 1 m distanță unul față de altul, se atrag cu o forță de $6,67 \cdot 10^{-11}$ N.

Rezultatul obținut de Cavendish a fost confirmat de multe alte experimente. S-a constatat că valoarea constantei gravitaționale nu depinde nici de natura corpurilor, nici de proprietățile mediului în care ele se află și este întotdeauna aceeași.

b Câmpul gravitațional

Se știe că forța reprezintă acțiunea pe care o exercită un corp asupra altuia fie printr-un contact direct, fie prin intermediul unor legături materiale (tije, fire etc.). De exemplu, un fotbalist acționează cu o anumită forță asupra mingii numai în momentul loviturii, iar o macara ridică greutatea prin intermediul unui cablu. O situație diferită prezintă însă acțiunea forțelor gravitaționale ce se manifestă între corpurile aflate la distanță. Cum se transmite acțiunea în acest caz? Inițial a fost înaintată concepția conform căreia interacțiunea dintre corpuri se produce instantaneu, iar spațiul dintre

ele este un mediu nematerial care nu o influențează în niciun mod. Cu toate că această concepție presupune existența mișcării fără materie, ceea ce este absurd, ea a dominat în fizică mai mult de un secol și constituie esența așa-numitei teorii a acțiunii la distanță.

Ideea existenței unui mediu material prin intermediul căruia se realizează interacțiunea dintre corpurile aflate la distanță aparține lui Michael Faraday (1791–1867). În anii '30 ai secolului al XIX-lea, cercetând interacțiunea sarcinilor electrice, Faraday introduce noțiunea de câmp, care mai târziu a fost aplicată și la studiul interacțiunii gravitaționale. Conform acestei noțiuni, un corp oarecare nu acționează direct asupra altui corp, ci atribuie spațiului înconjurător proprietăți deosebite, transformându-l într-un mediu material, numit corp care realizează această acțiune.

Astfel, materia poate exista sub două forme distincte: de substanță și de câmp. Spre deosebire de substanță, câmpul nu poate fi sesizat cu organele de simț și despre existența lui se poate judeca numai după acțiunea exercitată asupra altor corpuri. Așadar, **câmpul gravitațional este o formă de existență a materiei**, prin intermediul căruia se exercită interacțiunea corpurilor în conformitate cu legea atracției universale.

Pentru descrierea cantitativă a acestui câmp, se introduce noțiunea de **intensitate a câmpului gravitațional**.

Mărimea fizică vectorială egală cu raportul dintre forța gravitațională ce acționează asupra unui corp și masa acestuia se numește intensitate a câmpului gravitațional.

$$\vec{I} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.13)$$

În SI intensitatea câmpului gravitațional se exprimă în N/kg.

Pentru determinarea intensității câmpului gravitațional $\vec{I}$ într-un punct arbitrar al spațiului, se măsoară forța $\vec{F}$ ce acționează asupra unui corp punctiform cu masa m , numit **corp de probă**. În cazul în care corpul generator de câmp este punctiform și are masa M din (2.12) și (2.13), pentru modulul intensității câmpului gravitațional obținem

$$I = K \frac{M}{r^2}, \quad (2.14)$$

de unde se observă că intensitatea câmpului nu depinde de masa corpului de probă, ci numai de masa M a corpului care generează câmpul și de pătratul distanței r de la acesta.

Forța gravitațională este orientată întotdeauna spre centrul corpului generator de câmp, de aceea câmpul gravitațional este numit **central** sau **radial**.

Să analizăm mai detaliat câmpul gravitațional al Pământului considerând un corp de probă cu masa m situat la suprafața lui. Egalând forța de greutate $G = mg$ ce acționează asupra corpului de probă cu forța gravitațională F din legea atracției universale (2.12), obținem relația

$$g = K \frac{M_p}{R^2}, \quad (2.15)$$

unde M_p și R sunt, respectiv, masa și raza Pământului.

Comparând (2.14) cu (2.15), constatăm că **în condiții terestre accelerația gravitațională coincide cu intensitatea câmpului gravitațional** și nu depinde de masa corpului din acest câmp. Iată de ce în experiențele lui Galilei toate corpurile, indiferent de masa lor, cădeau cu una și aceeași accelerație g .

Dacă corpul de probă se află la o înălțime h de la suprafața Pământului, atunci distanța de la centrul acestuia este egală cu $(R + h)$ și în locul formulei (2.15) pentru accelerația gravitațională la înălțimea h avem

$$g_h = K \frac{M_p}{(R + h)^2}. \quad (2.16)$$

Din (2.16) rezultă că atât forța de greutate $G_h = mg_h$, cât și accelerația gravitațională g_h se micșorează odată cu îndepărtarea corpului de suprafața Pământului.

Făcând raportul relațiilor (2.16) și (2.15), obținem

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R + h)^2} \text{ sau} \quad g_h = g \frac{R^2}{(R + h)^2}. \quad (2.17)$$

Deoarece raza Pământului este $R = 6\,371$ km, din această formulă reiese că, până și la înălțimi de sute de kilometri, accelerația gravitațională nu suferă modificări esențiale. Așadar, pentru înălțimi mult mai mici decât raza Pământului $g_h \approx g = \text{const.}$

* Sateliți artificiali

Să analizăm mișcarea unui corp cu masa m în câmpul gravitațional terestru. Dacă corpul este lăsat liber într-un punct A la înălțimea h deasupra Pământului (fig. 2.13), el se mișcă de-a lungul direcției razei acestuia și cade în punctul B de pe suprafața lui. Admitem că în punctul A corpul posedă o viteză v_A

orientată perpendicular pe direcția verticală. În acest caz corpul descrie o traiectorie parabolică și cade în punctul B_1 . Dacă viteza v_A se mărește, atunci corpul cade în puncte tot mai îndepărtate de B , până când pentru o viteză $v_A = v_h$ el nu mai ajunge pe Pământ, ci se deplasează pe o traiectorie circulară de rază $r = R + h$. Astfel, mișcarea corpului devine asemănătoare cu mișcarea Lunii (satelit natural al Pământului), acesta fiind numit **satelit artificial**.

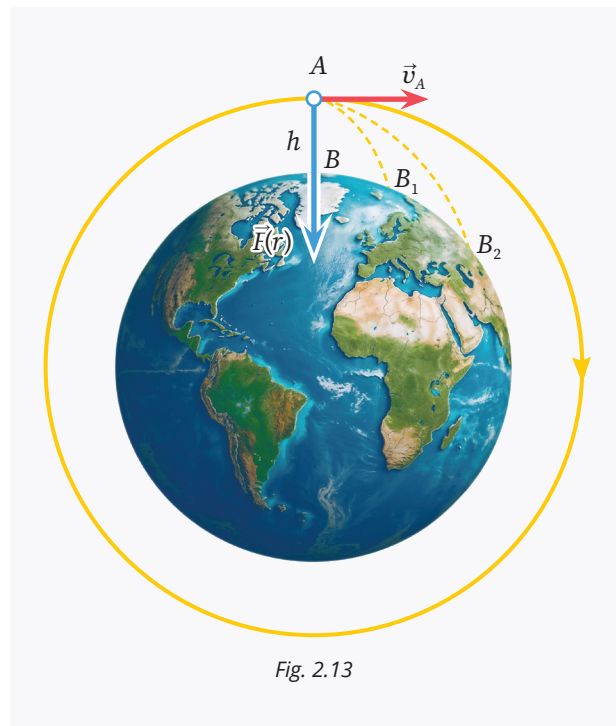


Fig. 2.13

Pentru lansarea sateliților artificiali, sunt folosite **rachete purtătoare** care au rolul de a transporta satelitul până la înălțimea dorită deasupra Pământului și de a-i comunica viteza orizontală necesară. După separarea de rachetă satelitul își continuă mișcarea sa pe orbită în jurul Pământului, devenind un **corp ceresc artificial**.

Sateliții se pot clasifica în funcție de destinația lor în două grupe mari:

- a** **Sateliți destinați pentru cercetări științifice.** Cu ajutorul lor se studiază spațiul cosmic și corpurile cerești, în general, și Pământul cu atmosfera sa, în particular.
- b** **Sateliți cu destinație aplicativă.** Aceștia sunt pe larg utilizați în comunicații, în cercetarea resurselor naturale ale Pământului, în meteorologie, în scopuri de securitate, în navigație și altele.

COMUNICARE

Sateți artificiali ai Pământului – tipuri, caracteristici, domenii de utilizare

În colaborare cu un coleg/o colegă **studiați** din diverse surse de informare materiale despre sateți artificiali ai Pământului și **prezentați** următoarele aspecte:

- 1 **Clasificați** sateți artificiali ai Pământului în funcție de diverse criterii.
- 2 **Identificați** principalele caracteristici ale sateților artificiali.
- 3 **Investigați** și **identificați** domeniile de utilizare în viața cotidiană a sateților artificiali.
- 4 **Analizați** și **constatați** efectele pozitive și negative ale utilizării sateților artificiali.
- 5 **Formulați** concluzii privind importanța sateților artificiali în dezvoltarea științei, evidențiind atât beneficiile, cât și necesitatea utilizării responsabile a acestora și **evaluați** reciproc produsele.

Problemă REZOLVATĂ

Raza planetei Neptun este de $k = 3,6$ ori mai mare decât raza Pământului, iar densitatea de $n = 2,4$ ori mai mică. Determinați accelerația gravitațională la suprafața planetei Neptun.

Rezolvare

Se dă:

$$k = R_N/R_P = 3,6,$$

$$n = \rho_P/\rho_N = 2,4,$$

$$g_P = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$g_N = ?$$

Conform relației (2.15), accelerația gravitațională la suprafața Pământului este $g_P = K \frac{M_P}{R_P^2}$. Considerând Pământul de formă sferică cu volumul $V = \frac{4}{3} \pi R_P^3$ și exprimând masa $M_P = \rho_P V = \frac{4}{3} \pi R_P^3 \rho_P$, obținem $g_P = \frac{K}{R_P^2} \cdot \frac{4}{3} \pi R_P^3 \rho_P = \frac{4}{3} \pi K R_P \rho_P$. Analogic pentru accelerația gravitațională la suprafața planetei Neptun avem $g_N = \frac{4}{3} \pi K R_N \rho_N$. Făcând raportul ultimelor două relații, obținem $\frac{g_N}{g_P} = \frac{R_N \rho_N}{R_P \rho_P} = \frac{k}{n}$, de unde $g_N = \frac{k}{n} g_P = \frac{3,6}{2,4} \cdot 9,81 \approx 14,7 \text{ m/s}^2$.

AUTOEVALUARE

- 1 Formulați legea atracției universale și explicați cum este orientată forța gravitațională.
- 2 Care este sensul fizic al constantei gravitaționale și în ce unități se exprimă?
- 3 Descrieți metoda lui Cavendish de determinare a constantei gravitaționale.
- 4 Descrieți cum se manifestă câmpul gravitațional.
- 5 Definiți noțiunea de intensitate a câmpului gravitațional.
- 6 Explicați de ce accelerația gravitațională în apropierea Pământului este aceeași pentru orice corp.
- 7 Care este expresia pentru accelerația gravitațională a unui corp aflat la o înălțime oarecare deasupra Pământului? Explicați cum depinde ea de această înălțime.
- 8* În ce condiții un corp devine satelit artificial?
- 9* Cum sunt clasificați sateți artificiali în funcție de destinația lor?
- 10 Calculați masa Pământului, dacă se cunoaște raza lui $R = 6\,370 \text{ km}$ și accelerația gravitațională $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- 11 Determinați masa Soarelui, dacă se cunoaște viteza de mișcare a Pământului în jurul lui $v = 30 \text{ km/s}$ și raza orbitei pământeste $r = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$.
- 12 Perioada de revoluție a Lunii în jurul Pământului este $T = 27$ de zile. Determinați raza orbitei pe care se mișcă Luna. Raza Pământului $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$, iar accelerația gravitațională se va lua $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- 13 Un asteroid de formă sferică cu densitatea $\rho = 3,3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ are raza $R = 30 \text{ km}$. Determinați accelerația gravitațională la suprafața asteroidului.

Forța elastică. Mișcarea sub acțiunea forței elastice

Dacă asupra unui corp acționează forțe exterioare, atunci el se poate deforma, adică își poate modifica dimensiunile sau/și forma. În multe cazuri, odată cu încetarea acțiunii forței exterioare, deformarea dispare complet sau parțial. Reiese că există o forță care, conform principiului acțiunii și reacțiunii, este egală în modül cu cea exterioară și care înlătură deformarea produsă. Ea este numită **forță elastică** și reprezintă o manifestare macroscopică a interacțiunii intermoleculare, adică a structurii interne a corpului.

Forța elastică este o forță de natură electromagnetică, care ia naștere la deformarea corpurilor și are întotdeauna sensul contrar deplasării reciproce a particulelor lui.

Experimental se constată:

La deformări mici, forța de elasticitate este proporțională cu valoarea deformăției.

Această dependență a fost stabilită de către fizicianul englez Robert Hooke (1635–1703) și este numită **legea lui Hooke**.

$$F_e = k\Delta l, \quad (2.18)$$

sau sub formă vectorială

$$\vec{F}_e = -k\Delta \vec{l}, \quad (2.18, a)$$

unde semnul „-” arată că forța de elasticitate întotdeauna este orientată în sens opus deformării. Coeficientul de proporționalitate k , numit **constantă de elasticitate**, depinde de proprietățile elastice ale corpului și de dimensiunile lui geometrice. Unitatea constantei de elasticitate în SI este N/m.

În figura 2.14 sunt reprezentate forțele elastice $\vec{F}_e$ și deformatoare $\vec{F}$ în cazul unui resort cu masa neglijabilă. Deformația produsă în acest caz este vizibilă, însă există multe situații când ea nu se observă cu ochiul liber. De exemplu, un burete aflat pe o placă de oțel sub acțiunea forței sale de greutate nu produce o deformare vizibilă (fig. 2.15, a), însă dacă se așază această placă pe burete, atunci forța de greutate a plăcii deformează considerabil buretele (fig. 2.15, b).

Un corp suspendat la capătul unui fir de cauciuc cu lungimea l_0 (fig. 2.16, a) produce o deformare vizibilă, pe când deformarea unui fir de oțel cu aceeași lungime, practic, nu se observă (fig. 2.16, b).

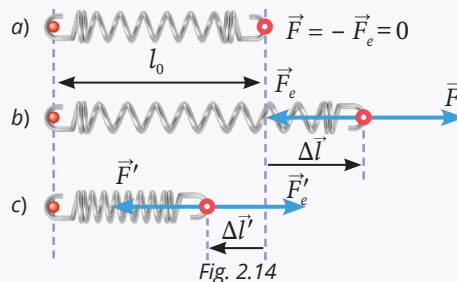


Fig. 2.14

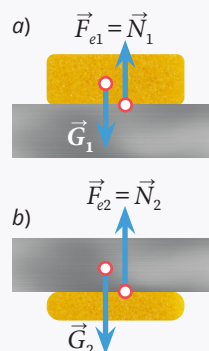


Fig. 2.15

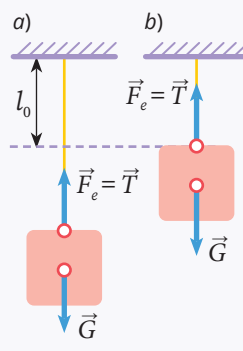


Fig. 2.16

Forța elastică $\vec{F}_e$ care acționează asupra corpului din partea suportului sau a suspensiei este numită, respectiv, forță de reacțiune normală (notată cu $\vec{N}$) sau forță de tensiune (notată cu $\vec{T}$). Ea acționează întotdeauna la contactul dintre corpurile care interacționează și este orientată perpendicular la suprafața de contact sau de-a lungul firelor, tijelor sau al resorturilor.

Corpurile reprezentate în figurile 2.15 și 2.16 se află în repaus, accelerația lor $\vec{a} = 0$; prin urmare, suma forțelor ce acționează asupra fiecăruia dintre ele este nulă. Rezultă $\vec{N} = -\vec{G}$ și $\vec{T} = -\vec{G}$.

Reacțiunea normală $\vec{N}$ (fig. 2.15 și 2.17, a) este forța care acționează asupra corpului din partea suportului pe care se află. La rândul său, conform principiului acțiunii și reacțiunii, corpul apasă suportul cu o forță elastică $\vec{P} = -\vec{N}$. Ținând seama de relația $\vec{N} = -\vec{G}$, obținem $\vec{P} = \vec{G}$, adică forța de apăsare $\vec{P}$ pe suport are același modül, direcție și sens ca și forța de greutate $\vec{G}$. Forțele $\vec{P}$ și $\vec{G}$ sunt însă de natură diferită: forța $\vec{G}$ este de natură gravitațională, iar $\vec{P}$ de natură elastică, adică electromagnetică. În afară de aceasta, forța de greutate $\vec{G}$ ca rezultantă a forțelor gravitaționale care acționează asupra punctelor corpului din partea Pământului este o forță aplicată într-un punct al corpului. Forța de apă-

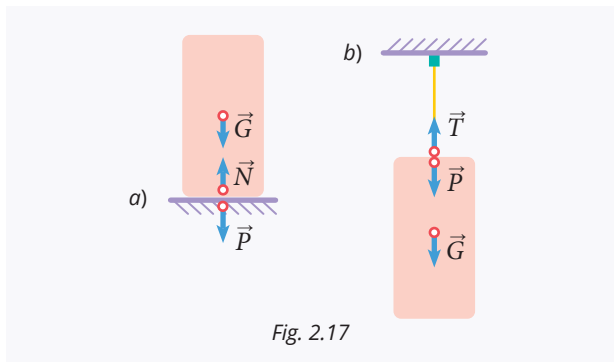


Fig. 2.17

sare $\vec{P}$ este o forță aplicată suportului și repartizată pe suprafața suportului aflată în contact cu corpul.

Raționamente similare sugerează concluzia că în cazul corpului suspendat de un fir (fig. 2.17, b) există o forță $\vec{P} = \vec{G}$ de natură electromagnetică, aplicată firului de suspensie.

Forța de natură electromagnetică $\vec{P}$ caracterizează acțiunea corpului asupra suportului sau a firului vertical de suspensie și este numită pondere sau greutate.

În cazul în care suportul sau punctul de suspensie al firului se deplasează cu accelerația $\vec{a}$ constantă, forțele $\vec{P}$ și $\vec{G}$ vor avea module diferite în funcție de starea de mișcare a suportului sau a punctului de suspensie a firului.

Să analizăm următoarea situație. Un om cu masa m se află într-un ascensor care se poate deplasa pe verticală în ambele sensuri cu accelerația $\vec{a}$ constantă. Podeaua ascensorului reprezintă suportul asupra căruia acționează omul cu forța $\vec{P}$ egală în modul cu forța de reacțiune normală $\vec{N}$. Conform principiului fundamental al dinamicii, $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$. Dacă $\vec{a} = 0$ (ascensorul este în stare de repaus), atunci din acest principiu pentru pondere se obține rezultatul formulat mai sus: $P = -N = mg$. Dacă însă ascensorul se mișcă accelerat vertical în sus sau în jos, atunci pentru pondere se obține

$$P = m(g \pm a), \quad (2.19)$$

unde semnul „plus” corespunde mișcării ascensorului cu accelerația a vertical în sus, iar semnul „minus” – cu accelerația a vertical în jos.

Menționăm că dacă ascensorul se mișcă vertical în jos cu accelerația $a = g$, atunci reacțiunea suportului dispare și ponderea $P = 0$. În asemenea situații se spune că omul se află în stare de **imponderabilitate**.

Dacă însă ascensorul se mișcă vertical în sus, atunci forța cu care omul apasă asupra suportului se mărește și pentru $a = g$ ea se dublează. În asemenea cazuri se spune că omul suportă o **suprasarcină**.

AUTOEVALUARE

- 1 Definiți forța elastică și explicați care este natura ei.
- 2 Enunțați legea lui Hooke. Ce reprezintă constanta elastică și în ce unități se exprimă ea?
- 3 Descrieți modul de formare și de acțiune a forțelor de reacțiune normală și de tensiune.
- 4 La suspendarea unui corp cu masa de 1,5 kg de capătul unui resort vertical, aceasta se întinde cu 3 cm. Care este constanta de elasticitate a resortului? Determinați masa altui corp care ar trebui suspendat de același resort pentru a-l întinde cu 8 cm față de lungimea sa inițială, nedeformată. Accelerația gravitațională se va considera egală cu 10 m/s^2 .
- 5 Două resorturi de lungimi egale sunt legate (în serie) unul în continuarea celuilalt, iar la capetele libere acționează două forțe egale în modul și de sens opus. Care este constanta de elasticitate a resortului ce s-a alungit cu 2 mm, dacă celălalt s-a alungit cu 2 cm, având constanta de elasticitate egală cu 100 N/m ?
- 6 Două resorturi cu constantele de elasticitate $k_1 = 200 \text{ N/m}$ și $k_2 = 300 \text{ N/m}$ sunt legate: a) în serie; b) în paralel. Determinați constanta de elasticitate a sistemului de resorturi.
- 7 **BIO** Graficul dependenței forței de greutate G aplicate unui tendon (țesut fibros cu ajutorul căruia mușchii se fixează de oase) de lungimea acestuia este reprezentat în figura 2.18. Poate fi oare explicată această dependență cu legea lui Hooke? Determinați valoarea constantei de elasticitate a tendonului. Ce forță ar trebui aplicată tendonului pentru ca acesta să se întindă cu 6 cm?
- 8 **ING** Forța maximă de tensiune pe care o poate suporta un cablu este de 2 kN. La ce valoare a accelerației se va rupe cablul, dacă cu ajutorul lui se ridică vertical un corp cu masa de 160 kg? Accelerația gravitațională se va lua $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
- 9 **ING** O bilă cu masa $m = 150 \text{ g}$ poate culisa fără frecări de-a lungul unei tije orizontale care se rotește în jurul axei verticale ce trece prin unul dintre capetele ei. Bila este legată cu axa de rotație printr-un resort cu lungimea de 25 cm în stare nedeformată și constanta de elasticitate de 10 N/m . Cu ce viteză liniară se rotește bila, dacă alungirea resortului este de 5 cm?

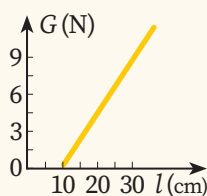


Fig. 2.18

Determinarea masei unui corp cu ajutorul resortului și al altui corp cu masa cunoscută

Scopul lucrării

Studiul forței de elasticitate și determinarea masei necunoscute a unui corp cu ajutorul resortului.

Dispozitive și materiale

O riglă milimetrică, un stativ cu două clește, un resort, un corp cu masa necunoscută și altul cu masa cunoscută.

Considerații teoretice

În montajul experimental (fig. 2.19) al acestei lucrări de laborator este utilizat un resort cu rigiditate nu prea mare (de ordinul celei a unui dinamometru școlar). Corpul suspendat la capătul de jos al resortului acționează asupra lui cu o forță deformatoare egală cu ponderea (greutatea) $P = mg$. Suspendăm mai întâi corpul de masă cunoscută m_0 și resortul se alungește cu $\Delta l_0 = x_0$. Întrucât în stare de echilibru forța de elasticitate este egală în modul și de sens opus cu ponderea $P = F_{el}$, din (2.18) avem $m_0 g = k x_0$, iar pentru coeficientul de elasticitate al resortului utilizat obținem expresia

$$k = \frac{m_0 g}{x_0}.$$

Dacă însă vom suspenda corpul de masă necunoscută m_x la capătul aceluiași resort, atunci acesta se alungește cu x . Din condiția de echilibru pentru corpul cu masa necunoscută $m_x g = k x$ și relația precedentă obținem

$$m_x = \frac{x}{x_0} m_0. \quad (2.20)$$

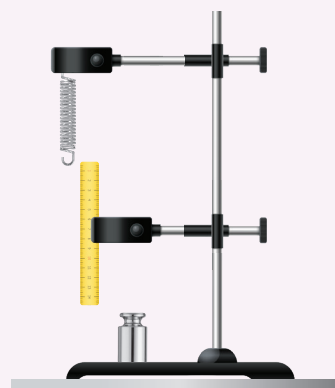


Fig. 2.19

Modul de lucru:

- Realizați montajul experimental din figura 2.19 astfel încât acul indicator al resortului în stare nedeformată să coincidă cu indicația „0” de pe rigla milimetrică.
- Suspendați corpul de masă cunoscută m_0 la capătul liber al resortului și notați pe rigla milimetrică alungirea x_0 produsă.
- Suspendați la capătul liber al resortului corpul de masă necunoscută m_x și notați pe rigla milimetrică alungirea x .
- Repețiți de 2-3 ori măsurările descrise în punctele 2 și 3 și introduceți în caiet după fiecare măsurare datele experimentale obținute folosind tabelul alăturat.
- Calculați valorile medii ale alungirilor x_0 și x ale resortului, precum și erorile lor absolute, înscriindu-le în tabelul alăturat.
- Calculați valoarea medie a masei determinate $\overline{m}_x$ a corpului.
- Estimați erorile absolută și relativă ale masei corpului folosind următoarele relații:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \overline{m}_x}{\overline{m}_x} = \frac{\Delta \overline{x}}{\overline{x}} + \frac{\Delta \overline{x}_0}{\overline{x}_0}, \quad \Delta \overline{m}_x = \varepsilon \cdot \overline{m}_x.$$
- Prezentați rezultatul final sub forma:

$$m_x = (\overline{m}_x \pm \Delta \overline{m}_x) 10^{-3} \text{ kg}; \quad \varepsilon = \dots \%$$
- Formulați concluziile referitor la rezultatele obținute.

Nr. crt.	m_0 (10^{-3} kg)	x_0 (10^{-3} m)	Δx_0 (10^{-3} m)	x (10^{-3} m)	Δx (10^{-3} m)	m_x (10^{-3} kg)
1.						
2.						
3.						
Valoarea medie						

Lucrarea de laborator

Nr. 3

Determinarea constantei elastice a unui resort

Scopul lucrării

Verificarea legii lui Hooke și determinarea constantei de elasticitate.

Dispozitive și materiale

O riglă milimetrică, un stativ cu două clește, un resort, un set de mase marcate.

Considerații teoretice

Montajul experimental al acestei lucrări de laborator este același ca și în cazul Lucrării de laborator nr. 3* (fig. 2.19). Corpul suspendat la capătul de jos al resortului acționează asupra lui cu o forță deformatoare egală cu ponderea (greutatea) $P = mg$ și îl alungește cu $\Delta l = x$. Întrucât în stare de echilibru

forța de elasticitate este egală în modül și de sens opus cu ponderea $P = F_e$, din (2.18), avem $mg = kx$, iar pentru coeficientul de elasticitate a resortului utilizat obținem expresia

$$k = \frac{mg}{x_0}. \quad (2.21)$$

Modul de lucru:

- 1 Realizați montajul experimental din figura 2.19 astfel încât acul indicator al resortului în stare nedeformată să coincidă cu indicația „0” de pe rigla milimetrică.
- 2 Suspendați o masă marcată la capătul liber al resortului și notați pe rigla milimetrică alungirea x produsă.
- 3 Repetați experiența de 5-6 ori adăugând de fiecare dată noi mase marcate. Introduceți în caiet datele experimentale obținute folosind tabelul alăturat.
- 4 Construiți graficul dependenței $F_e = mg$ în funcție de alungirea resortului x și determinați constanta de elasticitate calculând panta drepte obținute. Comparați rezultatul cu valoarea medie căpătată anterior.
- 5 Calculați erorile absolută și relativă comise la măsurarea constantei de elasticitate.
- 6 Prezentați rezultatul final sub forma:
$$k = (\bar{k} \pm \Delta \bar{k}) \frac{\text{N}}{\text{m}}; \quad \varepsilon = \dots\%$$
- 7 Formulați concluziile referitor la rezultatele obținute.

Nr. crt.	m (10^{-3} kg+)	x (10^{-3} m)	k (N/m)	Δk (N/m)
1.	50			
2.	100			
⋮				
⋮				
Valoarea medie				

Analizează și aplică!

- ▶ Este oare valabilă legea lui Hooke în cazul deformărilor mari? Explicați răspunsul.
- ▶ Explicați cum trebuie să fie forma dependenței forței elastice în funcție de alungirea resortului.

COMUNICARE

Aplicarea proprietăților elastice ale corpurilor în diferite dispozitive și mașini

În colaborare cu un coleg/o colegă **studiați** din diverse surse de informare materiale despre aplicarea proprietăților elastice ale corpurilor în diferite dispozitive și mașini. **Prezentați** următoarele aspecte:

- 1 **Clasificați** arcurile în funcție de modul de aplicare a forței și în funcție de forma lor.
- 2 **Prezentați** modul de aplicare a elasticității în scopul: stocării și eliberării energiei cu ajutorul arcurilor și amortizoarelor (în mijloacele de transport, ceasuri mecanice, jucării ș.a.); măsurării forțelor (dinamometrul); absorbției vibrațiilor în diverse echipamente industriale ș.a.
- 3 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 4 **Evaluați** reciproc produsele realizate.

2.6

Forțele de frecare și de rezistență. Mișcarea în prezența forței de frecare

a Forța de frecare

Mișcarea reală a oricărui corp întotdeauna este însoțită de o rezistență din partea mediului înconjurător sau a altor corpuri cu care el vine în contact. În consecință, viteza lui se micșorează și, în urma unei mișcări încetinite, corpul se oprește. Deoarece mișcarea încetinită este caracterizată de o accelerație orientată în sens opus vectorului vitezei, rezultă că există o forță ce acționează pe aceeași direcție în care se produce mișcarea și este orientată în sensul opus acestei mișcări.

Forța $\vec{F}_f$ egală în mod și de sens opus cu forța $\vec{F}$ ce acționează asupra unuia dintre corpuri, pentru a-l mișca din loc sau a-l deplasa uniform pe suprafața celuiilalt, este numită forță de frecare.

Ea apare la contactul nemijlocit dintre corpuri, datorită forțelor de interacțiune intermoleculare, adică este de natură electromagnetică, se află în planul de alunecare a lor, fiind orientată în sens opus vitezei relative.

Realizăm o descriere aproximativă a forțelor de frecare pe baza observațiilor experimentale.

Experiment

Considerăm un corp situat pe o suprafață orizontală și acționăm asupra lui cu o forță de tracțiune paralelă cu planul de contact prin intermediul unui fir trecut peste un scripete, la capătul căruia pe un platan sunt plasate treptat diferite etaloane de masă mici (fig. 2.20, a). Se observă că inițial corpul nu se mișcă. Rezultă că forța de tracțiune F este echilibrată de forța de frecare ce ia naștere la suprafața de contact. Prin adăugarea etaloanelor de masă se mărește treptat forța de tracțiune și atâta

timp cât corpul se află în stare de repaus se mărește și forța de frecare, astfel încât $|\vec{F}_f| = |\vec{F}|$. Această egalitate are loc până la momentul în care corpul este urnit din loc și începe alunecarea lui.

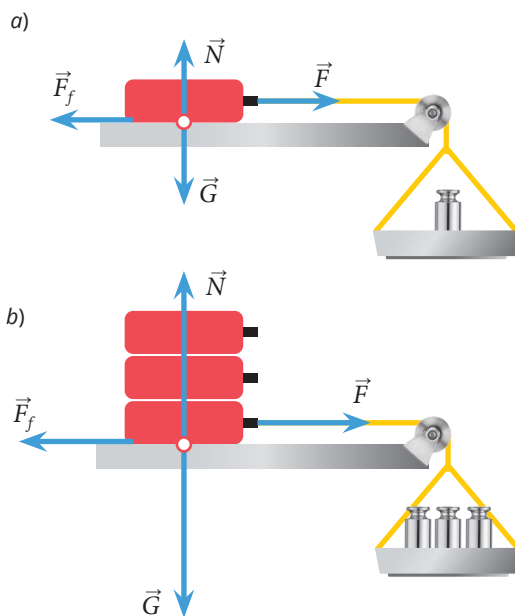


Fig. 2.20

Forța de frecare ce acționează între corpurile solide aflate în stare de repaus este numită **forță de frecare de repaus** sau **forță de frecare statică** F_{fs} și atunci când începe alunecarea ea posedă valoare maximă.

Forța de frecare de repaus F_{fs} este egală în mod și de sens opus cu forța aplicată corpului paralel cu planul de contact cu alt corp și poate lua valori până la o valoare maximă F_{fs}^{max} .

Experimental se observă că dacă forța de greutate a corpului, deci și forța de reacțiune normală se mărește de 2, 3, ... ori, atunci forța necesară pentru începerea alunecării, adică F_{fs}^{max} tot crește de 2, 3, ... ori (fig. 2.20, b).

Valoarea maximă a forței de frecare de repaus este proporțională cu forța de reacțiune normală N .

$$F_{fs}^{max} = \mu_s N, \quad (2.22)$$

unde μ_s este un coeficient de proporționalitate numit **coeficient de frecare statică** și depinde de structura corpurilor și de calitatea șlefuirii suprafețelor de contact.

Dacă valoarea forței de tracțiune $\vec{F}$ depășește valoarea forței maxime de frecare de repaus $\vec{F}_{fs}^{max}$, atunci corpul începe alunecarea cu o anumită accelerație.

Forța de frecare ce acționează în aceste condiții este numită **forță de frecare la alunecare** sau **forță de frecare cinetică** $\vec{F}_{fc}$. Ea se află în planul de alunecare și este orientată în sens opus vectorului viteză relativă a corpurilor aflate în contact.

Pentru măsurarea modului forței de frecare la alunecare, este necesar să asigurăm o mișcare uniformă a corpurilor.

În acest caz rezultanta forțelor ce acționează în planul de alunecare se egalează cu zero și forța de frecare la alunecare este egală cu cea de tracțiune. Valoarea forței de frecare la alunecare întotdeauna este mai mică decât cea a forței de frecare de repaus maximă, însă această deosebire este mică și se consideră ca $F_{fc} \approx F_{fs}^{max}$. La fel ca în cazul forței de frecare de repaus, se constată experimental că forța de frecare la alunecare este proporțională cu cea de reacțiune normală a suprafeței de contact:

$$F_{fc} = \mu_c N, \quad (2.23)$$

unde μ_c este **coeficientul de frecare la alunecare**. Valoarea lui numerică este puțin mai mică decât cea a coeficientului de frecare de repaus, însă în practică se consideră că $\mu_c \approx \mu_s = \mu$.

Se constată experimental că forța de frecare nu depinde de aria suprafeței de contact. Dacă așezăm trei corpuri paralelipipedice unul peste altul (fig. 2.20, b) sau pe diferite fețe, atunci aria suprafeței de sprijin este de fiecare dată diferită, iar forța de frecare rămâne mereu aceeași.

Din (2.22) și (2.23) rezultă $\mu = F_{fs}^{max}/N = F_{fc}/N$, unde coeficientul de frecare μ este o mărime adimensională și în majoritatea cazurilor el are valoare mai mică decât unitatea. Coeficientul de frecare caracterizează nu numai corpul asupra căruia acționează forța de frecare, ci ambele corpuri aflate în contact.

Coeficientul de frecare depinde atât de materialul din care sunt confecționate corpurile, cât și de calitatea șlefuirii suprafețelor aflate în contact.

Generalizând rezultatele experimentale prezentate mai sus, pentru forța de frecare avem:

$$F_f = \mu N. \quad (2.24)$$

Valoarea numerică a coeficientului de frecare se determină de fiecare dată experimental, luând în considerare și factorii externi ce influențează fenomenul frecării. De exemplu, coeficientul de frecare dintre două suprafețe de oțel este 0,2, iar dintre oțel și gheață are valoarea 0,02. Dacă însă între suprafețele de oțel aflate în contact se introduce un lubrifiant, atunci coeficientul de frecare se micșorează considerabil, devenind aproximativ egal cu cel dintre oțel și gheață.

Pentru determinarea coeficientului de frecare al diferitelor materiale, în condiții de laborator este folosit un dispozitiv special numit **tribometru** (fig. 2.21). El este format dintr-o scândură prevăzută la un capăt cu un scripete ușor în care frecarea este neglijabilă. Poziția scândurii se poate fixa atât orizontal, cât și sub un unghi față de orizont, astfel având posibilitatea de a studia frecarea și pe un plan înclinat. Dispozitivul include și câteva corpuri paralelipipedice identice, pe fețele laterale ale cărora se pot monta plăci confecționate din materiale diferite. Un paralelipiped având fixate plăci din materialul studiat se așază pe scândura orizontală a tribometrului și prin intermediul unui fir trecut peste scripete se leagă cu un platan pe care se adaugă treptat etaloane de masă, până la momentul când începe alunecarea. Valoarea forței de greutate pentru care se realizează alunecarea uniformă a paralelipipedului este egală cu forța de frecare la alunecare.

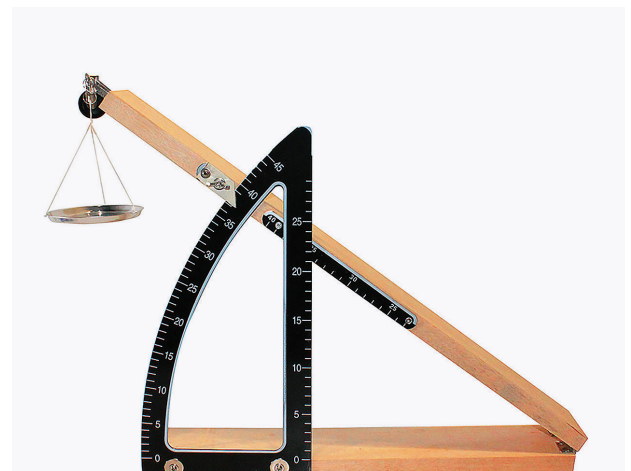


Fig. 2.21

Dacă un corp alunecă fără accelerație, adică uniform pe un plan înclinat, atunci coeficientul de frecare se exprimă prin unghiul de înclinare al planului, numit în acest caz **unghi de frecare**. Într-adevăr, la alunecarea uniformă a corpului, conform principiului fundamental al dinamicii, avem

$$\vec{F}_f + \vec{N} + \vec{G} = 0.$$

Menționăm că pentru a facilita operațiile cu vectorii forțelor în continuare, în manual îi vom reprezenta având o origine comună în centrul corpului asupra căruia aceste forțe acționează.

Trecând la proiecții pe axele de coordonate Ox și Oy (fig. 2.22), din relația de mai sus obținem:

$$F_f - G \sin \varphi_f = 0,$$

$$N - G \cos \varphi_f = 0,$$

care, introduse în (2.24), dau egalitatea

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi_f. \quad (2.25)$$

Dacă unghiul planului înclinat φ este mai mare decât unghiul de frecare φ_f , atunci $\mu < \operatorname{tg} \varphi_f$ și corpul alunecă cu accelerație, iar dacă $\varphi < \varphi_f$, el se află în stare de repaus și $F_f < F_{fs}^{\max}$.

În cazul corpurilor de formă cilindrică sau sferică, se manifestă **forța de frecare la rostogolire**. Ea este de multe ori mai mică decât forța de frecare la alunecare.

Din această cauză la funcționarea diferitelor mecanisme, unde frecarea la alunecare este dăunătoare prin uzarea, încălzirea sau chiar topirea unor piese în mișcare, ea se înlocuiește cu frecarea la rostogolire. Aceasta se poate realiza cu ajutorul rulmenților cu bile sau cu role, a căror construcție este arătată în figura 2.23. Dacă se folosesc și lubrifianți, atunci frecarea devine foarte mică.

Cu toate că forța de frecare este una de frânare, în multe cazuri ea reprezintă o forță motoare. Anume datorită forței de frecare este posibilă mișcarea automobilelor și mersul oamenilor pe Pământ. Între roțile motoare ale automobilului și Pământ (fig. 2.24, a) acționează forțele de frecare de repaus F_{f1} exercitate de Pământ asupra roților, prin intermediul cărora se imprimă accelerație automobilului și F_{f2} exercitate de roți asupra Pământului.

Din cauza masei lui foarte mari în comparație cu cea a automobilului, accelerația imprimată Pământului este, practic, egală cu zero. Dacă însă un om ar merge pe suprafața unui cilindru care se poate roti

în jurul axei sale (fig. 2.24, b), atunci forța de frecare de repaus F_{f2} care acționează asupra cilindrului l-ar pune în mișcare de rotație.

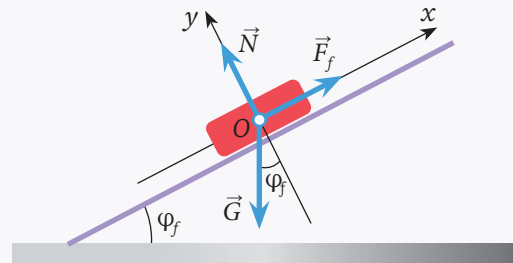


Fig. 2.22

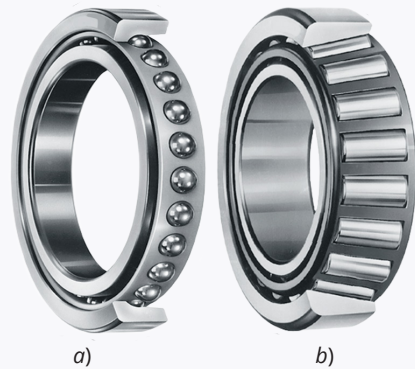


Fig. 2.23

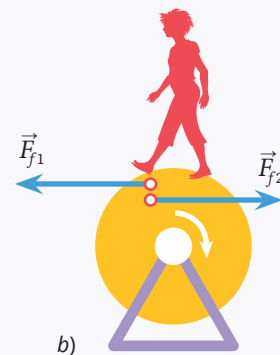
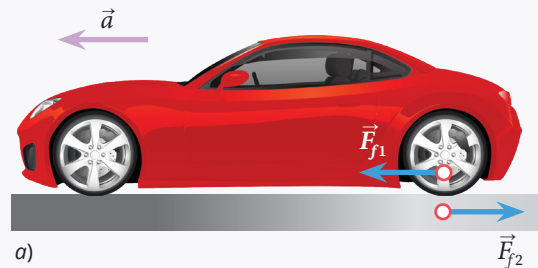


Fig. 2.24

b* Forța de rezistență

La mișcarea corpurilor solide, contactul se poate realiza nu numai cu alte corpuri solide, dar și cu lichide sau gaze, de exemplu, mișcarea unui submarin, a unui avion ș.a. În aceste cazuri ia naștere o forță asemănătoare cu cea de frecare la alunecare, numită **forță de rezistență**. Ea de asemenea se situează în planul de contact și este orientată în sens opus vitezei relative v_r a corpului în raport cu lichidul sau gazul, valoarea numerică a ei fiind în funcție de modulul acestei viteze. Pentru viteze relative mici ale corpului, forța de rezistență este proporțională cu valoarea vitezei:

$$F_r = \alpha v_r, \quad (2.26, a)$$

iar pentru viteze mari – cu pătratul acestei mărimi:

$$F_r = \beta v_r^2, \quad (2.26, b)$$

unde α și β sunt coeficienți de proporționalitate ce caracterizează rezistența lichidului sau a gazului, forma, dimensiunile corpurilor și calitatea prelucrării suprafețelor acestora. De exemplu, corpurile din figura 2.25 au aceeași arie a secțiunii transversale, însă forța de rezistență este de fiecare dată diferită. Forma geometrică a corpurilor pentru care forța de

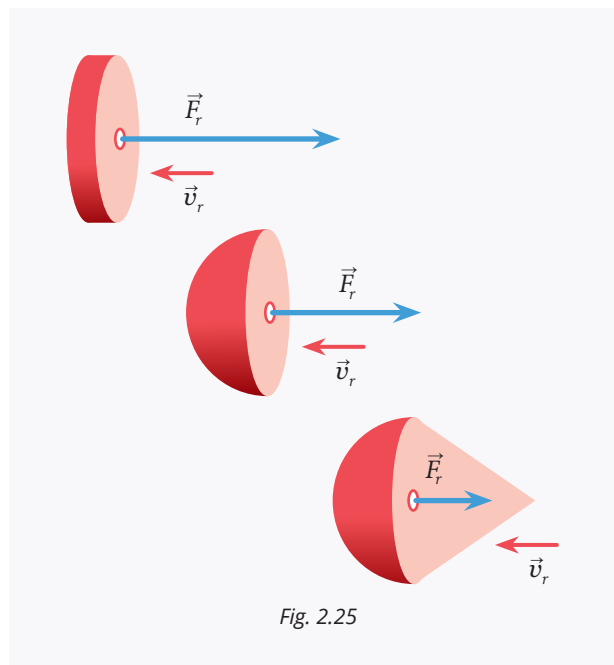


Fig. 2.25

rezistență este minimă se numește **formă aerodinamică**. Ea are o importanță deosebită la construirea diferitelor aparate de zbor, a automobilelor și a altor mecanisme care înfruntă rezistența lichidelor sau a gazelor.

Problemă REZOLVATĂ

Un automobil se deplasează pe un drum orizontal cu o viteză de 60 km/h. Observând un obstacol, șoferul a frânat brusc. Considerând $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ determinați peste cât timp se va opri automobilul și care este distanța de frânare (distanța parcursă până la oprire), în cazul când coeficientul de frecare la alunecarea roților pe asfalt este $\mu = 0,75$.

Rezolvare

Se dă:

$$v_0 = 60 \text{ km/h}, \\ \mu = 0,75 \\ g = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$t - ?, s_x - ?$$

SI:

$$16,67 \text{ m/s}$$

$$s; \text{ m}$$

Considerăm mișcarea automobilului de-a lungul axei Ox a unui sistem de coordonate legat cu drumul. Deoarece viteza finală a automobilului este egală cu zero, din definiția accelerației $a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$ obținem timpul de frânare $t = -\frac{v_{0x}}{a_x}$. Indicele x la toate mărimile din această problemă arată că mărimea respectivă reprezintă proiecția ei pe direcția mișcării ce coincide cu axa Ox . Accelerația a_x la mișcarea uniform

încetinită a automobilului se determină din principiul fundamental al dinamicii: $a_x = -F_f/m$. Folosind (2.24) și expresia $N = mg$ care rezultă din proiectarea forțelor pe direcția verticală ($a_y = 0$), obținem $a_x = -\frac{\mu mg}{m} = -\mu g$. Așadar, $t = \frac{v_{0x}}{\mu g}$, $t \approx 2,27 \text{ s}$. Pentru determinarea distanței de frânare se folosește formula lui Galilei (1.38): $s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}$, în care $v_x = 0$ și $a_x = -\mu g$. Atunci $s_x = \frac{v_{0x}^2}{2\mu g}$, $s_x \approx 18,90 \text{ m}$.

Analizează și aplică!

- ▶ Aveți la dispoziție o riglă din lemn și o monedă de un leu. Determinați coeficientul de frecare dintre metal și lemn.
- ▶ Apăsați o carte cu mâna pe un perete vertical. Explicați în ce direcție și sens este orientată forța de frecare dintre perete și carte.
- ▶ În caroseria unui camion se află o ladă. La mișcarea camionului cu accelerație spre vest lada se mișcă odată cu camionul fără să alunece pe suprafața caroseriei. În acest caz, există forță de frecare sau nu? Dacă da, atunci în ce direcție și sens este ea orientată?
- ▶ Când este mai ușor să deplasezi un corp pe o suprafață orizontală: trăgându-l cu o forță F orientată sub un unghi α deasupra orizontalei sau împingându-l cu aceeași forță orientată sub același unghi sub orizontală?

AUTOEVALUARE

- 1 Ce este forța de frecare? În ce condiții apare forța de frecare și care este natura ei?
- 2 Ce este forța de frecare de repaus? Care este valoarea ei maximă?
- 3 Prin ce se deosebesc forțele de frecare la alunecare de cele de repaus?
- 4 Descrieți construcția tribometrului.
- 5 Definiți unghiul de frecare.
- 6 Care este deosebirea dintre valorile forțelor de frecare la alunecare și la rostogolire?
- 7 Dați exemple de situații în care forța de frecare este utilă și în care ea este dăunătoare.
- 8* Explicați cum acționează forța de rezistență a lichidelor sau a gazelor și de ce factori depinde ea.
- 9 **ING** Un motociclist, deplasându-se cu o viteză de 12 m/s, a observat la o distanță de aproximativ 15 m un obstacol și a frânat brusc. Va reuși el să se oprească până la obstacol sau nu? Coeficientul de frecare la alunecare $\mu = 0,7$.
- 10 **ING** Un corp alunecă uniform pe suprafața unui plan înclinat cu înălțimea de 3 m și baza de 5 m. Determinați coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe planul înclinat.
- 11 Un corp alunecă pe o suprafață orizontală acoperită cu gheață și, parcurgând o distanță de 25 m, se oprește. Determinați viteza inițială a corpului, în cazul în care coeficientul de frecare la alunecarea lui pe gheață este $\mu = 0,05$. Accelerația gravitațională se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- 12 Un corp cu masa de 5 kg alunecă uniform pe o suprafață orizontală sub acțiunea unei forțe orizontale aplicate lui prin intermediul unui resort. Determinați alungirea resortului, în cazul în care coeficientul de frecare $\mu = 0,2$, iar cel de elasticitate $k = 500 \text{ N/m}$. Accelerația gravitațională se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- 13 De pe un plan înclinat cu înălțimea de 3 m și baza de 4 m alunecă un corp cu accelerația de 2 m/s^2 . Determinați coeficientul de frecare la alunecare dintre corp și planul înclinat.
- 14 Care este forța minimă necesară pentru a împinge un obiect cu masa $m = 40 \text{ kg}$ pentru a-l deplasa? Forța aplicată obiectului formează un unghi $\alpha = 30^\circ$ sub orizontală, iar coeficientul de frecare dintre suprafața lui și podea este $\mu = 0,4$. Accelerația gravitațională se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.
- 15 **ING** Pe o porțiune de autostradă acoperită cu gheață, coeficientul de frecare dintre anvelopele unui automobil și autostradă este de nouă ori mai mic decât pe asfalt uscat. De câte ori șoferul trebuie să micșoreze viteza automobilului pentru ca distanța de frânare pe porțiunea de autostradă acoperită cu gheață să rămână aceeași ca și pe asfalt uscat?
- 16* Un corp mic este lansat de jos în sus pe suprafața unui plan înclinat cu unghiul $\alpha = 60^\circ$ față de orizont. Coeficientul de frecare dintre corp și plan este $\mu = \sqrt{3}/4$. După atingerea punctului superior al suprafeței planului, corpul începe să alunece în jos. Determinați raportul dintre timpul necesar corpului pentru a coborî pe planul înclinat până la punctul de lansare și timpul necesar pentru a urca până în punctul lui superior.

S T E A M

Dependența distanței de frânare a vehiculului de starea suprafeței carosabilului

Scopul proiectului

Conștientizarea faptului că securitatea rutieră depinde atât de distanța de frânare, cât și de calitatea carosabilului.

Formați 4 echipe de lucru.

Discutați și repartizați volumul de lucru între echipe.



Realizați proiectul STEAM efectuând cercetări după următoarele repere:

Securitatea rutieră a pietonilor în diferite condiții și importanța considerării forței de frecare:

Analizați impactul diferitelor tipuri de carosabil asupra siguranței circulației rutiere.

Explicați cum condițiile meteorologice (ploaie, ninsoare, gheață etc.) afectează fenomenul frecării.

Analizați rolul infrastructurii rutiere și modul în care aceasta influențează siguranța pietonală.

Realizați o lucrare (poster, desen, colaj, afiș, un scurt metraj etc.) prin care **să transmiteți** un mesaj de responsabilitate civică, avertizând asupra riscurilor la care sunt expuși participanții la trafic în condiții meteorologice extreme.

Identificați și propuneți soluții de îmbunătățire a infrastructurii rutiere pentru protecția pietonilor, cum ar fi semnalizarea adecvată, iluminatul public; trotuare corespunzătoare etc.

Estimați dacă soluțiile propuse sunt fezabile regiunii în care locuiți.

Folosind formula lui Galilei (1.38) și legea a doua a lui Newton **obțineți** o relație pentru estimarea distanței de frânare a unui automobil pe un drum orizontal până la oprire în funcție de viteza lui și de coeficientul de frecare dintre anvelope și carosabil (asfalt uscat, asfalt umed, drum de pământ uscat, drum de pământ umed, drum de gheață netedă, drum înzăpezit).

Calculați distanța de frânare la mișcarea unui automobil cu o anumită viteză pentru diferite tipuri de carosabil (cu viteze diferite pe un anumit tip de carosabil) și **comparați** rezultatele obținute.

Coeficientul de frecare dintre anvelope și carosabil:

Carosabil	Asfalt uscat	Asfalt umed	Drum de pământ uscat	Drum de pământ umed	Drum de gheață netedă	Drum înzăpezit
Coeficient de frecare	0,5 – 0,75	0,35 – 0,45	0,40 – 0,50	0,30 – 0,40	0,15 – 0,25	0,52

Elaborați o prezentare Power Point în care **să reflectați** cercetările și rezultatele obținute în cadrul proiectului.

Determinarea coeficientului de frecare la alunecare

Scopul lucrării

Studiul fenomenului frecării și determinarea coeficientului de frecare la alunecare prin metoda planului înclinat.

Dispozitive și materiale

Un tribometru (în lipsa tribometrului se ia o scândură de aproximativ $80 \div 100$ cm lungime), un stativ cu un clește, o panglică cu diviziuni centimetrice (ruletă), un corp paralelipipedic, un set de mase marcate.

Considerații teoretice

Dacă un corp alunecă uniform pe un plan înclinat, atunci coeficientul de frecare se exprimă prin tangenta unghiului de înclinare a planului (par. 2.6): $\mu = \operatorname{tg} \varphi_f$.

Din figura 2.26, care reprezintă montajul experimental al acestei lucrări de laborator, se observă că $\operatorname{tg} \varphi_f = \frac{h}{l}$.

Așadar, dacă se asigură o alunecare uniformă a corpului, atunci coeficientul de frecare la alunecare se determină prin măsurarea bazei l și a înălțimii h ale planului înclinat: $\mu = \frac{h}{l}$.

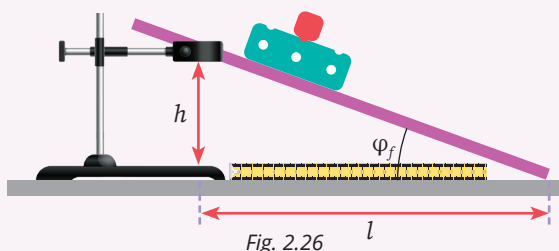


Fig. 2.26

Nr. crt.	h (cm)	l (cm)	$\bar{\mu}$	$\Delta\bar{\mu}$
1.				
2.				
⋮				
Valoarea medie				

Modul de lucru:

- 1 Așezați corpul paralelipipedic pe scândură și, ridicând-o încet de la un capăt, găsiți poziția ei (unghiul φ_f) din care în urma unor ciocănituri ușoare corpul începe să alunece uniform.
- 2 În această poziție fixați scândura în cleștele stativului și verificați încă o dată dacă corpul alunecă uniform.
- 3 Măsurați înălțimea h și baza l ale planului înclinat obținut și treceți în caiet rezultatele, folosind tabelul alăturat.

- 4 Reluați de 2-3 ori procedeele de lucru descrise la punctele 1-3, adăugând pe corpul paralelipipedic câte un corp cu masa de 100 g.
- 5 Calculați valoarea medie $\bar{\mu}$ a coeficientului de frecare.
- 6 Estimați erorile absolută și relativă ale coeficientului de frecare la alunecare, folosind următoarele relații:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\bar{\mu}}{\bar{\mu}} = \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta l}{l}, \quad \Delta\bar{\mu}_x = \varepsilon \cdot \bar{\mu}_x.$$

- 7 Prezentați rezultatul final sub forma $\mu = \bar{\mu} \pm \Delta\bar{\mu}$; $\varepsilon = \dots\%$.
- 8 Formulați concluziile referitor la rezultatele obținute.

Analizează și aplică!

- ▶ Care este esența metodei planului înclinat pentru determinarea coeficientului de frecare la alunecare?
- ▶ Argumentați de ce este necesar să se ciocănească ușor pe scândură când se determină poziția pentru care corpul alunecă uniform.
- ▶ Propuneți o altă metodă de determinare a coeficientului de frecare la alunecare și încercați să o realizați.

Mișcarea corpului sub acțiunea mai multor forțe

În temele precedente am studiat mișcarea corpurilor când asupra lor acționa o singură forță: de greutate, de elasticitate sau de frecare. În realitate însă, corpurile sunt supuse concomitent acțiunii mai multor tipuri de forțe. Deoarece accelerația imprimată corpului și rezultanta tuturor forțelor ce acționează asupra lui au aceleași direcție și sens, este comod să

proiectăm toți vectorii din legea a doua a lui Newton anume pe această direcție, atât în cazul mișcării de translație, cât și al mișcării de rotație a corpului.

Să analizăm, în baza unui exemplu, metodele de rezolvare a unor probleme cu aplicarea principiilor dinamicii, menționând, totodată, unele recomandări privind algoritmul de rezolvare.

I. Un corp cu masa m se mișcă pe o suprafață orizontală sub acțiunea unei forțe F orientată în sus sub un unghi α față de orizont. Determinați accelerația corpului, dacă coeficientul de frecare la alunecarea lui este μ .

Rezolvare. Vom explica modul de rezolvare a acestei probleme reflectând consecutivitatea etapelor din algoritmul menționat, formulându-le în mod general pentru a fi utilizate și la rezolvarea altor probleme.

1 După analiza situației concrete în care se realizează mișcarea în problema cercetată, se construiește schematic o diagramă în care este reprezentat corpul și condițiile în care acesta se află.

Diagrama schematică în care este reprezentat corpul aflat pe suprafața orizontală are aspectul din figura 2.27.

2 Se identifică toate forțele care acționează asupra corpului, reprezentându-le în diagramă.

Asupra corpului acționează forța $\vec{F}$ orientată sub unghiul α față de orizont, existența căreia este dată în condiția problemei, forța de greutate $\vec{G}$ orientată vertical în jos; forța de reacțiune normală $\vec{N}$ orientată normal la suprafața pe care corpul se mișcă (în acest caz vertical în sus) și forța de frecare $\vec{F}_f$ orientată în sens opus mișcării (fig. 2.27). Este de menționat că forța de frecare acționează la contactul dintre corp și suprafața pe care el se mișcă, însă este mai comod să reprezentăm această forță având același punct de aplicare (centrul corpului) ca și ceilalți vectori.

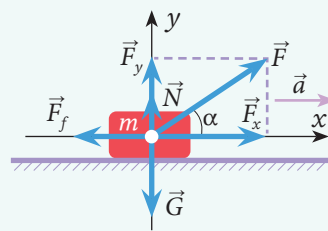


Fig. 2.27

3 Se scrie principiul fundamental al dinamicii sub formă vectorială (2.6) pentru situația concretă a problemei.

În cazul acestei probleme asupra corpului acționează patru forțe și principiul fundamental al dinamicii ia forma

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G}. \quad (2.27)$$

4 Se alege un sistem de coordonate și se determină unghiurile pe care le formează forțele și accelerația corpului cu axele lui.

Alegerea convenabilă a sistemului de coordonate este foarte importantă pentru efectuarea calculelor. De obicei, acesta se alege astfel încât o axă să fie orientată în direcția și sensul accelerației, iar a doua – perpendicular pe ea. În figura 2.27 este reprezentat sistemul de coordonate legat cu centrul corpului de masă m .

5 Se trece de la ecuația vectorială la ecuațiile scalare pentru proiecțiile pe axele de coordonate, iar sistemul de ecuații obținut din (2.27) se rezolvă în raport cu necunoscutele problemei.

În proiecții pe axele sistemului de coordonate ales, ecuația (2.27) are forma

$$\begin{aligned} \text{axa } x: \quad ma &= F_x - F_f, \\ \text{axa } y: \quad 0 &= F_y + N - G. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Luând în considerare că $F_f = \mu N$, $G = mg$, iar proiecțiile forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate sunt $F_x = F \cos \alpha$ și $F_y = F \sin \alpha$, din ecuațiile (2.28) avem

$$\begin{aligned} ma &= F \cos \alpha - \mu N, \\ 0 &= F \sin \alpha + N - mg. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Din ecuația a doua a sistemului (2.29) se determină valoarea forței de reacțiune $N = mg - F \sin \alpha$, iar din prima ecuație – accelerația corpului

$$a = \frac{F}{m} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha) - \mu g.$$

II. Un corp cu masa de 5 kg se află pe un plan înclinat cu unghiul de 30° față de orizont. Asupra corpului acționează orizontal (paralel cu baza planului înclinat) o forță de 20 N. Determinați forța de reacțiune normală din partea planului înclinat asupra corpului și accelerația lui dacă coeficientul de frecare la alunecarea acestuia pe planul înclinat este egal cu 0,4.

Rezolvare. În figura 2.28 este reprezentat corpul de masă m aflat pe planul înclinat. Asupra lui acționează aceleași tipuri de forțe ca în primul exemplu din acest paragraf, dar orientate în mod diferit, în funcție de unghiul de înclinație al planului. Din acest motiv, principiul fundamental al dinamicii are aceeași formă (2.27). Alegând sistemul de coordonate astfel încât una dintre axele lui să fie orientată în direcția și sensul mișcării, proiectarea ecuației (2.27) pe axele acestuia conduce la obținerea următoarelor ecuații:

$$\begin{aligned} \text{axa } x: \quad ma &= F_x + G_x - F_f, \\ \text{axa } y: \quad 0 &= F_y + N - G_y. \end{aligned} \quad (2.30)$$

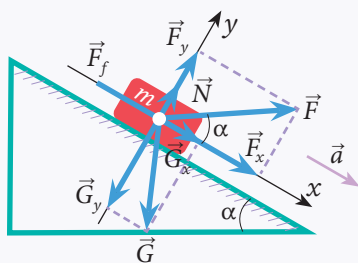


Fig. 2.28

Luând în considerare că $F_f = \mu N$, iar proiecțiile forțelor $\vec{F}$ și $\vec{G}$ pe axele de coordonate sunt $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$ și $G_x = mg \sin \alpha$, $G_y = mg \cos \alpha$ din sistemul de ecuații (2.30), obținem

$$\begin{aligned} ma &= F \cos \alpha + mg \sin \alpha - \mu N, \\ 0 &= F \sin \alpha + N - mg \cos \alpha. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Din ecuația a doua a sistemului (2.31) se determină forța de reacțiune normală

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha - F \sin \alpha = \\ &= 5 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ - 20 \cdot \sin 30^\circ \approx 33,3 \text{ N}, \end{aligned}$$

iar din prima ecuație – accelerația corpului

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \cos \alpha - \frac{\mu N}{m} + g \sin \alpha = \\ &= \frac{20}{5} \cos 30^\circ - 0,4 \frac{33,3}{5} + 10 \sin 30^\circ \approx 5,8 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

III. Un automobil cu masa m se mișcă uniform cu viteza v pe un pod: a) concav; b) convex cu raza de curbă R (fig. 2.29). Cu ce forță apasă automobilul pe mijlocul podului?

Rezolvare. Asupra automobilului acționează forțele: de greutate $\vec{G}$, de reacțiune normală a podului $\vec{N}$, de tracțiune $\vec{F}_t$ (forța de frecare ce acționează asupra roților din partea podului) și de rezistență din partea mediului $\vec{F}_r$, sub acțiunea cărora automobilul se mișcă cu viteza v constantă.

Ecuația principiului fundamental al dinamicii în ambele cazuri are aspectul

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_r + \vec{F}_t. \quad (2.32)$$

La mișcarea pe traiectoria de rază R , automobilul posedă o accelerație centripetă $a = v^2/R$, orientată întotdeauna spre centrul de curbă (fig. 2.29). Dacă alegem un sistem de coordonate comun pentru ambele cazuri, atunci pentru podul concav ecuația (2.32) în proiecții pe axele de coordonate are forma

$$\begin{cases} ma = N - G, \\ 0 = F_r - F_t. \end{cases} \quad (2.33)$$

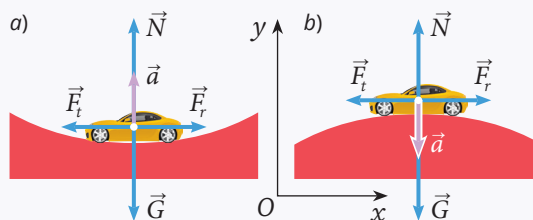


Fig. 2.29

Întrucât $G = mg$, din (2.33) pentru forța de apăsare asupra podului concav, egală în modül cu reacțiunea normală a podului, obținem

$$N = m \left(g + \frac{v^2}{R} \right).$$

După cum se observă din figura 2.29, unica deosebire dintre cele două situații constă în orientarea opusă a accelerației centripete. Atunci forța de

apăsare asupra podului convex se obține din relația pentru cel concav prin înlocuirea semnului „+” din fața accelerației centripete $\frac{v^2}{R}$ cu semnul „-”. Așadar,

$$N = m \left(g - \frac{v^2}{R} \right).$$

Din ultima relație se observă că pentru viteza $v = \sqrt{gR}$ forța de apăsare asupra podului este egală cu zero și automobilul se află în stare de imponderabilitate.

AUTOEVALUARE

- Asupra unui corp cu masa de 1 kg ce se află pe o suprafață orizontală acționează două forțe $F_1 = 3$ N și $F_2 = 4$ N orientate în planul orizontal și perpendiculare una față de cealaltă. Determinați accelerația corpului, dacă coeficientul de frecare dintre corp și suprafață este 0,3.
- Cu ce forță minimă trebuie de împins un corp cu masa de 10 kg aflat pe podea pentru a-l urni din loc? Forța cu care se acționează asupra corpului formează un unghi de 30° cu orizontul, iar coeficientul de frecare dintre corp și podea $\mu = 1/\sqrt{3}$.
- Dacă asupra unui corp cu masa de $m = 20$ kg acționează o forță $F = 100$ N orientată sub un unghi $\alpha = 60^\circ$ față de orizont, atunci corpul se mișcă uniform. Cu ce accelerație se va mișca acest corp, dacă aceeași forță va acționa sub un unghi $\beta = 30^\circ$ față de orizont?
- Un corp cu masa $m = 60$ kg se deplasează în sus pe un plan înclinat cu unghiul de înclinare $\alpha = 30^\circ$. Coeficientul de frecare este $\mu = 0,2$. Determinați accelerația corpului, dacă asupra lui acționează în direcția mișcării o forță $F = 600$ N paralelă cu baza planului înclinat.
- Asupra unui corp cu masa de 10 kg care se află pe un plan înclinat acționează o forță F orientată în sus de-a lungul planului. Dacă forța $F = F_1 = 70$ N, atunci corpul urcă uniform, iar dacă $F = F_2 = 30$ N, corpul coboară uniform pe planul înclinat. Determinați unghiul planului înclinat și coeficientul de frecare dintre corp și planul înclinat.
- Un paralelipiped de lemn cu masa $m = 0,3$ kg se află pe un plan înclinat cu lungimea $L = 1,5$ m și înălțimea $h = 0,5$ m. Cu ce forță minimă perpendiculară pe suprafața planului trebuie să apăsați paralelipipedul astfel încât el să rămână în repaus? Coeficientul de frecare dintre suprafețele paralelipipedului și a planului înclinat este $\mu = 0,3$.
- ING** Un automobil cu masa de 1 500 kg se deplasează cu viteza $v = 20$ m/s de-a lungul drumului, al cărui profil este prezentat în figura 2.30. Determinați forța cu care automobilul apasă asupra drumului în punctele A, B, C, D, dacă $R = 200$ m, $\alpha = 60^\circ$. Care ar trebui să fie viteza automobilului v_0 pentru ca acesta să nu exercite presiune asupra drumului în punctul D?
- ING** Un avion de vânătoare descrie în timpul zborului o „buclă mortală” cu raza $R = 600$ m, având o viteză de 60 m/s (fig. 2.31). Cu ce forță apasă pilotul cu masa de 70 kg pe scaunul avionului în punctele de sus și de jos ale traiectoriei?

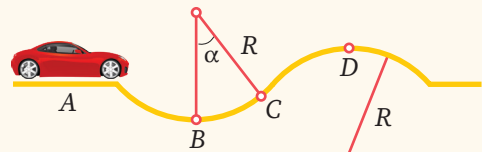


Fig. 2.30

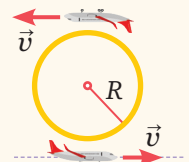


Fig. 2.31

Elaborați un rezumat la tema:

Componentele structurale ale dinamicii ca teorie a interacțiunilor.

În problemele 1–8 se va lua $g = 10$ m/s².

Test de evaluare sumativă

PROFIL REAL

- 1** Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:
- 1 p.** **a** Orice corp continuă să-și păstreze starea de repaus sau _____ atâta timp cât alte corpuri nu acționează asupra lui;
- 1 p.** **b** Produsul dintre masa și accelerația corpului este egal cu _____ care acționează asupra lui și-i imprimă această accelerație;
- 1 p.** **c** Mărimea fizică vectorială egală cu _____ dintre forța gravitațională ce acționează asupra unui corp și masa acestuia se numește intensitate a câmpului gravitațional.
- 2** Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:
- | | | |
|-------------|-------------------------------------|------|
| 1 p. | Intensitatea câmpului gravitațional | kg |
| 1 p. | Masa | kN |
| 1 p. | Coeficientul de elasticitate | N/kg |
| | | N/m |
- 3** Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.
- 1 p.** **A** **F** **a** Accelerația corpului care se mișcă sub acțiunea unei forțe este de atâtea ori mai mare de câte ori este mai mică masa acestuia.
- 1 p.** **A** **F** **b** La viteze relative mici ale unui corp în raport cu lichidul în care acesta se mișcă, forța de rezistență din partea lichidului este invers proporțională cu valoarea vitezei.
- 1 p.** **A** **F** **c** Ponderea este forța de natură elastică ce caracterizează acțiunea corpului asupra suportului orizontal sau a firului vertical de suspensie.
- 4** **3 p.** În figura 2.32 este reprezentat un corp de masă m aflat în repaus pe un plan înclinat cu asperități. Reprezentați toate forțele care acționează asupra corpului.
- 5** **2 p.** Un corp cu masa de 3 kg se mișcă pe o suprafață netedă orizontală sub acțiunea unei forțe $F = 9 \text{ N}$ orientată sub un unghi de 60° față de orizont. Determinați accelerația corpului.
- 6** Un corp cu masa de 1 kg trebuie urcat pe un plan înclinat cu unghiul de 30° față de orizont. Coeficientul de frecare dintre corp și suprafața planului înclinat este egal cu $1/(2\sqrt{3})$. Considerând $g = 10 \text{ m/s}^2$, să se determine:
- 3 p.** **a** forța necesară pentru deplasarea uniformă a corpului în sus pe planul înclinat;
- 4 p.** **b** timpul în care corpul coboară înapoi la baza planului înclinat parcurgând uniform accelerat o distanță de 80 cm.
- 7** O bară situată orizontal se rotește în jurul unei axe verticale ce trece prin unul din capetele ei. La celălalt capăt al barei este fixat un fir inextensibil cu lungimea de 20 cm, cu ajutorul căruia este suspendată o greutate cu masa de 1 kg. La o viteză unghiulară de rotație a barei $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$, firul cu greutatea deviază de la verticală cu un unghi de 45° . Considerând $g = 10 \text{ m/s}^2$, determinați:
- 2 p.** **a** forța de tensiune din fir;
- 2 p.** **b** accelerația centripetă a corpului suspendat în mișcarea sa de rotație;
- 5 p.** **c** lungimea barei la capătul căreia este fixat firul cu greutatea.

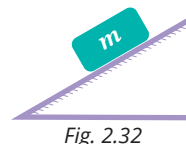


Fig. 2.32

1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p. a) Mărimea fizică ce caracterizează cantitativ acțiunea unui corp asupra altuia se numește _____;
- 1 p. b) Două corpuri acționează unul asupra altuia cu forțe egale în mod $\vec{u}$ l, situate pe aceeași dreaptă-su-
port și orientate _____;
- 1 p. c) La deformări mici, _____ este proporțională cu valoarea deformației.

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

1 p.	Forța de frecare	g
1 p.	Constanta gravitațională	N/m
1 p.	Masa	$N \cdot m^2/kg^2$
		N

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- 1 p. A F a) Forțele de interacțiune dintre corpuri întotdeauna apar simultan.
- 1 p. A F b) Forța de elasticitate este proporțională cu deformația indiferent de valoarea acesteia.
- 1 p. A F c) Forța de frecare la alunecarea unui corp pe suprafața altuia întotdeauna este orientată
în sensul mișcării relative a corpurilor.

4 3 p. În figura 2.33 este reprezentat un corp de masă m care se mișcă uniform pe o suprafață orizontală sub acțiunea forței F . Reprezentați și celelalte forțe care mai acționează asupra corpului în acest caz.

5 2 p. Sub acțiunea unei forțe de 10 N un corp se mișcă cu accelerația de $0,5 \text{ m/s}^2$. Cu ce accelerație se va mișca acest corp sub acțiunea altei forțe de 30 N?

6 2 p. Un corp alunecă pe o suprafață orizontală sub acțiunea unei forțe orizontale $F = 20 \text{ N}$ cu viteză constantă. Care este valoarea forței de frecare?

7 Un corp cu masa de $2,4 \text{ kg}$ se află în stare de repaus pe o suprafață orizontală când asupra lui acționează paralel cu suprafața o forță maximă de 6 N . Considerând $g = 10 \text{ m/s}^2$, determinați:

- 2 p. a) coeficientul de frecare de repaus dintre corp și suprafață;
- 2 p. b) coeficientul de elasticitate al unui resort cu ajutorul căruia corpul este urnit din loc, dacă alungirea lui este de 4 cm .

8 O greutate cu masa de 1 kg este suspendată de capătul unui resort cu rigiditatea de 200 N/m . Lungimea resortului în stare nedeformată este egală cu 20 cm . Considerând $g = 10 \text{ m/s}^2$, determinați lungimea resortului, dacă:

- 2 p. a) resortul este deformat de greutatea suspendată la capătul lui;
- 3 p. b) resortul cu greutatea suspendată la capătul lui se află într-un ascensor care se mișcă vertical în jos cu accelerația de 5 m/s^2 ;
- 3 p. c) ascensorul de la punctul b) se mișcă vertical în sus cu aceeași accelerație.

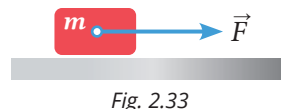


Fig. 2.33

Mișcarea sateliților artificiali. Vitezele cosmice

În paragraful 2.4, c a fost descrisă posibilitatea ca un corp să devină satelit artificial.

Să determinăm viteza v_h la care un corp oarecare devine satelit artificial. În acest scop, stabilim că unica forță ce acționează asupra lui este forța gravitațională $F = mg_h$ care-i imprimă o accelerație centripetă $a_c = v_h^2/r$. Din principiul fundamental al dinamicii

$$F = ma_c \text{ avem } mg_h = \frac{m v_h^2}{R+h}, \text{ de unde rezultă}$$

$$v_h = \sqrt{g_h (R+h)}. \quad (2.34)$$

Substituind expresia g_h pentru accelerația gravitațională la înălțimea h conform formulei (2.17), din (2.34) obținem

$$v_h = R\sqrt{g/(R+h)}. \quad (2.35)$$

Viteza care trebuie imprimată corpului în direcția perpendiculară pe raza cercului pe care el se va deplasa, devenind satelit artificial, depinde de înălțimea lui h deasupra suprafeței terestre. Dacă satelitul artificial se mișcă pe o traiectorie circulară din apropierea Pământului, adică $h \ll R$, atunci viteza lui este

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} \approx 7,9 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

și se numește **prima viteză cosmică**. Perioada de rotație (numită în astronomie și perioadă de revoluție) a acestui satelit, adică timpul unei rotații complete în jurul Pământului, are valoarea $T = 2\pi R/v_1 \approx 84$ min.

În cazul în care viteza de lansare a satelitului este mai mare decât prima viteză cosmică v_1 , traiectoria lui se transformă într-o elipsă (fig. 2.34). Odată cu creșterea vitezei de lansare apare posibilitatea învingerii câmpului gravitațional terestru. Viteza minimă la care un corp poate părăsi regiunea de atracție a Pământului este $v_{II} = \sqrt{2}v_1 \approx 11,2$ km/s și se numește **a doua viteză cosmică**. În acest caz traiectoria corpului

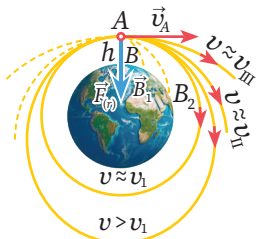


Fig. 2.34

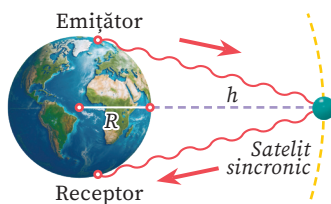


Fig. 2.35

degenerează din elipsă în parabolă și el nu se mai poate întoarce pe Pământ (fig. 2.34). Astfel, corpul poate ajunge în câmpul de gravitație al unei alte planete din Sistemul Solar și, după o anumită modificare a vitezei lui, devine satelit artificial al acesteia.

Este cunoscută și **a treia viteză cosmică** v_{III} , când corpul se mișcă pe o traiectorie hiperbolică (fig. 2.34). A treia viteză cosmică reprezintă viteza minimă necesară pentru lansarea unui corp de pe Pământ pentru ca acesta să poată părăsi Sistemul Solar și are valoarea egală aproximativ cu 16,7 km/s.

Un rol deosebit pentru asigurarea sistemelor de comunicații intercontinentale îl au așa-numiții **sateliți sincronici** sau **geostaționari** (fig. 2.35). Un satelit sincron se mișcă pe o orbită circulară, ecuatorială și în același sens cu rotația Pământului, astfel încât perioada lui de rotație coincide cu perioada de rotație a Pământului în jurul axei sale. În acest caz satelitul rămâne tot timpul deasupra unuia și aceluiași punct al Pământului, adică se află pe o orbită geostaționară. Întrucât Pământul face o rotație completă în $T_0 = 24$ de ore, iar $v_h = \frac{2\pi}{T_0} (R+h)$, din (2.37) obținem

$$\frac{4\pi^2 (R+h)^2}{T_0^2} = \frac{R^2 g}{(R+h)},$$

de unde rezultă că înălțimea h a satelitului sincron deasupra Pământului este

$$h = \sqrt[3]{\frac{R^2 T_0^2 g}{4\pi^2}} - R \approx 36000 \text{ km} \approx 5,6 R.$$

AUTOEVALUARE

- 1 Ce reprezintă prima viteză cosmică? Dar a doua?
- 2 Care satelit artificial este numit sincronic?
- 3 Ce viteză ar trebui să aibă un satelit artificial pentru ca el să se deplaseze pe o orbită circulară la altitudinea de 1 000 km deasupra suprafeței Pământului? Care este perioada de revoluție a acestuia? Masa și raza Pământului se vor considera egale cu $6 \cdot 10^{24}$ kg și 6 400 km, corespunzător.
- 4 Determinați prima viteză cosmică în condițiile planetei Marte, considerând raza ei de 3 400 km, iar accelerația gravitațională la suprafața planetei egală cu $3,8 \text{ m/s}^2$.
- 5 Un satelit artificial se află pe o orbită circulară la înălțimea $h = 3R$, unde R este raza Pământului. De câte ori perioada de revoluție a satelitului pe această orbită este mai mare decât perioada de revoluție de pe o orbită din apropierea Pământului?

Mișcarea sistemelor de corpuri legate între ele

Deseori în practică se întâlnesc situații în care se realizează mișcarea sistemelor de corpuri legate între ele. Algoritmul de rezolvare a problemelor în acest caz rămâne același ca și cel descris în paragraful 2.7*, dar cu anumite completări pe care le vom prezenta succint pentru fiecare **etapă** a schemei de rezolvare.

- 1 Se construiește schematic diagrama în care sunt reprezentate corpurile și condițiile în care acestea se află.
- 2 Se identifică toate forțele care acționează asupra corpurilor, inclusiv cele din legături, reprezentându-le în diagramă.
- 3 Se scrie principiul fundamental al dinamicii sub formă vectorială (2.6) pentru fiecare corp al sistemului cercetat în situația concretă a problemei.
- 4 Se alege câte un sistem de coordonate pentru fiecare direcție de mișcare a corpurilor și se determină unghiurile pe care le formează forțele și accelerația corpurilor cu axele lor.
- 5 Se trece de la ecuațiile vectoriale la ecuațiile scalare pentru proiecțiile pe axele de coordonate, iar sistemul de ecuații obținut se rezolvă în raport cu necunoscutele problemei.

Analizăm câteva exemple în care vom studia mișcarea corpurilor supuse legăturilor, aplicând consecutiv etapele enumerate mai sus.

I. Două corpuri cu masele m_1 și m_2 sunt legate cu un fir ideal și se află pe o suprafață orizontală. Asupra corpului cu masa m_1 acționează forța orizontală $\vec{F}_1$, iar asupra celui cu masa m_2 – forța $\vec{F}_2$ orientată sub un unghi α față de orizontală. Să se determine accelerația sistemului și forța de tensiune din fir, în cazul în care coeficientul de frecare la alunecarea ambelor corpuri este μ , iar mișcarea are loc în sensul acțiunii forței $\vec{F}_1$.

Rezolvare. Explicăm noțiunea de *fir ideal*, folosită în cazul sistemelor de corpuri legate între ele. Un *fir ideal* se consideră firul care este inextensibil, ușor flexibil și fără masă. Corpurile de la capetele firului ideal au în modül aceleași viteze și accelerații, iar forțele de tensiune din fire rămân invariabile de-a lungul lor.

Diagrama schematică în care sunt reprezentate corpurile de mase m_1 și m_2 are aspectul din figura 2.36.

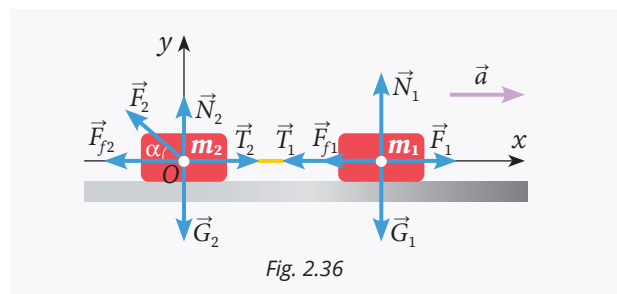


Fig. 2.36

Asupra corpurilor acționează forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ date în problemă, forțele de greutate $\vec{G}_1$ și $\vec{G}_2$, orientate vertical în jos; de reacțiune normală $\vec{N}_1$ și $\vec{N}_2$, orientate normal la suprafața de contact; de frecare $\vec{F}_{f1}$ și $\vec{F}_{f2}$, orientate în sens opus mișcării, și de tensiune din fir $\vec{T}_1$ și $\vec{T}_2$ (fig. 2.36).

După aplicarea ecuației (2.7), pentru corpurile cu masele m_1 și m_2 avem

$$\begin{cases} m_1 \vec{a} = \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + \vec{F}_1, \\ m_2 \vec{a} = \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2 + \vec{F}_2. \end{cases} \quad (2.36)$$

Alegerea convenabilă a sistemului de coordonate este foarte importantă pentru efectuarea calculelor. De obicei, acesta se alege astfel încât o axă să fie orientată în direcția și sensul accelerației, iar a doua – perpendicular pe ea. În figura 2.36 este reprezentat sistemul de coordonate legat cu centrul corpului de masă m_2 .

În proiecții pe axele sistemului de coordonate ales, ecuațiile (2.36) au forma

$$\begin{cases} m_1 a = F_1 - T_1 - F_{f1}, \\ 0 = N_1 - G_1, \\ m_2 a = T_2 - F_2 \cos \alpha - F_{f2}, \\ 0 = N_2 + F_2 \sin \alpha - G_2. \end{cases} \quad (2.37)$$

Din ecuațiile a doua și a patra ale sistemului de ecuații (2.37) se determină forțele de reacțiune normală N_1 și N_2 :

$$\begin{aligned} N_1 &= G_1 = m_1 g, \\ N_2 &= G_2 - F_2 \sin \alpha = m_2 g - F_2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Luând în considerare că $F_{f1} = \mu N_1$; $F_{f2} = \mu N_2$ și $T_1 = T_2 = T$ (firul care leagă corpurile este ideal), sistemul de ecuații (2.37) ia forma

$$\begin{cases} m_1 a = F_1 - T - \mu m_1 g, \\ m_2 a = T - F_2 \cos \alpha - \mu(m_2 g - F_2 \sin \alpha), \end{cases}$$

de unde se determină mărimile căutate:

$$\begin{aligned} a &= \frac{F_1 - F_2 \cos \alpha - \mu(m_1 g + m_2 g - F_2 \sin \alpha)}{m_1 + m_2}, \\ T &= F_1 - \mu m_1 g - m_1 a. \end{aligned}$$

II. Un corp cu masa m_1 se mișcă pe un plan înclinat de unghi α sub acțiunea altui corp cu masa $m_2 > m_1$ legat cu primul printr-un fir ideal trecut peste un scripete cu masă neglijabilă și fără frecări, situat în vârful planului. Coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe planul înclinat este μ . Determinați accelerația sistemului și forța de tensiune din fir.

Rezolvare. Diagrama schematică din această problemă este reprezentată în figura 2.37, unde sunt indicate și forțele care acționează asupra corpurilor.

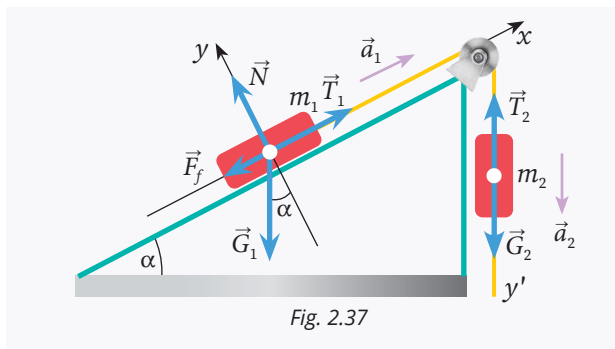


Fig. 2.37

Folosind ecuația (2.7) pentru corpurile de mase m_1 și m_2 , obținem

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{T}_1 - \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G}_1, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{T}_2 + \vec{G}_2. \end{cases} \quad (2.38)$$

Pentru rezolvarea problemei este mai convenabil să se aleagă pentru fiecare corp câte un sistem de coordonate, așa încât una dintre axe să fie orientată în sensul accelerației sale (fig. 2.37). În asemenea cazuri se mai spune că proiectarea se face pe direcția mișcării. Proiectând vectorii forțelor ce acționează asupra fiecărui corp pe axele de coordonate alese și luând în considerare că $|T_1| = |T_2| = T$ și $|a_1| = |a_2| = a$, sistemul (2.38) are aspectul

$$\begin{cases} m_1 a = T - G_1 \sin \alpha - \mu N, \\ m_2 a = G_2 - T, \\ 0 = N - G_1 \cos \alpha. \end{cases} \quad (2.39)$$

Deoarece $G = mg$, din ecuația a treia a sistemului (2.39) avem $N = m_1 g \cos \alpha$ și după adunarea primelor două ecuații se determină accelerația sistemului de corpuri:

$$a = g \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

Din relație se observă că mișcarea corpurilor în condițiile acestei probleme are loc dacă se îndeplinesc condiția:

$$m_2 \geq m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha).$$

Dacă introducem valoarea accelerației a în ecuația a doua a sistemului (2.39), obținem valoarea forței de tensiune a firului:

$$T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{m_1 + m_2}.$$

III. Determinați accelerațiile corpurilor cu masele m_1 și m_2 și forța de tensiune din fir în sistemul de scripete din figura 2.38. Se consideră că frecarea în scripete și masele lor sunt neglijabile, iar firul este ideal.

Rezolvare. În sistemul cercetat acționează forțele de greutate $\vec{G}_1 = m_1 g$, $\vec{G}_2 = m_2 g$ și forțele de tensiune din fire $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ și $\vec{T}_3$, egale în modül, arătate în figura 2.38. După aplicarea ecuației (2.7), pentru corpurile cu masele m_1 și m_2 avem

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{T}_1, \\ m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3. \end{cases} \quad (2.40)$$

Deoarece toate forțele și accelerațiile sunt orientate pe verticală, în acest caz este mai comod să se facă proiectiile vectorilor din ecuațiile (2.40) pe direcția mișcării și obținem

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T - G_1, \\ m_2 a_2 = G_2 - 2T. \end{cases} \quad (2.41)$$

Întrucât corpul cu masa m_1 parcurge în același timp o distanță de 2 ori mai mare decât corpul cu masa m_2 , rezultă că $a_1 = 2a_2$ și din (2.41), după unele transformări simple, avem soluția

$$a_2 = \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2} g; \quad a_1 = 2a_2; \quad T = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2}.$$

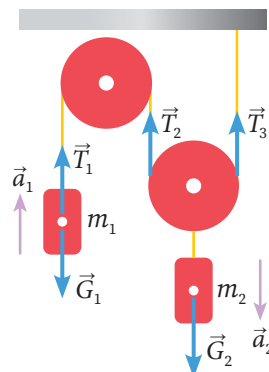


Fig. 2.38

AUTOEVALUARE

- Pe o masă netedă se află două corpuri cu masele $m_1 = 1 \text{ kg}$ și $m_2 = 3 \text{ kg}$, legate cu un fir ideal. Asupra lor acționează, respectiv, forțele $F_1 = 7 \text{ N}$ și $F_2 = 10 \text{ N}$, orientate în sensuri opuse de-a lungul firului. Neglijând frecarea, determinați accelerația corpurilor.
- ING** Două corpuri cu masele $m_1 = 3 \text{ kg}$ și $m_2 = 2 \text{ kg}$ sunt legate între ele cu un fir ideal trecut peste un scripete fixat în vârful unei prisme, ale cărei fețe formează două plane înclinate. Determinați accelerația corpurilor, dacă unghiurile de la baza planelor înclinate sunt, respectiv, $\alpha_1 = 60^\circ$ și $\alpha_2 = 30^\circ$, iar coeficientul de frecare la alunecarea lor $\mu = 0,2$.
- ING** Peste un scripete de masă neglijabilă și fără frecări este trecut un fir ideal, la capetele căruia sunt legate două corpuri cu masele $m_1 = 4 \text{ kg}$ și $m_2 = 4,1 \text{ kg}$. Care este tensiunea din fir și cu cât se deplasează corpurile unul față de altul în timp de 3 s, dacă în starea inițială corpurile se aflau în repaus? Accelerația gravitațională $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Sisteme de referință neinerțiale

După cum s-a menționat în paragrafele 2.1 – 2.3, legile lui Newton sunt valabile doar în sistemele de referință inerțiale.

Sistemele de referință care se mișcă cu accelerație în raport cu un sistem inerțial sunt numite neinerțiale. În sistemele neinerțiale principiile dinamicii nu mai sunt valabile.

Să continuăm analiza exemplului din paragraful 1.6 cu elevul din autobuz. La stație el intră în autobuz și stă liniștit. Dintr-odată, autobuzul pornește brusc din loc și elevul constată că involuntar se înclină în urmă. De ce elevul s-a înclinat în urmă fără să fie împins de cineva?

Din punctul de vedere al unui observator de pe Pământ (dintr-un sistem de referință inerțial), în momentul în care autobuzul a pornit din loc, în conformitate cu principiul inerției, elevul a rămas în stare de repaus. Din punctul de vedere al unui pasager din autobuz, elevul a început să se miște înapoi, de parcă cineva l-ar fi împins. Aceasta se întâmplă deoarece picioarele elevului sunt legate prin intermediul forțelor de frecare cu autobuzul și împreună cu el se deplasează înainte, iar corpul elevului, fiind în stare de repaus, rămâne pe loc.

Întotdeauna se poate identifica un sistem de referință inerțial, în care să fie descrisă mișcarea corpurilor cu ajutorul principiilor dinamicii, dar acest lucru nu este întotdeauna simplu, deoarece obligatoriu trebuie să se introducă forțele care acționează din partea legăturilor. Aceste forțe însă pot fi foarte diferite și nu există o abordare unică la descrierea lor.

Pentru aplicarea legilor lui Newton în sistemele de referință neinerțiale, de rând cu forțele ce acționează din partea corpurilor unul asupra altuia se mai introduc niște forțe care se deosebesc de cele reale, numite forțe de inerție.

Aceste forțe sunt introduse special pentru a avea posibilitatea să folosim principiile dinamicii și în sistemele neinerțiale. Ele sunt niște forțe fictive, deoarece nu există corpuri sau câmpuri care ar determina acțiunea lor. Așadar:

Forțele de inerție nu sunt determinate de interacțiunea corpurilor, ci de proprietățile sistemelor neinerțiale de referință.

Dacă se iau în considerare forțele de inerție, atunci legea a doua a lui Newton va fi valabilă în orice sistem de referință, inclusiv în cel neinerțial.

Produsul dintre masa unui corp și accelerația lui în sistemul de referință considerat este egal cu suma tuturor forțelor care acționează asupra lui, inclusiv cele de inerție.

În acest caz forțele de inerție $\vec{F}_{in}$ împreună cu forțele $\vec{F}$ determinate de acțiunea corpurilor unul asupra celuilalt vor imprima corpului o accelerație relativă $\vec{a}_r$ pe care acesta o posedă în sistemul de referință neinerțial, adică

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_{in}. \quad (2.42)$$

Rezultă că forțele de inerție sunt cauzate de mișcarea accelerată a sistemului de referință cercetat în raport cu un sistem inerțial. În continuare vom analiza cum se manifestă forțele de inerție în două cazuri frecvent întâlnite în viața de zi cu zi, și anume în cazul mișcării accelerate de translație și în cazul mișcării de rotație în raport cu un sistem de referință inerțial.

Considerăm o bilă de masă m suspendată la capătul unui fir legat de un suport fixat pe un cărucior (fig. 2.39). Când căruciorul este în repaus sau se mișcă uniform și rectiliniu, firul cu bila ocupă o poziție verticală, iar forța de greutate $m\vec{g}$ este echilibrată de forța de tensiune din fir $\vec{T}$. Dacă căruciorul este pus în mișcare de translație cu accelerația $\vec{a}$, atunci firul va începe să se abată de la verticală în sens opus mișcării cu un astfel de unghi α , încât forța rezultată $\vec{F} = m\vec{g} + \vec{T}$ să imprime bilei accelerația $\vec{a}$ egală cu cea a căruciorului și de același sens. Astfel, după cum rezultă și din figura 2.39, pentru valoarea forței rezultante ce acționează asupra bilei avem $F = mg \cdot \tan \alpha = ma$, de unde rezultă că valoarea unghiului de abatere a firului de la verticală $\tan \alpha = a/g$ este cu atât mai mare, cu cât este mai mare accelerația căruciorului.

Observăm că în sistemul de referință legat de căruciorul în mișcare accelerată bila este în stare de repaus. Aceasta însă este posibil doar dacă forța F este echilibrată de o forță $\vec{F}_{in}$ egală în mod

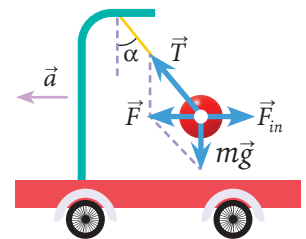


Fig. 2.39

și opusă ca sens cu prima. Aceasta și este forța de inerție. Așadar,

$$F_{in} = -ma. \quad (2.43)$$

Forțele de inerție care se manifestă în timpul mișcării de translație pot fi observate în unitățile de transport (autobuze, troleibuze, trenuri, microbuze ș.a.). De exemplu, atunci când unitatea de transport își mărește viteza, pasagerul care stă cu fața în direcția mișcării unității de transport este apăsător pe spătarul scaunului de către forța de inerție. Dacă însă unitatea de transport frânează brusc, atunci forța de inerție este orientată în sens opus, iar pasagerul este îndepărtat de spătarul scaunului.

Analizăm acum mișcarea de rotație a unui corp de masă m legat la capătul unui fir de lungime R (fig. 2.40). La fiecare moment de timp al acestei mișcări, corpul ar trebui să se deplaseze pe o linie dreaptă tangentă la cercul pe care acesta îl descrie. Corpul însă este legat de axa de rotație prin intermediul firului, iar acesta restricționează mișcarea pe linie dreaptă. Firul se întinde, în el apare o forță elastică, care acționează asupra corpului, imprimându-i accelerația centripetă a_c (1.48) orientată de-a lungul firului spre centrul de rotație.

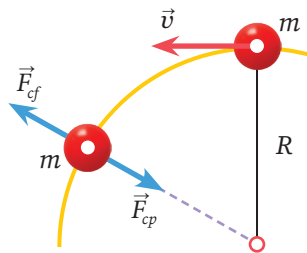


Fig. 2.40

Componenta forței (în caz general, a forțelor) care acționează asupra unui corp și-l face să se deplaseze pe o traiectorie curbă a fost numită convențional **forță centripetă** și are aspectul

$$F_{cp} = ma_c = \frac{mv^2}{R}. \quad (2.44)$$

Din punctul de vedere al unui observator din sistemul de referință neinertial (legat de corpul cu masa m care se rotește), trebuie să existe o forță de inerție care echilibrează forța centripetă, egală cu aceasta ca mărime și opusă ca sens (fig. 2.40). Această forță a fost numită **forță centrifugă**. Așadar,

$$F_{in} \equiv F_{cf} = -ma_c. \quad (2.45)$$

Luând în considerare expresiile pentru accelerația centripetă exprimată prin viteza liniară (1.48) și prin viteza unghiulară (1.52), modulul forței centrifuge este

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R. \quad (2.46)$$

Trebuie să menționăm că atât forța centripetă, cât și forța centrifugă au doar semnificația de forță, dar în realitate nu există, sunt niște forțe fictive. Forța centripetă este aplicată corpului în mișcare de rotație, iar forța centrifugă este aplicată firului de legătură. Ambele forțe sunt forțe de inerție și apar ca o manifestare a comportamentului sistemului de referință neinertial.

AUTOEVALUARE

- 1 Care sistem de referință este numit inertial? Dar neinertial?
- 2 Ce reprezintă forțele de inerție? Prin ce se deosebesc ele de forțele care acționează în sistemele de referință neinertiale?
- 3 Când și de ce trebuie luate în considerare forțele de inerție?
- 4 Scrieți ecuația legii a doua a lui Newton într-un sistem de referință neinertial.
- 5 Cum se manifestă forțele de inerție în cazul mișcării de translație a sistemului neinertial?
- 6 Ce reprezintă forțele centripetă și centrifugă? Cum și asupra cui acționează aceste forțe?
- 7 De tavanul vagonului unui tren care se mișcă pe o porțiune de drum orizontală este suspendat un corp cu masa de 200 g. La un moment asupra vagonului începe să acționeze forța de frecare ce constituie 35% din greutatea vagonului. Determinați: a) unghiul de deviere a firului față de verticală; b) forța de întindere a firului.
- 8 **ING** De-a lungul axei de rotație a unui disc este fixată o bară. De capătul superior al barei este legat un fir cu lungimea $l = 20$ cm, de care este suspendată o bilă mică. Cu ce viteză unghiulară trebuie să se rotească discul pentru ca firul cu bila să devieze de la verticală cu un unghi $\alpha = 60^\circ$?

În problemele 7 și 8 se va lua $g = 10 \text{ m/s}^2$.



IMPULSUL MECANIC. LUCRUL ȘI ENERGIA MECANICĂ

3.1

Impulsul punctului material. Teorema variației și legea conservării impulsului punctului material

a Impulsul mecanic

Considerăm un corp care poate fi aproximat cu un punct material. Notăm masa lui cu m , iar rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra lui cu $\vec{F}$. În conformitate cu principiul fundamental al dinamicii, avem

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (3.1)$$

unde accelerația imprimată de rezultanta $\vec{F}$ este $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Intervalul de timp Δt se consideră destul de mic și pe parcursul lui forța $\vec{F}$ rămâne, practic, constantă. Dacă însă forța $\vec{F}$ este constantă, intervalul Δt poate lua orice valoare.

Variația vitezei $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, prin urmare, accelerația $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$. Substituind această expresie în relația (3.1), obținem

$$\frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (3.2)$$

Introducem o mărime fizică nouă, notată cu $\vec{p}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (3.3)$$

Mărimea $\vec{p}$ este numită impuls mecanic al corpului (al punctului material) sau cantitate de mișcare.

Impulsul punctului material este egal cu produsul dintre masa și viteza lui.

Unitatea de impuls $[p] = [m] \cdot [v] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$.

Din definiția (3.3) observăm că impulsul corpului reprezintă o mărime fizică vectorială care are aceeași direcție și sens ca și viteza. Deoarece viteza este relativă, impulsul, de asemenea, constituie o mărime relativă, adică dependentă de sistemul de referință inerțial față de care este descrisă mișcarea.

b* Teorema variației și legea conservării impulsului punctului material

Substituim $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$ și $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$ – impulsurile corpului la momentele t_1 și t_2 , adică la începutul și, respectiv, la sfârșitul intervalului Δt – în relația (3.2):

$$\frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{F}.$$

Dar $\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$ este variația impulsului. Astfel, obținem

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (3.4)$$

Raportul variației impulsului punctului material la intervalul respectiv de timp este egal cu rezultanta forțelor ce acționează asupra lui.

Relația (3.4) poate fi scrisă:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t. \quad (3.5)$$

Variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței rezultante aplicate punctului material în interval de timp corespunzător.

Notăm cu $\vec{H}$ mărimea fizică egală cu produsul dintre forță și durată acțiunii ei:

$$\vec{H} = \vec{F} \cdot \Delta t. \quad (3.6)$$

Această mărime poartă denumirea de impuls al forței.

Unitatea de impuls al forței ($N \cdot s = kg \cdot m/s$) este aceeași ca și a impulsului corpului.

Relațiile (3.4) și (3.5) sunt două expresii matematice ale aceleiași teoreme a variației impulsului punctului material.

Din relația (3.5) observăm că variația impulsului corpului este determinată nu numai de valoarea forței aplicate, ci și de durată acțiunii ei. Astfel, o forță mai mică acționând timp îndelungat poate produce aceeași variație a impulsului corpului ca și o forță mai mare, dar de durată mai mică de acțiune.

Impulsul forței poate fi calculat și printr-o metodă grafică. Admitem mai întâi că forța este constantă. Construim graficul forței pentru intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, în care ea acționează (fig. 3.1, a). Observăm că

Impulsul forței $F\Delta t = F(t_2 - t_1)$ este numeric egal cu aria dreptunghiului de sub graficul forței.

Impulsul forței de modül variabil și de direcție constantă se calculează ca suma impulsurilor acestei forțe pentru mai multe intervale mai mici Δt_i , în care este divizat intervalul $(t_2 - t_1)$. Pe parcursul intervalului mic Δt_i , variația forței este destul de mică, astfel încât se poate considera că valoarea ei F_i rămâne constantă. Impulsul forței pentru acest interval $F_i\Delta t_i$ este numeric egal cu aria unei fâșii înguste (fig. 3.1, b). Adunării impulsurilor forței $F_i\Delta t_i$ îi corespunde adunarea ariilor tuturor fâșiilor de sub grafic. Rezultă că

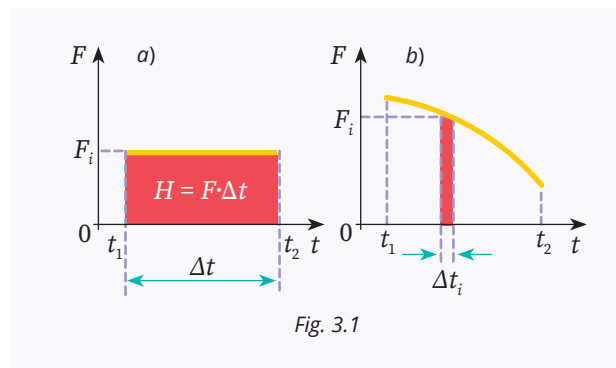


Fig. 3.1

Impulsul forței este numeric egal cu aria figurii delimitate de graficul forței, axa timpului și segmentele care trec prin extremitățile graficului forței paralel la axa ordonatelor.

Admitem că rezultanta $\vec{F}$ a forțelor aplicate corpului este nulă. Această situație se constată și în cazul particular al corpului izolat, adică al corpului ce nu interacționează cu alte corpuri. Substituind $\vec{F} = 0$ în relația (3.4) sau în (3.5), obținem $\Delta\vec{p} = 0$. Variația unei mărimi este nulă atunci când această mărime este constantă, în cazul de față avem $\vec{p} = \text{const.}$:

$$\vec{p} = \text{const.}, \text{ dacă } \vec{F} = 0. \quad (3.7)$$

Impulsul punctului material se conservă, dacă rezultanta forțelor aplicate lui este egală cu zero.

Aceasta este legea conservării impulsului pentru un punct material.

Din legea conservării impulsului (3.7) și din definiția lui (3.3) rezultă că viteza $\vec{v} = \text{const.}$, adică punctul material se mișcă rectiliniu uniform, dacă rezultanta forțelor aplicate lui este nulă. Această concluzie arată că legea conservării (3.7) se află în concordanță cu principiul inerției.

Problemă REZOLVATĂ

Un automobil cu masa $m = 1\,500\text{ kg}$ se mișcă cu viteza $v_1 = 9\text{ m/s}$. La intersecție automobilul cotește pe o stradă perpendiculară și își mărește viteza până la $v_2 = 12\text{ m/s}$. Determinați variația impulsului automobilului. Care ar fi variația impulsului, dacă automobilul și-ar mări viteza fără a-și schimba direcția mișcării?

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} m &= 1\,500\text{ kg}, \\ v_1 &= 9\text{ m/s}, \\ v_2 &= 12\text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\Delta p = ?, \Delta p' = ?$$

Impulsul automobilului până la intersecție a fost $\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$, iar după intersecție a devenit $\vec{p}_2 = m\vec{v}_2$, vectorul $\vec{p}_2$ fiind perpendicular pe $\vec{p}_1$. Variația impulsului automobilului $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ sau $\vec{p}_2 = \vec{p}_1 + \Delta\vec{p}$. Construim vectorii respectivi (fig. 3.2). Din figură observăm că:

$$\Delta p = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}, \text{ deci } \Delta p = m\sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Efectuând calculele, pentru variația impulsului automobilului obținem valoarea $\Delta p = 22\,500\text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Când automobilul nu-și schimbă direcția mișcării, vectorii $\vec{p}_1$ și $\vec{p}_2$ sunt coliniari și variația impulsului $\Delta p' = p_2 - p_1 = m(v_2 - v_1)$; $\Delta p' = 4\,500\text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

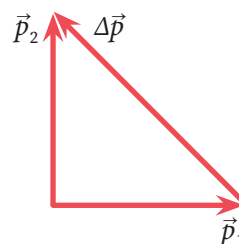


Fig. 3.2

AUTOEVALUARE

- 1 Definiți impulsul unui corp. Cum este orientat?
- 2 Depinde oare impulsul corpului de sistemul de referință ales? Ilustrați prin exemple.
- 3* Ce se numește impuls al forței? În ce sens este orientat?
- 4* Formulați teorema variației impulsului punctului material.
- 5 Un cărucior cu masa $m_1 = 18\text{ kg}$ se mișcă cu viteza $v_1 = 6\text{ m/s}$, iar un alt cărucior cu masa $m_2 = 40\text{ kg}$ se mișcă cu viteza $v_2 = 1,8\text{ m/s}$. Impulsul cărui cărucior este mai mare și de câte ori?
- 6 Se știe că două corpuri cu masele $m_1 = 1,8\text{ kg}$ și $m_2 = 3,2\text{ kg}$ au impulsuri egale. Care este viteza v_2 a corpului al doilea, dacă viteza primului corp $v_1 = 4,8\text{ m/s}$?
- 7* Un corp cu masa $m = 0,4\text{ kg}$ se mișcă pe un cerc, având viteza de valoare constantă $v = 1,5\text{ m/s}$. Care este valoarea impulsului corpului? Determinați variația impulsului acestui corp:
 - a într-o perioadă de rotație;
 - b într-o jumătate de perioadă;
 - c într-un sfert de perioadă;
 - d în a șasea parte din perioada de rotație.
- 8 Impulsul total a două corpuri cu masele $m_1 = 4\text{ kg}$ și $m_2 = 1\text{ kg}$ ce se mișcă pe un plan orizontal sub un unghi drept unul față de celălalt este egal cu $15\text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Care este viteza corpului al doilea, dacă viteza primului corp $v_1 = 3\text{ m/s}$?
- 9* **ING** Un automobil cu masa $m = 1\,200\text{ kg}$ se mișcă pe o porțiune rectilinie de drum cu viteza $v = 15\text{ m/s}$. La un moment dat el începe să frâneze cu o accelerație a cărei valoare este $a = 2,5\text{ m/s}^2$. Care este impulsul automobilului după $t = 3\text{ s}$ de la începutul frânării?
- 10* Impulsul unui cărucior $p = 120\text{ kg} \cdot \text{m/s}$. În cât timp el se va opri fiind acționat de o forță medie de frânare $F_f = 48\text{ N}$?
- 11 **ING** Într-un test de impact, un automobil cu masa de 1500 kg se ciocnește de un perete și sare înapoi pe aceeași direcție în sens opus. Vitezele automobilului până la ciocnire și după sunt egale cu 54 km/h și, respectiv, cu 9 km/h . Considerând că durată impactului este de $0,15\text{ s}$, determinați:
 - a impulsul transmis automobilului în urma impactului;
 - b valoarea forței medii exercitate asupra automobilului.

Impulsul sistemului de puncte materiale. Teorema variației și legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale

Fie un sistem de puncte materiale. Notăm masele lor cu $m_1, m_2, \dots$, iar vitezele, respectiv, cu $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$. Impulsurile acestor puncte materiale sunt $\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1, \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2, \dots$.

Suma impulsurilor tuturor punctelor materiale din componența unui sistem se numește impuls al sistemului de puncte materiale:

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots \quad (3.8)$$

Impulsurile $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots$ sunt mărimi vectoriale, deci suma din definiția (3.8) este o sumă vectorială.

a Forțe interne și externe. Proprietatea forțelor interne

Punctele materiale din componența sistemului interacționează atât între ele, cât și cu corpurile ce nu fac parte din componența lui. Forțele care acționează asupra punctelor materiale ale unui sistem se clasifică în forțe interne și forțe externe.

Forțe interne sunt forțele de interacțiune dintre punctele materiale care constituie sistemul. Aceste forțe se notează cu doi indici: primul arată punctul material asupra căruia se acționează, iar al doilea punctul ce acționează cu această forță. De exemplu, $\vec{F}_{32}$ este forța care acționează asupra punctului material 3 din partea punctului 2.

Forțele de interacțiune dintre punctele materiale ale sistemului cu corpurile ce nu fac parte din el sunt numite **forțe externe**. Notăm cu $\vec{F}_1$ rezultanta forțelor externe aplicate punctului material 1, cu $\vec{F}_2$ rezultanta forțelor externe care acționează asupra punctului 2 etc.

Deoarece în baza principiului acțiunii și reacțiunii forțele de interacțiune dintre fiecare pereche de puncte materiale a sistemului sunt egale în moduli și orientate în sensuri opuse de-a lungul dreptei-suport comune, suma lor este egală cu zero. Astfel, putem afirma că

Rezultanta forțelor interne dintr-un sistem de puncte materiale este egală cu zero.

Aceasta este o proprietate caracteristică forțelor interne, independentă de natura lor.

b Teorema variației impulsului sistemului de puncte materiale

Considerăm un sistem din două puncte materiale. Notăm impulsurile lor cu $\vec{p}_1$ și $\vec{p}_2$, iar forțele – după cum s-a convenit mai sus (fig. 3.3). Asupra fiecărui punct din sistem acționează o forță internă și mai multe forțe externe, a căror rezultantă este reprezentată în figură. Pornind de la aceasta, scriem teorema variației impulsului (3.5) pentru fiecare punct material în parte:

$$\Delta \vec{p}_1 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12}) \Delta t, \quad (3.9)$$

$$\Delta \vec{p}_2 = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21}) \Delta t.$$

Adunăm aceste relații, luând în considerare faptul că rezultanta forțelor interne este nulă. Obținem

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Delta t. \quad (3.10)$$

Deoarece suma variațiilor impulsurilor este egală cu variația sumei lor $\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \Delta \vec{\mathcal{P}}$, unde $\vec{\mathcal{P}}$ constituie impulsul sistemului, iar $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$ este rezultanta forțelor externe aplicate celor două puncte materiale, transcriem relația (3.10) în forma următoare:

$$\Delta \vec{\mathcal{P}} = \vec{F} \Delta t. \quad (3.11)$$

Această relație exprimă **teorema variației impulsului mecanic** al unui sistem de puncte materiale.

Variația impulsului unui sistem de puncte materiale este egală cu impulsul rezultantei tuturor forțelor externe care acționează asupra sistemului.

Teorema a fost stabilită pentru un sistem de două puncte materiale. Ținând seama de proprietatea forțelor interne stabilită mai sus, conchidem că teorema formulată este aplicabilă oricărui sistem de puncte materiale.

Din relațiile (3.9) rezultă că forțele interne pot modifica impulsul fiecărui punct material în parte,

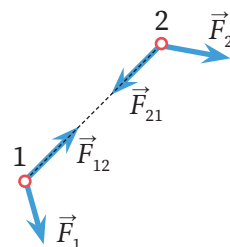


Fig. 3.3

dar din (3.11) observăm că ele nu pot modifica impulsul sistemului. Cu alte cuvinte, forțele interne modifică impulsurile punctelor din componența sistemului astfel încât suma variațiilor lor este nulă și nu provoacă variația impulsului sistemului.

C Legea conservării impulsului sistemului de puncte materiale. Aplicații

Considerăm cazul în care rezultanta forțelor externe aplicate sistemului este nulă ($\vec{F}=0$) sau sistemul este izolat. În acest caz, din (3.11) rezultă că variația impulsului mecanic al sistemului de asemenea este nulă ($\Delta\vec{p}=0$), ceea ce arată că impulsul $\vec{p} = \text{const.}$

Am obținut **legea conservării impulsului mecanic al sistemului de puncte materiale.**

Impulsul sistemului de puncte materiale se conservă în timp, dacă rezultanta forțelor externe aplicate sistemului este nulă:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots = \text{const.} \quad (3.12)$$

Legea conservării impulsului mecanic este o lege fundamentală a naturii.

Ea poate fi aplicată și în cazul în care rezultanta forțelor externe este diferită de zero, dacă în sistem acționează, pe parcursul unui interval scurt de timp Δt , forțe interne de intensitate mult mai mare decât cele externe. Într-un astfel de interval de timp forțele externe nu reușesc să modifice considerabil impulsul total al sistemului de puncte materiale, dar forțele interne modifică esențial impulsurile punctelor din sistem. Cu alte cuvinte, variațiile impulsurilor punctelor pe parcursul intervalului scurt de timp Δt sunt considerabile, dar suma acestor variații este aproximativ egală cu zero.

Un exemplu de situații de acest gen sunt ciocniri-le corpurilor. La ciocnire corpurile vin în contact și în timpul unei interacțiuni de durată scurtă, când forțele elastice devin destul de mari, impulsurile corpurilor capătă variații a căror sumă este egală cu zero. Deci suma impulsurilor corpurilor înainte de ciocnire este egală cu suma impulsurilor lor după ciocnire. Notăm masele corpurilor cu m_1 și m_2 , vitezele lor înainte de ciocnire cu $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$, iar după ciocnire – cu $\vec{u}_1$ și $\vec{u}_2$ (fig. 3.4). Legea conservării impulsului pentru această ciocnire se va scrie sub forma

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2. \quad (3.13)$$

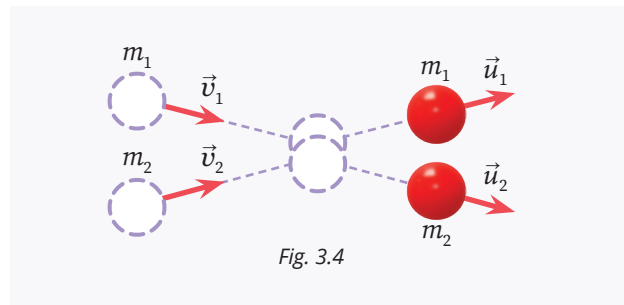


Fig. 3.4

Un caz particular de ciocnire reprezintă **ciocnirea plastică** sau **neelastică**, adică ciocnirea în urma căreia corpurile ce vin în contact formează un corp comun. De exemplu, un băiat care aleargă și apoi sare într-un cărucior aflat în repaus sau în mișcare; două vagoane de tren care se cuplează; două bile de plastilină care după ciocnire formează un singur corp ș.a. Masa corpului obținut în urma ciocnirii m este egală cu suma maselor corpurilor înainte de ciocnire: $m = m_1 + m_2$, iar viteza lui după ciocnire a devenit egală cu u .

Deci în cazul ciocnirilor plastice relația (3.13) devine

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u},$$

de unde

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.14)$$

O situație „inversă în timp” ciocnirii plastice este divizarea rapidă a unui corp sub acțiunea forțelor interne în mai multe fragmente (fig. 3.5).

Să analizăm un caz particular de aplicare a legii conservării impulsului.

Considerăm arma unui vânător care la momentul tragerii se afla în repaus ($v = 0$). Notăm cu m_1 și m_2 masa glonțului și a armei, cu u_1 viteza glonțului și cu u_2 viteza armei – viteza de recul. Relația (3.13) devine

$$0 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2,$$

de unde determinăm viteza de recul a armei:

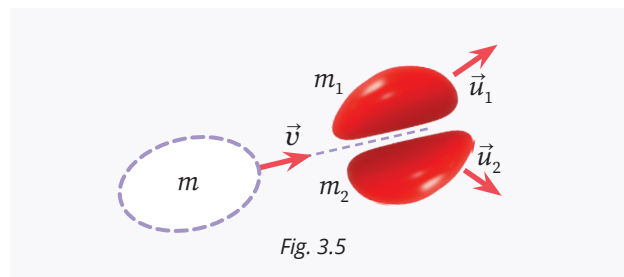


Fig. 3.5

$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1 \vec{u}_1}{m_2}. \quad (3.15)$$

Viteza de recul este orientată în sens opus vitezei obținute de glonț și este mai mică decât viteza acestuia de atâtea ori de câte ori masa armei este mai mare decât masa glonțului.

Menționăm că în unele cazuri se conservă doar proiecțiile impulsului mecanic pe unele direcții, fără a se conserva pe alte direcții. De exemplu, considerăm un sistem de puncte materiale într-o regiune limitată din apropierea Pământului, astfel încât să putem considera accelerația gravitațională $g = \text{const}$. Forțe externe sunt doar forțele de greutate. Rezultanta lor este orientată vertical în jos, proiecțiile ei pe orice direcție orizontală sunt nule. Atunci, după cum rezultă din relația (3.11), se conservă numai proiecția impulsului mecanic al sistemului pe orice direcție orizontală, dar pe orice alte direcții nu se conservă.

d Mișcarea reactivă

Mișcarea reactivă a corpului este o aplicație a legii conservării impulsului mecanic. Ea este condiționată de forțele interne care separă unele părți ale corpului și imprimă acestora o viteză oarecare. Forțele interne nu modifică impulsul sistemului, deci variația impulsului părții rămase din corp și variația impulsului părților separate de el sunt egale în modül și orientate în sensuri opuse. Ca rezultat, partea rămasă din corp se mișcă în sens opus vitezei părților separate de el.

Un exemplu simplu de mișcare reactivă observăm atunci când umflăm un balon și îl lăsăm liber, fără a-i lega orificiul: aerul din balon iese, iar balonul se mișcă în partea opusă.

Unele vietăți se deplasează aplicând aceeași lege. De exemplu, calmarul și caracatița, expulzând periodic apa, dezvoltă viteze de până la $60 \div 70 \text{ km/h}$.

Să reprezentăm schematic o rachetă cosmică (fig. 3.6) și să analizăm mișcarea reactivă a ei. Partea din față 1 conține încărcătura utilă – aparatura științifică, cosmonauții și toate cele necesare pentru asigurarea vieții lor. Partea centrală 2 conține combustibilul și rezervele de oxidant destinate menținerii arderii. În partea din spate a



Fig. 3.6

rachetei se află camera de combustie 3, unde arde combustibilul și de unde gazele rezultate, aflate la temperaturi ridicate și presiune înaltă, ies cu viteze mari.

Pentru simplitate, vom admite că toate gazele obținute în urma arderii combustibilului ies din rachetă simultan – nu treptat, așa cum se produce în realitate. Vom nota cu m_r masa utilă a rachetei (după expulzarea gazelor), cu m_g masa gazelor expulzate din ea, cu v_r viteza obținută de rachetă și cu v_g viteza gazelor expulzate, ambele viteze fiind în raport cu un sistem de referință legat cu Pământul. Inițial aeronava se află pe Pământ, în repaus, impulsul ei este egal cu zero. Considerând că durata expulzării gazelor este destul de mică, putem neglija impulsul forței de greutate în comparație cu impulsurile forțelor interne. În acest caz, impulsul mecanic se conservă, adică impulsul sistemului format din corpul rachetei și din gazele expulzate rămâne egal cu zero:

$$0 = m_r \vec{v}_r + m_g \vec{v}_g.$$

De aici exprimăm viteza rachetei:

$$\vec{v}_r = -\frac{m_g}{m_r} \cdot \vec{v}_g. \quad (3.16)$$

Semnul minus arată că viteza rachetei $\vec{v}_r$ este orientată în sens opus vitezei $\vec{v}_g$ cu care sunt expulzate gazele. Din formula (3.16) se observă că viteza rachetei poate fi mărită pe două căi: majorând raportul dintre masa gazelor expulzate și masa utilă a rachetei sau mărinđ viteza de expulzare a gazelor. În urma arderii combustibilului, viteza gazelor expulzate poate atinge valori de circa $4\,000 \text{ m/s}$. Pentru a mări raportul dintre masa gazelor și masa utilă a rachetei, aceasta se construiește în mai multe trepte – pe măsura arderii combustibilului, treptele care-l conțineau sunt separate, astfel masa rachetei se micșorează, ceea ce duce la creșterea rapidă a vitezei ei.

Este bine să știți

În jumătatea a doua a secolului XX s-au obținut succese deosebite în construirea rachetelor, au fost lansate nave cosmice și stații cosmice. La 4 octombrie 1957, în Uniunea Sovietică, a fost lansat primul satelit artificial al Pământului, iar la 12 aprilie 1961, Yuri Gagarin, la bordul navei cosmice „Vostok”, a efectuat pentru prima dată o rotație completă în jurul Pământului. În iulie 1969, astronauții americani Neil Armstrong și Edwin Aldrin au făcut primii pași pe Lună, unde s-au aflat 21 h și 36 min. Colegul lor Michael Collins în acest timp orbita Luna.

la bordul navei „Apollo 11”. Au fost lansate nave cosmice nu numai în jurul Pământului și spre satelitul său natural Luna, ci și spre planetele Sistemului Solar: de la cele apropiate – Venus și Marte – până la planete mai îndepărtate – Uranus și Neptun. De peste 20 de ani în jurul Pământului orbitează stația spațială internațională care reunește, într-un singur program multinațional, cinci mari agenții spațiale: NASA (Statele Unite ale Americii), RKA (Rusia), ESA (o asociație de peste 20 de țări europene), JAXA (Japonia) și CSA (Canada). Primii astronauți au ajuns pe această stație la 2 noiembrie 2000 și de atunci stația este locuită continuu de astronauți și cosmonauți din diferite state ale lumii.

Analizează și aplică!

- ▶ Umflați un balonaș și, fără să-l legați pentru a închide aerul, eliberați-l. Explicați mișcarea balonașului după eliberare.
- ▶ Două corpuri, unul dintre care este în repaus se ciocnesc. Este posibil ca după ciocnire ambele corpuri să fie în repaus? Dar numai unul? Explicați.
- ▶ O bilă de plastilină cu masa m este aruncată cu viteza v într-un perete de cărămidă. Plastilina se lipește de perete și se oprește. Se respectă sau nu legea conservării impulsului în acest caz?

AUTOEVALUARE

- 1 Pot oare forțele interne să modifice impulsul sistemului de puncte materiale? Argumentați răspunsul.
- 2 În ce condiții impulsul sistemului de puncte materiale se conservă?
- 3 Poate un motor cu reacție să accelereze o rachetă în afara atmosferei Pământului?
- 4 Un elev a hotărât să perfecționeze barca sa cu pânze. A instalat pe ea o pompă de aer și un acumulator ce-o pune în mișcare. Încotro trebuie să fie orientat jetul de aer al pompei, pentru a mări viteza bărcii?
- 5 Un cărucior cu masa $m_1 = 20$ kg se deplasează rectiliniu cu viteza $v_1 = 2,8$ m/s pe un drum orizontal. La un moment în el este aruncat vertical în jos un sac cu masa $m_2 = 50$ kg. Care este viteza mișcării ulterioare a căruciorului cu sacul în el?
- 6 O elevă cu masa $m_1 = 50$ kg aleargă cu viteza $v_1 = 6$ m/s, ajunge din urmă un cărucior cu masa $m_2 = 30$ kg ce se mișcă cu viteza $v_2 = 2$ m/s și sare în el. Determinați viteza căruciorului în care se află eleva.
- 7 Masa unei luntre cu vânătorul în ea este $m = 180$ kg. Din luntrea aflată în repaus, vânătorul trage un foc orizontal, de-a lungul ei. Care este viteza de recul a luntrii și a vânătorului din ea, dacă masa glonțului $m = 0,01$ kg, iar viteza lui $v = 900$ m/s?
- 8 Pe o masă netedă orizontală se mișcă pe direcții perpendiculare două bile de plastilină. Masele lor sunt $m_1 = 0,3$ kg și $m_2 = 0,2$ kg, iar vitezele $v_1 = 8$ m/s și $v_2 = 16$ m/s. Care este viteza corpului obținut în urma ciocnirii plastice a celor două bile și ce unghi β formează cu viteza $\vec{v}_1$?
- 9 Un corp cu masa m s-a divizat în punctul superior al traiectoriei sale, unde viteza lui era $v = 20$ m/s, în două fragmente cu masele $m_1 = 0,4m$ și $m_2 = 0,6m$. Determinați vitezele fragmentelor imediat după divizarea corpului, știind că în acest moment viteza fragmentului cu masa mai mică formează un unghi $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala, iar viteza fragmentului al doilea este orientată vertical în jos.
- 10 **BIO** Absorbînd și apoi ejectând apa sub formă de jet, calmarii se deplasează cu viteze destul de mari. Ce viteză ar atinge un calmar cu masa de 2,5 kg aflat în stare de repaus prin absorbirea și ejectarea a 0,5 kg de apă cu o viteză de 4,5 m/s? Forțele de rezistență asupra calmarului se neglijează.
- 11 **ING** Masa unei rachete cosmice și a combustibilului ei $m = 4 \cdot 10^5$ kg. Determinați masa totală a combustibilului și a oxidantului ce trebuie consumat pentru a imprima rachetei prima viteză cosmică $v = 7,9 \cdot 10^3$ m/s, dacă se știe că produsele arderii sunt expulzate din rachetă cu viteza $u = 3,5 \cdot 10^3$ m/s. Pentru simplitate se va considera că arderea combustibilului care se produce treptat va fi realizată instantaneu.

Lucrul mecanic. Puterea

a Lucrul mecanic al forței constante

Considerăm un corp de forma unui paralelipiped aflat pe o podea orizontală. Presupunem că forța $\vec{F}$ aplicată corpului pentru a-l mișca este orizontală și constantă, iar traiectoria corpului pe podea este rectilinie și paralelă forței. Dacă distanța parcursă (modulul vectorului deplasare) este egală cu s , atunci în decursul mișcării corpului forța $\vec{F}$ a efectuat un lucru mecanic egal cu

$$L = F \cdot s. \quad (3.17)$$

Această expresie pentru lucrul mecanic al forței constante vă este cunoscută încă din clasa a VII-a.

În conformitate cu definiția, un joule (1 J) este lucrul mecanic efectuat de o forță constantă egală cu 1 N la deplasarea punctului său de aplicație cu 1 m de-a lungul dreptei suport a forței în sensul acesteia. $[L] = [F] \cdot [s] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$.

În practică, cel mai frecvent, forța formează un unghi oarecare cu direcția deplasării corpului (fig. 3.7). Admitem că forța $\vec{F}$ este constantă, deplasarea $\vec{s}$ a corpului este rectilinie, deci unghiul α este constant. În acest caz, lucrul mecanic pe distanța s este definit de relația

$$L = Fs \cdot \cos \alpha. \quad (3.18)$$

Lucrul mecanic efectuat de o forță constantă în cazul mișcării rectilinii a corpului este mărimea scalară egală cu produsul dintre valoarea forței, a distanței parcurse de punctul ei de aplicație și cosinusul unghiului dintre vectorul forță și vectorul deplasare.

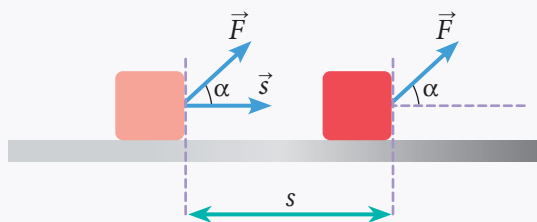


Fig. 3.7

Să analizăm formula (3.18). Pentru unghiuri $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ (fig. 3.8, a) avem $\cos \alpha > 0$, deci lucrul mecanic este pozitiv. Forțele care efectuează lucru pozitiv au fost numite **forțe motoare**, iar lucrul lor se numește **lucru motor** sau **activ**. Dacă unghiul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (fig. 3.8, b), atunci $\cos \alpha = 0$, lucrul mecanic al forței este egal cu zero. Dacă însă unghiul $\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$, avem $\cos \alpha < 0$ și lucrul mecanic este negativ (fig. 3.8, c). Forțele al căror lucru mecanic este negativ se numesc **forțe rezistente**, iar lucrul lor – **lucru rezistent**.

Considerăm un exemplu: mișcarea săniuței pe un drum orizontal (fig. 3.9). Asupra ei acționează forța de tracțiune $\vec{F}_t$, forța de greutate $\vec{G}$, reacțiunea normală $\vec{N}$ și forța de frecare $\vec{F}_f$. Lucrul mecanic al forței de tracțiune este pozitiv (unghiul α_1 este ascuțit), lucrul forței de frecare este negativ (unghiul $\alpha_4 = \pi$), iar lucrul mecanic al forței de greutate și al reacțiunii normale este egal cu zero (unghiurile $\alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$).

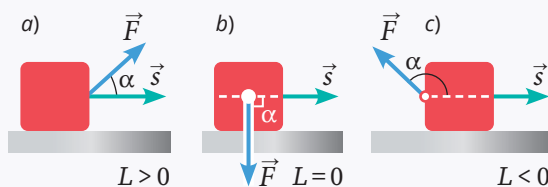


Fig. 3.8

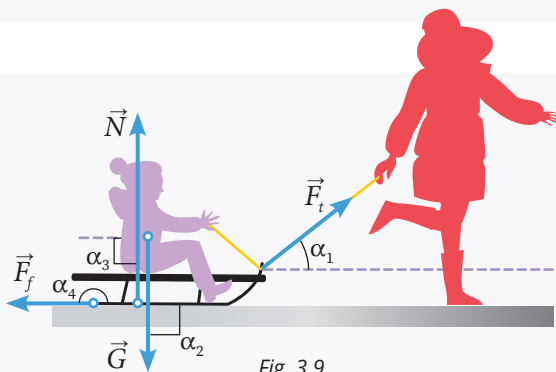


Fig. 3.9



James Prescott JOULE (1818–1889), fizician englez

A studiat efectul termic al curentului electric (1841) și a stabilit, independent de Lenz, legea care exprimă cantitatea de căldură degajată în conductorul parcurs de curentul electric (legea Joule–Lenz). A contribuit la fundamentarea legii conservării și transformării energiei, a cercetat transformarea lucrului mecanic în căldură și invers, a determinat experimental echivalentul mecanic al căldurii (1843). A stabilit că energia internă a gazelor, la presiuni nu prea mari, aflate la temperatură constantă, nu depinde de volum (legea lui Joule).

Expresia (3.18) pentru lucrul mecanic poate fi scrisă sub alte forme. Mărimea $F \cdot \cos \alpha$ este proiecția forței $\vec{F}$ pe direcția deplasării $\vec{s}$, adică $F \cdot \cos \alpha = F_s$. Formula (3.18) ia forma

$$L = \vec{F}_s \cdot \vec{s}. \quad (3.19)$$

În algebra vectorială se definește produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ ca mărimea scalară c egală cu produsul modulelor vectorilor ce se înmulțesc și cosinusul unghiului α dintre ei:

$$c = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = ab \cos \alpha. \quad (3.20)$$

Folosind definiția produsului scalar, expresia (3.18) se va scrie sub forma

$$L = (\vec{F} \cdot \vec{s}). \quad (3.21)$$

Lucrul mecanic poate fi determinat și printr-o metodă grafică. Construim graficul proiecției F_s în funcție de coordonata x a punctului de aplicație al forței $\vec{F}$, axa Ox fiind orientată de-a lungul vectorului deplasare $\vec{s}$. Admitem că proiecția F_s este constantă și pozitivă. Graficul respectiv este reprezentat în figura 3.10, a. Valoarea deplasării punctului de aplicație al forței este $s = x_2 - x_1$. Din figură se vede

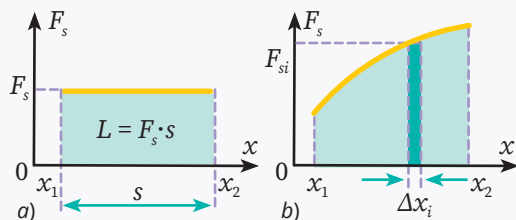


Fig. 3.10

clar că lucrul mecanic al forței constante $\vec{F}$ în cazul mișcării rectilinii pe distanța $\vec{s}$ este numeric egal cu aria dreptunghiului limitat de graficul proiecției F_s , de axa absciselor și de segmentele paralele cu ordonata, care trec prin punctele cu coordonatele x_1 și x_2 . Se poate demonstra că lucrul mecanic al forței care variază în funcție de coordonata punctului său de aplicație (fig. 3.10, b) de asemenea este numeric egal cu aria figurii de sub graficul proiecției F_s .

Din cele expuse mai sus rezultă că lucrul mecanic al forței date depinde atât de poziția inițială și cea finală a corpului în mișcare, cât și de forma traiectoriei parcurse de el între aceste poziții. Mărimile fizice care posedă asemenea proprietate se numesc **mărimi de proces**. Deci lucrul mecanic este o mărime de proces.

b Puterea

La analiza noțiunii de lucru mecanic nu s-a ținut seama de intervalul de timp în care el a fost efectuat. Dar unul și același lucru mecanic poate fi efectuat în intervale de timp diferite.

Pentru a caracteriza productivitatea unui mecanism, se folosește noțiunea de **putere mecanică** sau **putere**. Fie lucrul mecanic L efectuat în intervalul de timp Δt .

Mărimea fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic și intervalul de timp în care el a fost efectuat se numește putere medie.

$$P_m = \frac{L}{\Delta t}. \quad (3.22)$$

Din definiția (3.22) stabilim unitatea de putere:

$$[P] = \frac{[L]}{[\Delta t]} = \frac{J}{s} = W.$$

Puterea unui sistem fizic care efectuează un lucru mecanic de 1 joule în timp de o secundă este egală cu 1 watt (W).

Puterea motoarelor cu ardere internă se exprimă, deseori, printr-o unitate tolerată, mai veche, care nu face parte din SI. Această unitate este numită cal-putere: $1\text{CP} \approx 736\text{ W}$. Automobilele obișnuite au puteri între 40 și 200 CP, iar cele destinate curselelor automobilistice au puteri de până la 1 000 CP.

În energetică se utilizează o unitate tolerată pentru lucrul mecanic, exprimată prin unitatea de putere, anume **kilowattul-oră** (kW·h). Avem $1\text{ kW} \cdot \text{h} = 10^3\text{ W} \cdot 3600\text{ s} = 3,6 \cdot 10^6\text{ W} \cdot \text{s} = 3,6 \cdot 10^6\text{ J}$.

Substituind expresia lucrului mecanic (3.21), în definiția puterii medii avem $P_m = \frac{(\vec{F} \cdot \vec{s})}{\Delta t}$. Dar raportul deplasării la intervalul de timp este viteza medie: $\vec{v}_m = \frac{\vec{s}}{\Delta t}$. Deci puterea medie poate fi scrisă și sub forma

$$P_m = (\vec{F} \cdot \vec{v}_m). \quad (3.23)$$

Considerând intervalul de timp Δt foarte mic, valorile medii trec în valori instantanee:

$$P = (\vec{F} \cdot \vec{v}). \quad (3.24)$$

Puterea instantanee este egală cu produsul scalar dintre forța $\vec{F}$ și viteza $\vec{v}$ a punctului de aplicare al ei la momentul respectiv de timp.

AUTOEVALUARE

- 1 În ce caz lucrul mecanic se exprimă prin formula $L = F \cdot s$?
- 2 Care este expresia pentru lucrul mecanic efectuat de o forță constantă ce formează un unghi oarecare cu direcția deplasării punctului de aplicație al ei? Pentru ce valori ale acestui unghi lucrul mecanic este negativ?
- 3 Definiți puterea medie.
- 4 Ce expresie are puterea instantanee?
- 5 Care este unitatea de putere în SI? Cum se exprimă ea prin unitățile fundamentale?
- 6 Să se afle valoarea forței orizontale aplicate de elev unei lăzi, dacă se știe că la deplasarea acesteia la distanța $s = 15\text{ m}$ a fost efectuat un lucru mecanic $L = 420\text{ J}$.
- 7 Un copil trage uniform o sanie pe un drum rectiliniu orizontal cu ajutorul unei sfori ce formează unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala. Forța de tensiune în sfoară este $T = 28\text{ N}$, viteza saniei este $v = 1,5\text{ m/s}$. Care este lucrul mecanic efectuat de copil în timpul $t = 20\text{ s}$?
- 8 Un pescar se mișcă pe malul unui râu, în amonte, și trage luntrea cu ajutorul unei frânghii. Ce unghi formează frânghia cu direcția deplasării luntrii, dacă se știe că forța de tensiune din frânghie este $T = 200\text{ N}$ și lucrul mecanic efectuat de pescar la deplasarea luntrii cu $s = 8\text{ m}$ este $L = 800\sqrt{3}\text{ J}$?
- 9 La mișcarea unui corp cu masa $m = 3\text{ kg}$ pe un plan orizontal neted la o distanță $s = 4,8\text{ m}$ a fost efectuat un lucru mecanic $L = 36\text{ J}$. Să se determine accelerația cu care s-a mișcat corpul.
- 10 Un corp cu masa $m = 4\text{ kg}$ se mișcă rectiliniu uniform sub acțiunea unei forțe constante F ce formează unghiul $\alpha = 60^\circ$ cu orizontala. Să se determine coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală pe care el se mișcă, dacă se știe că lucrul mecanic efectuat de forță pe distanța $s = 6\text{ m}$ este $L = 48\text{ J}$. Accelerația gravitațională se va lua $g = 10\text{ m/s}^2$.
- 11 **ING** Determinați puterea motorului care în timpul $t = 30\text{ min}$. efectuează un lucru mecanic $L = 270\text{ kJ}$.
- 12 **ING** Puterea unui motor de motocicletă $P = 10,8\text{ kW}$. Care este viteza motocicletei când forța de tracțiune dezvoltată de motor $F = 270\text{ N}$?
- 13 **BIO** Inima umană reprezintă o pompă a sângelui din organism și pompează câte aproximativ 7 500 L de sânge în fiecare zi. Considerând că lucrul mecanic efectuat de inimă este egal cu lucrul mecanic necesar pentru a ridica cantitatea de sânge pompată la o înălțime egală cu cea medie a unei liceene, aproximativ 1,65 m, iar accelerația gravitațională egală cu 10 m/s^2 , determinați:
 - a) lucrul mecanic efectuat de inimă într-o zi. Densitatea sângelui este de $1\,050\text{ kg/m}^3$;
 - b) puterea furnizată de inimă pentru pomparea sângelui.
- 14 **ING** Un automobil cu masa de 2 500 kg se mișcă cu viteza de 36 km/h, ridicându-se pe o pantă. Motorul automobilului dezvoltă o putere $P = 150\text{ kW}$. Determinați unghiul pantei, dacă se știe că forța de rezistență opusă mișcării automobilului constituie $k = 10\%$ din forța de greutate a lui. Accelerația gravitațională se va lua $g = 10\text{ m/s}^2$.

Energia cinetică. Teorema variației energiei cinetice

a Energia cinetică. Teorema variației energiei cinetice a punctului material

Considerăm un punct material (corp punctiform) cu masa m acționat de mai multe forțe constante. Notăm rezultanta acestor forțe cu $\vec{F}$, iar accelerația imprimată de ea cu $\vec{a}$. În conformitate cu principiul fundamental al dinamicii (2.6), avem $\vec{F} = m\vec{a}$. Admitem că punctul material se mișcă rectiliniu în direcția accelerației sale. Atunci lucrul forței $\vec{F}$ pe deplasarea $\vec{s}$ dintre poziția inițială 1 și cea finală 2 a corpului este egal cu

$$L_{12} = \vec{F} \cdot \vec{s} = m\vec{a} \cdot \vec{s}. \quad (3.25)$$

Forța $\vec{F}$ este constantă, deci și accelerația $\vec{a}$ este constantă; prin urmare, corpul se mișcă uniform accelerat. Conform formulei lui Galilei (1.38), obținem

$$as = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}, \quad (3.26)$$

unde v_1 și v_2 sunt vitezele corpului la începutul și la sfârșitul deplasării $\vec{s}$.

Substituind (3.26) în (3.25), obținem

$$L_{12} = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (3.27)$$

Introducem o mărime fizică nouă, numită **energie cinetică**:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}. \quad (3.28)$$

Energia cinetică este o mărime scalară egală cu semiprodusul dintre masa punctului material și pătratul vitezei lui.

Această expresie pentru energia cinetică (sub numele de „forță vie”) a fost introdusă în 1829 de către inginerul și fizicianul francez Gaspard-Gustave de Coriolis (1792–1843).

Relația (3.27) se va scrie sub forma

$$L_{12} = E_{c2} - E_{c1} \quad (3.29)$$

sau

$$L_{12} = \Delta E_c, \quad (3.30)$$

unde variația energiei cinetice

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}. \quad (3.31)$$

Din definiția (3.28) rezultă că energia cinetică a punctului material este determinată de viteza lui la momentul dat și nu depinde de valorile ei precedente. Mărimile ale căror valori sunt determinate de starea mecanică a punctului material (de poziția și de viteza lui) se numesc **mărimi de stare**. Astfel, energia cinetică este o mărime de stare.

Observăm că **energia cinetică nu poate lua valori negative** ($E_c \geq 0$). Ea este egală cu zero pentru punctul material aflat în repaus ($v = 0$).

Energia cinetică se exprimă prin viteză, care este relativă. Prin urmare, **energia cinetică este o mărime relativă**. De exemplu, energia cinetică a pasagerului așezat pe scaunul unui mijloc de transport se egalează cu zero în raport cu acesta și este diferită de zero în raport cu Pământul atunci când mijlocul de transport se află în mișcare.

Din formula (3.29) observăm că energia cinetică are aceeași unitate ca și lucrul mecanic, adică $[E_c] = J$.

Relația (3.29) dintre lucrul mecanic și energia cinetică reprezintă **teorema variației energiei cinetice pentru un punct material**.

Variația energiei cinetice a punctului material este egală cu lucrul mecanic al rezultantei forțelor care acționează asupra acestuia în mișcarea respectivă.

Energia cinetică a corpului aflat în repaus $E_{c1} = 0$. Din (3.29) rezultă $E_{c2} = L_{12}$, adică energia cinetică a lui este egală cu lucrul efectuat de forțele exterioare asupra corpului aflat inițial în repaus, pentru a-i mări viteza până la valoarea v .

La rândul său, corpurile ce posedă energie cinetică pot efectua lucru mecanic, valoarea maximă a căruia este egală cu energia cinetică. De exemplu, masele de aer în mișcare, vântul, pun în funcțiune morile de vânt, stațiile electrice eoliene, vasele cu pânze. La viteze, deci și energii cinetice destul de mari, ca în cazul uraganelor, ele provoacă distrugerii considerabile, deteriorează sau chiar distrug diferite construcții, smulg copaci, rup linii electrice etc.

b* Teorema variației energiei cinetice a sistemului de puncte materiale

Exemplele descrise mai sus pot fi generalizate pentru un sistem de puncte materiale. Energia cinetică a sistemului se definește ca suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor ce-l constituie:

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} + \dots = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots,$$

unde $m_1, m_2, \dots$ sunt masele, iar $v_1, v_2, \dots$ – vitezele punctelor materiale.

Teorema variației energiei cinetice exprimată de relația (3.29) rămâne valabilă și pentru un sistem de puncte materiale. Aceasta se poate demonstra printr-un procedeu analogic celui folosit la obținerea legii variației impulsului mecanic al unui sistem de puncte materiale (3.11). Înscriind relația (3.29) pentru fiecare punct din componența sistemului, apoi însumând termenii respectivi ai acestor relații, vom constata că variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate de forțele externe și interne ce acționează asupra punctelor din sistem pe deplasările respective.

Cercetând legea variației impulsului pentru un sistem de puncte materiale, am stabilit că forțele interne nu pot modifica valoarea lui. Care este însă situația în cazul energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale? Întrucât deplasările punctelor materiale ale sistemului au același sens ca și forțele interne care acționează asupra lor, concluzionăm că lucrul fiecăreia dintre ele este pozitiv. Rezultă că suma lucrurilor forțelor interne este diferită

de zero. Prin urmare, **teorema variației energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale se formulează astfel:**

Variația energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțelor (externe și interne) ce acționează în sistem pe deplasările respective ale punctelor sistemului.

În paragraful 3.2, c a fost analizată utilizarea legii conservării impulsului în cazul ciocnirii plastice a două corpuri cu masele m_1 și m_2 având până la ciocnire vitezele $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$. În acest caz corpurile ce se ciocnesc formează un corp comun de masă egală cu suma maselor, adică egală cu $(m_1 + m_2)$, și pentru viteza comună a corpurilor u (3.14) după ciocnire a fost obținută relația:

$$\vec{u} = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.32)$$

Să analizăm acum ciocnirea plastică a corpurilor din punct de vedere energetic. În acest scop vom calcula variația energiei cinetice a corpurilor:

$$\Delta E_c = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} \right).$$

Substituind în ΔE_c expresia (3.32) pentru viteza u , în urma transformărilor evidente, obținem

$$\Delta E_c = - \frac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2 (m_1 + m_2)}. \quad (3.33)$$

Observăm că în urma ciocnirii plastice a corpurilor energia cinetică se micșorează, transformându-se în căldură.

Probleme REZOLVATE

1. O bilă cu masa de 0,4 kg este lansată cu viteza de 5 m/s sub un unghi $\alpha = 30^\circ$ față de orizont (fig. 3.11) și nimereste într-o cutie cu nisip în care se oprește. Cutia cu nisip are masa de 4,6 kg și se află pe o suprafață de gheață. Coeficientul de frecare dintre cutie și suprafața de gheață $\mu = 0,03$. Ce distanță va parcurge cutia cu bila din ea până la oprirea definitivă? Accelerația gravitațională se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

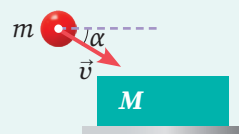


Fig. 3.11

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} m &= 0,4 \text{ kg} \\ v &= 5 \text{ m/s} \\ \alpha &= 30^\circ \\ M &= 4,6 \text{ kg} \\ \mu &= 0,03 \\ g &= 10 \text{ m/s}^2 \\ s &= ? \end{aligned}$$

În conformitate cu legea conservării impulsului proiectată pe direcția orizontală

$$mv \cos \alpha = (M+m)u,$$

de unde pentru viteza u a cutiei cu bila în ea obținem $u = \frac{mv \cos \alpha}{M+m}$. Energia cinetică a sistemului cutie-bilă $E_{c1} = \frac{(M+m)u^2}{2}$ se va consuma pentru efectuarea lucrului mecanic împotriva forței de frecare $L_{12} = -\mu (M+m) g \cdot s$. Din teorema variației energiei cinetice (3.29), pentru distanța s parcursă de cutie până la oprirea definitivă când $E_{c2} = 0$, avem $-\mu (M+m) g \cdot s = 0 - \frac{(M+m)u^2}{2}$, de unde $s = \frac{u^2}{2\mu g} = \frac{m^2 v^2 \cos^2 \alpha}{2\mu g (M+m)^2} = 0,20 \text{ m} = 20 \text{ cm}$.

2. Un corp cu masa $m = 0,16 \text{ kg}$ se mișcă pe o suprafață orizontală netedă cu viteza $v_0 = 5 \text{ m/s}$. Care este energia cinetică a corpului după ce asupra lui acționează o forță $F = 6 \text{ N}$ pe deplasarea $s = 0,5 \text{ m}$ și care are același sens cu viteza v_0 ?

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} m &= 0,16 \text{ kg}, \\ v_0 &= 5 \text{ m/s}, \\ F &= 6 \text{ N}, \\ s &= 0,5 \text{ m} \\ \hline E_{c2} &= ? \end{aligned}$$

Din teorema variației energiei cinetice a punctului material $L_{12} = E_{c2} - E_{c1}$ exprimăm mărimea căutată: $E_{c2} = E_{c1} + L_{12}$. Aici energia cinetică inițială $E_{c1} = \frac{mv_0^2}{2}$ și lucrul forței constante pe deplasarea rectilinie de același sens cu forța $L_{12} = F \cdot s$. Obținem $E_{c2} = \frac{mv_0^2}{2} + F \cdot s$; $E_{c2} = 5 \text{ J}$.

Analizează și aplică!

- ▶ Pe o masă de biliard se află două bile de diametre egale, dar de mase diferite. În ce mod se poate stabili fără aparate de măsură care bilă are masa mai mare?
- ▶ Pot forțele interne să modifice energia cinetică a unui sistem de puncte materiale? Ilustrați cu exemple.

AUTOEVALUARE

- 1 Definiți energia cinetică a unui punct material și a unui sistem de puncte materiale.
- 2 Care mărimi fizice se numesc mărimi de stare? Este energia cinetică o mărime de stare? Argumentați răspunsul.
- 3 Depinde energia cinetică de sistemul de referință ales? Ilustrați cu exemple deosebite de cel din text.
- 4 Formulați teorema variației energiei cinetice.
- 5 Care este sensul fizic al energiei cinetice?
- 6 Energia cinetică a unui corp este $E_c = 9 \text{ J}$, atunci când viteza acestuia este $v = 15 \text{ m/s}$. Determinați masa corpului.
- 7 **ING** De câte ori energia cinetică a unui automobil cu masa $m_1 = 1\,500 \text{ kg}$ ce se mișcă cu viteza $v_1 = 120 \text{ km/h}$ este mai mare decât energia cinetică a unui autocamion cu masa $m_2 = 4\,800 \text{ kg}$ ce se mișcă cu viteza $v_2 = 60 \text{ km/h}$?
- 8 Energia cinetică a unui corp $E_{c1} = 14,4 \text{ J}$, atunci când acesta se mișcă cu viteza $v_1 = 6 \text{ m/s}$. Care este energia cinetică a corpului dat atunci când el se mișcă cu viteza $v_2 = 10 \text{ m/s}$?
- 9 Un corp cu masa $m_1 = 0,10 \text{ kg}$ are la viteza $v_1 = 8 \text{ m/s}$ aceeași energie cinetică ca a unui corp la viteza $v_2 = 5 \text{ m/s}$. Care este masa celui de-al doilea corp?
- 10 **BIO** O sportivă cu masa de 60 kg poate accelera din starea de repaus până la o viteză de 10 m/s în timp de 3 s . În același interval de timp, un ogar cu masa de 25 kg accelerează din starea de repaus până la viteza de 20 m/s . Determinați puterea medie dezvoltată de sportivă și de ogar.
- 11 Asupra unui corp aflat în repaus începe să acționeze o forță constantă. Care este valoarea acestei forțe, dacă după parcurgerea distanței $s = 3 \text{ m}$ energia cinetică a corpului a devenit $E_c = 42 \text{ J}$?
- 12 **ING** Determinați lucrul mecanic necesar pentru a mări viteza unui automobil cu masa $m = 1\,600 \text{ kg}$, cu $\Delta v = 18 \text{ km/h}$: a) de la 18 km/h până la 36 km/h ; b) de la 36 km/h până la 54 km/h . Explicați rezultatele obținute.
- 13* Mai multe scânduri identice sunt așezate paralel între ele, la distanțe mici una de alta. Dintr-o armă s-a tras un glonț în direcție perpendiculară pe scânduri. Viteza glonțului la ieșirea din prima scândură este $v_1 = 0,8 v_0$, unde v_0 reprezintă viteza glonțului înainte de a o străpunge. Determinați în a câta scândură se va opri glonțul.
- 14* Două bile de plastilină au masele $m_1 = 100 \text{ g}$ și $m_2 = 300 \text{ g}$. Mișcându-se orizontal și rectiliniu una în întâmpinarea celeilalte cu vitezele $v_1 = 7 \text{ m/s}$ și $v_2 = 5 \text{ m/s}$, bilele se ciocnesc. Cum și cu cât se modifică energia bilelor?

Lucrul forței de greutate. Energia potențială gravitațională

a Forța de greutate – forță conservativă

Considerăm un punct material cu masa m care se mișcă într-o regiune limitată din apropierea suprafeței Pământului. Dimensiunile acestei regiuni sunt mult mai mici decât raza Pământului, în limitele ei accelerația gravitațională $\vec{g}$, deci și forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ rămân constante.

Câmpul de forțe, în care forța aplicată punctului material rămâne constantă se numește câmp omogen.

Admitem că un punct material (corp punctiform) cu masa m se deplasează în câmpul omogen al forței de greutate din poziția 1 în poziția 2 (fig. 3.12). Notăm cu h_1 și h_2 înălțimile acestor poziții în raport cu un nivel orizontal – nivel zero – ales arbitrar.

Calculăm lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a corpului în această mișcare, considerând că mișcarea lui are loc de-a lungul segmentului de dreaptă care unește aceste poziții. Notăm lungimea acestui segment cu l . Forța de greutate formează cu direcția deplasării un unghi β (fig. 3.12), deci lucrul ei este $L_{12} = mg \cdot l \cos \beta$. După cum se vede din figură, $l \cdot \cos \beta = h_1 - h_2$. Pentru lucru obținem

$$L_{12} = mg(h_1 - h_2). \quad (3.34)$$

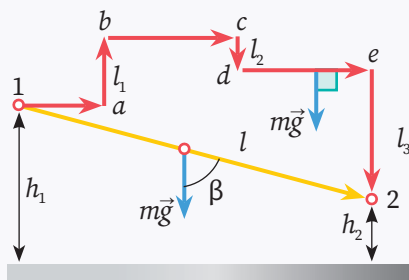


Fig. 3.12

Calculăm lucrul forței de greutate la deplasarea corpului punctiform considerat între aceleași poziții, dar de-a lungul unei alte traiectorii. Considerăm că această traiectorie $1abcde2$ (fig. 3.12) este constituită din porțiuni orizontale și verticale. Lucrul L'_{12} al forței de greutate pe această traiectorie este egal cu suma lucrurilor pe porțiunile din care ea se alcătuiește:

$$L'_{12} = L_{1a} + L_{ab} + L_{bc} + L_{cd} + L_{de} + L_{e2}.$$

Porțiunile orizontale formează cu forța de greutate un unghi drept, deci lucrul pe ele este nul: $L_{1a} = L_{bc} = L_{de} = 0$. Prin urmare:

$$L'_{12} = L_{ab} + L_{cd} + L_{e2}.$$

Notăm lungimile porțiunilor verticale cu l_1 , l_2 și l_3 , după cum este indicat în figura 3.12. Pe porțiunea ab corpul se deplasează în sens contrar forței de greutate (lucrul este negativ), iar pe porțiunile cd și $e2$ el se deplasează în sensul forței de greutate (lucrul este pozitiv). Astfel, pentru lucrul L'_{12} avem

$$L'_{12} = -mg \cdot l_1 + mg \cdot l_2 + mg \cdot l_3 = mg(l_2 + l_3 - l_1).$$

Din figura 3.12 observăm că $l_2 + l_3 - l_1 = h_1 - h_2$. Prin urmare:

$$L'_{12} = mg(h_1 - h_2). \quad (3.35)$$

Rezultatul (3.35) rămâne valabil pentru orice traiectorie formată din porțiuni orizontale și porțiuni verticale de drum. El rămâne valabil, de asemenea, și pentru orice traiectorie curbilinie, deoarece aceasta poate fi aproximată cu un număr mare de porțiuni mici verticale și orizontale (fig. 3.13).

Comparând formulele (3.34) și (3.35), conchidem că lucrul mecanic efectuat de forța de greutate, care acționează asupra unui punct material la deplasarea acestuia dintr-o poziție în alta, depinde numai de aceste poziții, dar nu și de forma traiectoriei parcurse.

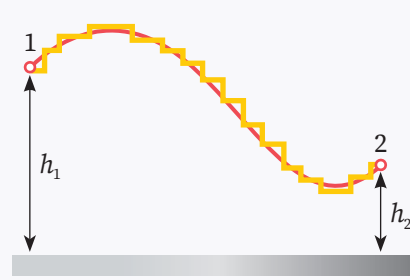


Fig. 3.13

Forțele al căror lucru mecanic nu depinde de forma traiectoriei parcurse de corp, ci doar de poziția inițială și de cea finală ale corpului, se numesc forțe conservative. Câmpul unor astfel de forțe se numește câmp potențial.

Din formula (3.35) observăm că lucrul forței de greutate pe un drum închis, când $h_2 = h_1$, este egal cu zero. Forțele al căror lucru mecanic pe orice drum închis este egal cu zero sunt forțe conservative. **Forța de greutate este o forță conservativă, iar câmpul ei omogen este un câmp potențial.**

b Energia potențială gravitațională

Transcriem expresia (3.34) pentru lucrul mecanic al forței de greutate:

$$L_{12} = mgh_1 - mgh_2. \quad (3.36)$$

Aici h_1 și h_2 sunt înălțimile poziției inițiale și a celei finale ale punctului material deasupra unui nivel ales arbitrar, din considerente de comoditate, luat ca nivel zero.

Relația (3.36) arată că lucrul mecanic al forței de greutate este prezentat ca diferența valorilor unei mărimi fizice, dintre care o valoare corespunde stării inițiale, iar a doua stării finale. Această mărime se notează cu E_p și este numită **energie potențială** a corpului în câmpul forței de greutate sau **energie potențială gravitațională**. Relația (3.36) ia forma

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} \quad (3.37)$$

sau

$$L_{12} = -\Delta E_p, \quad (3.38)$$

unde s-a introdus variația energiei potențiale

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}. \quad (3.39)$$

Din relația (3.37) rezultă că energia potențială se exprimă în jouli (J), ca și lucrul mecanic și energia cinetică. Conform relației (3.38),

Lucrul mecanic al forței de greutate este egal cu variația energiei potențiale gravitaționale a corpului, luată cu semn opus.

Astfel, lucrul mecanic definește variația energiei potențiale, și nu valoarea acesteia. Dar variația unei mărimi, ca diferență a două valori ale acesteia, nu se modifică, dacă la fiecare valoare adunăm una și aceeași constantă arbitrară. De aceea, comparând relația (3.37) cu (3.38), putem scrie că

$E_p = mgh + \text{const.}$ În acest caz lucrul mecanic efectuat de forța de greutate

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} = (mgh_1 + \text{const.}) - (mgh_2 + \text{const.}) = mgh_1 - mgh_2$$

nu depinde de valoarea constantei arbitrare. Aceasta se determină dintr-o condiție suplimentară, luată din considerente de comoditate. Se admite, de regulă, că la nivelul nul al înălțimilor ($h = 0$) energia potențială este nulă ($E_p = 0$). Acesta este deci și nivelul zero al energiei potențiale. Obținem $\text{const.} = 0$. Prin urmare, energia potențială gravitațională

$$E_p = mgh. \quad (3.40)$$

Definiția energiei potențiale gravitaționale (3.40) arată că valoarea acesteia depinde de poziția corpului la momentul dat în raport cu nivelul nul ales: cu cât corpul se află mai sus de acest nivel, cu atât energia potențială a lui este mai mare; dacă însă corpul se află sub acest nivel, energia potențială a lui este negativă. Devine evident că

Energia potențială gravitațională este o mărime de stare.

Valoarea energiei potențiale a corpului aflat în poziția dată depinde, de asemenea, de nivelul nul, fiind diferită pentru niveluri nule diferite. Însă lucrul mecanic efectuat de forța de greutate la trecerea corpului dintr-o poziție în alta nu depinde de alegerea nivelului nul.

Pentru a stabili sensul fizic al energiei potențiale, considerăm un corp care trece dintr-o poziție oarecare 1 în poziția 2 situată la nivelul nul, unde $E_{p2} = 0$. Atunci din (3.37) rezultă

$$L_{10} = E_{p1}. \quad (3.41)$$

Energia potențială gravitațională a corpului într-o poziție oarecare este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a acestuia la trecerea sa din această poziție într-o poziție situată la nivelul nul.

Energia potențială gravitațională a corpului ridicat deasupra Pământului ca sursă de lucru mecanic este utilizată în tehnică. De exemplu, energia potențială a apei aflate la un nivel mai înalt este folosită la hidrocentrale, pentru a pune în mișcare turbinele, cea a corpului ridicat și lăsat să cadă – la tasarea solului în timpul pregătirii acestuia pentru temelile construcțiilor etc.

Astfel, energia potențială, ca și cea cinetică, caracterizează lucrul mecanic ce poate fi efectuat de corpul respectiv.

Problemă REZOLVATĂ

Dintr-o mină cu adâncimea $l = 200$ m este ridicată o încărcătură având masa $m = 500$ kg cu ajutorul unui cablu, a cărui densitate liniară (masa unei unități de lungime) $\rho_l = 1,5$ kg/m. Care este lucrul consumat la ridicarea încărcăturii? Se va considera $g = 10$ m/s².

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} l &= 200 \text{ m,} \\ m &= 500 \text{ kg,} \\ \rho_l &= 1,5 \text{ kg/m} \end{aligned}$$

$$L'_{12} = ?$$

Lucrul mecanic consumat la ridicarea încărcăturii $L'_{12} = -L_{12} = \Delta E_p$. Variația energiei potențiale a încărcăturii $\Delta E_{p1} = mgl$. La ridicarea încărcăturii cu l , centrul de greutate al cablului se ridică cu $l/2$. Masa cablului $m_c = \rho_l \cdot l$, deci energia potențială a acestuia crește cu

$$\Delta E_{p2} = m_c g \frac{l}{2} = \rho_l g \frac{l^2}{2}.$$

Lucrul total consumat

$$L'_{12} = \Delta E_{p1} + \Delta E_{p2} = (m + \rho_l \frac{l}{2}) gl; L'_{12} = 1,3 \cdot 10^6 \text{ J.}$$

COMUNICARE

Utilizarea energiei potențiale gravitaționale

Creați 2 grupuri de lucru și **repartizați** volumul activităților.

Studiați diferite surse pentru informare și selectare a materialului necesar.

Realizați comunicarea după următoarele **obiective**:

- 1 **Realizați** o prezentare teoretică succintă despre variația energiei potențiale gravitaționale și efectuarea lucrului mecanic.
- 2 **Explicați** principiul de funcționare a centralelor hidroelectrice, alte aplicații în tehnică.
- 3 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 4 **Prezentați** și **evaluați** reciproc produsele realizate.

AUTOEVALUARE

- 1 Care forțe sunt conservative?
- 2 Cu ce este egal lucrul mecanic efectuat de o forță conservativă pe un drum închis?
- 3 Care mărimi fizice se numesc mărimi de stare? Energia potențială gravitațională este o mărime de stare? Argumentați răspunsul.
- 4 Energia potențială gravitațională poate lua valori negative? Aduceți exemple.
- 5 Care este relația dintre lucrul mecanic al forței de greutate și variația energiei potențiale a corpului dat?
- 6 Două corpuri de volume egale – unul din aluminiu și altul din oțel – se află la aceeași înălțime. Energia potențială a cărui corp este mai mare? De câte ori? Densitatea aluminiului $\rho_1 = 2,7 \cdot 10^3$ kg/m³, a oțelului – $\rho_2 = 7,8 \cdot 10^3$ kg/m³.
- 7 **BIO** Înălțimea maximă la care o elevă poate sări dintr-o poziție lăsată în pirostrie este de aproximativ 40 cm. Cu cât crește energia sa potențială gravitațională într-o astfel de săritură? Masa elevei este de 50 kg, iar accelerația gravitațională $g = 9,8$ m/s². Care este sursa acestei energii?
- 8 Un corp cu masa $m = 2$ kg se află pe suprafața Pământului. La un moment dat asupra lui începe să acționeze vertical în sus o forță $F = 28$ N. Care este energia potențială a corpului după $t = 5$ s de la începutul acțiunii forței? Se va lua $g = 10$ m/s².
- 9 **ING** Determinați lucrul mecanic minim care trebuie efectuat pentru a ridica în poziție verticală o bară cu masa $m = 150$ kg și lungimea $l = 6$ m care se află pe pământ în poziție orizontală.

Lucrul forței elastice. Energia potențială elastică

Considerăm un resort nedeformat având constanta de elasticitate k și un capăt fix. Orientăm axa de coordonate Ox de-a lungul resortului având originea în capătul liber al lui (fig. 3.14, a). Aplicăm la capătul liber, de-a lungul axei Ox , o forță deformatoare $\vec{F}$. Sub acțiunea ei resortul se va alungi și va reacționa cu o forță elastică $\vec{F}_e$ (fig. 3.14, b). Pentru proiecția acesteia pe axa Ox , în conformitate cu legea lui Hooke, avem

$$F_{e,x} = -kx, \quad (3.42)$$

unde coordonata x a capătului liber este egală cu deformația absolută a lui: $x = \Delta l$.

Calculăm lucrul mecanic efectuat de forța elastică. Această forță este variabilă și la calcularea lucrului ei se va utiliza metoda grafică. Relația (3.42) arată că dependența proiecției forței elastice de deformația x este liniară, coeficientul de proporționalitate fiind negativ. Graficul respectiv este reprezentat în figura 3.15.

Lucrul forței elastice atunci când deformația resortului crește de la x_1 până la x_2 este numeric egal cu aria figurii limitate de graficul forței, axa Ox și segmentele de ordinate ce corespund coordonatelor x_1 și x_2 . Această figură este un trapez (fig. 3.15) de înălțime $(x_2 - x_1)$, cu bazele de lungimi kx_1 și kx_2 . Trapezul este situat sub axa absciselor, deci lucrul forței este negativ pentru $x_2 > x_1$. Acest fapt reiese și din figura 3.14, b, din care se vede că forța elastică este orientată în sens opus deplasării capătului liber al resortului.

Pentru lucrul mecanic al forței elastice, obținem

$$\begin{aligned} L_{12} &= -\frac{kx_1 + kx_2}{2} (x_2 - x_1) = \\ &= -\frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Din această relație rezultă că lucrul forței elastice a resortului dat depinde numai de deformația inițială și de cea finală a lui și nu depinde de modalitatea de trecere de la o deformație la alta. Prin urmare, **forța elastică este o forță conservativă**.

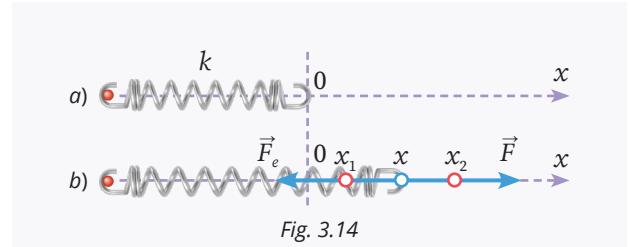


Fig. 3.14

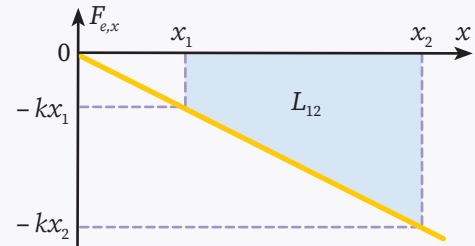


Fig. 3.15

Comparând relațiile (3.43) și (3.37), pentru energia potențială a resortului deformat, numită **energie potențială elastică**, obținem: $E_p = \frac{kx^2}{2} + \text{const.}$ Această constantă se determină pornind de la condiția că energia potențială elastică este nulă ($E_p = 0$), atunci când resortul nu este deformat ($x = 0$), adică în calitate de nivel zero se ia energia potențială a resortului nedeformat.

Obținem const. = 0, deci

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \quad (3.44)$$

La această alegere a constantei arbitrare energia potențială a resortului deformat ($x \neq 0$) ia valori pozitive, care nu depind de faptul că resortul a fost alungit sau comprimat, ci doar de modulul deformației.

Punctul de aplicație al forței deformatoare coincide cu punctul de aplicație al forței elastice, aceste forțe fiind egale în mod și de sensuri contrare. Prin urmare, lucrul forței deformatoare L'_{12} și lucrul forței elastice L_{12} satisfac relația

$$L'_{12} = -L_{12}, \quad (3.45)$$

adică

$$L'_{12} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (3.46)$$

Din formulele (3.43) și (3.46) rezultă că la creșterea deformației resortului ($|x_2| > |x_1|$) lucrul forței deformatoare este pozitiv ($L'_{12} > 0$), consumându-se la mărirea energiei potențiale elastice a lui. Atunci când deformația resortului se micșorează ($|x_2| < |x_1|$), lucrul forței elastice este pozitiv ($L_{12} > 0$), adică resortul

efectuează un lucru mecanic pe seama energiei sale potențiale. Deoarece forța este caracteristica interacțiunii corpurilor, deseori energia potențială este numită **energie potențială de interacțiune**.

Energia potențială gravitațională caracterizează interacțiunea dintre corpul dat și Pământ sau un alt

corp, iar energia potențială elastică caracterizează interacțiunea dintre porțiunile corpului deformat elastic. Pentru ambele forme de energie potențială este specific faptul că valorile lor sunt determinate de pozițiile reciproce ale corpurilor sau ale părților componente ale aceluiași corp.

Problemă REZOLVATĂ

Două resorturi de constante elastice k_1 și k_2 sunt legate în serie (unul în prelungirea celuilalt). Care este energia potențială elastică a acestui resort combinat atunci când alungirea totală a lui este egală cu Δl ?

Rezolvare

Se dă:

$$k_1$$

$$k_2$$

$$\Delta l$$

$$E_p - ?$$

Notăm cu Δl_1 și Δl_2 alungirile fiecărui resort în parte. Atunci energia potențială a sistemului

$$\text{celor două resorturi este } E_p = \frac{k_1 (\Delta l_1)^2}{2} + \frac{k_2 (\Delta l_2)^2}{2}.$$

Pentru a determina alungirile Δl_1 și Δl_2 , vom folosi două condiții:

1 – suma alungirilor $\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta l$;

2 – forțele elastice cu care un resort acționează asupra celuilalt sunt egale în mod^{ul} (ca acțiune și reacțiune), adică $k_1 \Delta l_1 = k_2 \Delta l_2$.

$$\text{Exprimăm } \Delta l_2 = \frac{k_1}{k_2} \Delta l_1, \text{ deci } \Delta l_1 + \frac{k_1}{k_2} \Delta l_1 = \Delta l, \text{ de unde avem } \Delta l_1 = \frac{k_2}{k_1 + k_2} \Delta l, \text{ apoi și } \Delta l_2 = \frac{k_1}{k_1 + k_2} \Delta l.$$

$$\text{Pentru energia potențială elastică a resortului combinat obținem } E_p = \frac{k_1 k_2 (\Delta l)^2}{2(k_1 + k_2)}.$$

Din această expresie rezultă că resortul combinat (prin legarea în serie) se comportă ca un resort cu o constantă elastică echivalentă $k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$.

AUTOEVALUARE

- 1 Forța elastică este o forță conservativă? Argumentați răspunsul.
- 2 Care este expresia pentru energia potențială elastică? Cum este ales nivelul nul al ei?
- 3 Energia potențială elastică poate lua valori negative? Argumentați răspunsul.
- 4 În care caz resortul efectuează un lucru pozitiv: atunci când deformația lui se mărește sau când aceasta se micșorează?
- 5 Pentru a alungi un resort inițial nedeformat cu Δl , s-a consumat un lucru mecanic $L' = 1,25$ J. Ce lucru mecanic trebuie consumat suplimentar pentru a mări alungirea resortului de la Δl până la $3\Delta l$?
- 6 Determinați energia potențială a unui resort comprimat cu $|\Delta l| = 0,05$ m, dacă se știe că valoarea forței care echilibrează forța elastică la acest moment este $F = 60$ N.
- 7 Pentru a comprima un resort cu $|\Delta l_1| = 0,02$ m, este necesară o forță $F_1 = 8$ N. Care va fi energia potențială a acestui resort, dacă este alungit cu $\Delta l_2 = 0,04$ m?
- 8 Un resort de care este suspendat un corp cu masa $m_1 = 4$ kg are lungimea $l_1 = 0,30$ m. Dacă suspendăm încă un corp cu masa $m_2 = 3$ kg, lungimea resortului devine $l_2 = 0,36$ m. Cu cât a crescut energia potențială a resortului după suspendarea celui de-al doilea corp?

Compararea lucrului forței de elasticitate cu variația energiei cinetice a corpului

Scopul lucrării

Verificarea experimentală a teoremei despre variația energiei cinetice prin compararea acesteia cu lucrul efectuat de forța elastică.

Dispozitive și materiale

Două stativ cu clește, un dinamometru școlar, o balanță cu greutateți marcate, o bilă, o riglă sau o ruletă, un fir de ață, o filă de hârtie-carbon (indigo).

Considerații teoretice

Pentru verificarea experimentală a teoremei variației energiei cinetice (3.29), este utilizat montajul experimental reprezentat în figura 3.16. În cleștele unui stativ se fixează orizontal un dinamometru școlar, de cârligul căruia prin intermediul unui fir cu lungimea de 50–70 cm se suspendă o bilă de masă m . Pe al doilea stativ, la aceeași înălțime cu dinamometrul se fixează un clește astfel încât linia de acțiune a forței de elasticitate a dinamometrului de pe primul stativ să treacă prin centrul bilei ținute pe cleștele celui alt stativ (fig. 3.16). Îndepărtând stativele unul față de altul, se asigură o forță de elasticitate de 2÷3 N, citită de pe scala dinamometrului.

Sub acțiunea acestei forțe, bila eliberată capătă viteza v , iar energia ei cinetică variază de la zero până la $mv^2/2$.

Pentru determinarea vitezei bilei, vom lua în considerare că ea participă concomitent în două mișcări: uniformă pe orizontală parcurgând distanța $s = vt$ și uniform accelerată pe verticală parcurgând înălțimea $h = gt^2/2$, unde g este accelerația gravitațională. Din

aceste două relații pentru viteza bilei avem $v = s\sqrt{\frac{g}{2h}}$, iar pentru variația energiei cinetice obținem

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1} = \frac{mgs^2}{4h}. \quad (3.47)$$

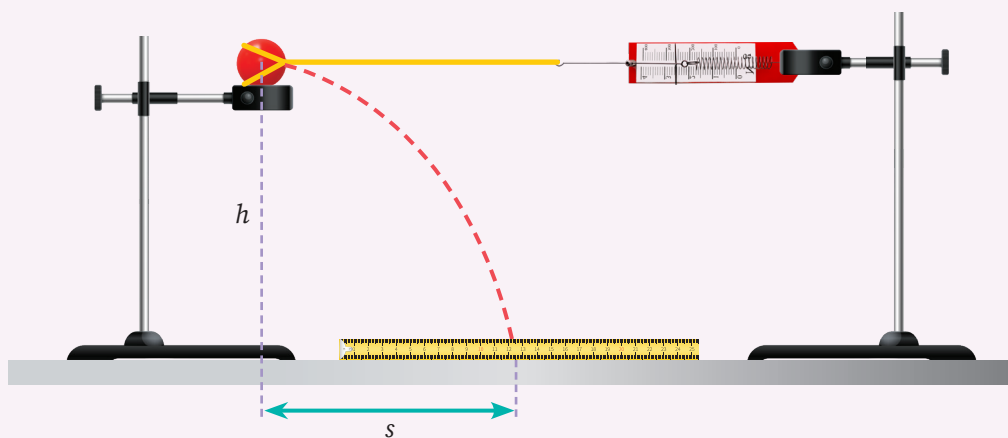


Fig. 3.16

În conformitate cu legea lui Hooke, forța de elasticitate variază liniar, micșorându-se de la valoarea inițială F_e până la 0. Atunci valoarea medie a forței elastice este $F_{e,med} = (F_e + 0)/2 = F_e/2$, iar lucrul efectuat de această forță

$$L_{12} = F_{e,med} \cdot x = \frac{F_e x}{2}, \quad (3.48)$$

unde x este deformația resortului.

Pentru compararea variației energiei cinetice (3.47) cu lucrul mecanic efectuat de forța elastică (3.48), vom determina experimental raportul

$$n = \frac{\Delta E_c}{L_{12}} = \frac{mgs^2}{2hF_e x}, \quad (3.49)$$

care în conformitate cu (3.29) trebuie să fie egal cu unitatea.

Modul de lucru:

- 1 Realizați montajul experimental din *figura 3.16*, fixând în stative dinamometrul și cleștele pentru poziționarea bilei la o înălțime de $h = (30 \div 40)$ cm de la suprafața mesei. Introduceți în caiet valoarea înălțimii folosind tabelul de mai jos.
- 2 Determinați masa bilei cu ajutorul balanței și introduceți valoarea obținută în tabel.
- 3 Fixați bila în cleștele stativului și după asigurarea unei anumite valori a forței de elasticitate citiți de pe scala dinamometrului valoarea acesteia F_e . Măsurați valoarea deformației x a resortului dinamometrului. Treceți în tabel valorile menționate.
- 4 Scoateți bila din cleștele stativului și plasați-o pe clește (*fig. 3.16*), urmărind să nu se modifice forța de elasticitate. Eliberați bila și observați urma lăsată în locul căderii pe o filă de hârtie-carbon (indigo), plasată pe o foaie de hârtie albă. Măsurați distanța s parcursă de bilă pe orizontală și introduceți în caiet valoarea folosind tabelul de mai jos. Repetați această etapă a experimentului încă de 2 ori.

Nr. crt.	s (10^{-2} m)	h (10^{-2} m)	m (10^{-3} kg)	F_e (N)	x (10^{-3} m)	n
1.						
2.						
3.						
Valoarea medie						

- 5 Calculați valoarea raportului variației energiei cinetice către lucrul forței elastice (3.49), precum și valorile medii ale distanței $\bar{s}$ și raportului $\bar{n}$.
- 6 Estimați erorile absolută și relativă ale determinării raportului n , folosind următoarele relații:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + 2 \frac{\Delta s}{\bar{s}} + \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta F_e}{F_e} + \frac{\Delta x}{x},$$

$$\Delta n = \varepsilon \cdot \bar{n}.$$

- 7 Prezentați rezultatul final sub forma: $n = \bar{n} \pm \Delta \bar{n}$; $\varepsilon = \dots\%$.
- 8 Formulați concluziile referitor la rezultatele obținute.

Analizează și aplică!

- Explicați de ce după eliberarea bilei mișcarea acesteia pe orizontală este considerată uniformă, iar pe verticală – uniform accelerată.
- Ce condiție trebuie îndeplinită pentru a fi posibil calculul valorii medii a forței variabile cu semisuma valorilor ei inițială și finală?
- De ce la determinarea vitezei bilei este necesar să eliberăm bila cu mâna, dar nu direct din clește, deșurubându-l pentru a o elibera?

Lucrul forței de frecare

Pentru a analiza lucrul forțelor de frecare ce acționează între corpurile solide, considerăm un corp solid care alunecă pe suprafața unui alt corp solid. Asupra primului acționează forța de frecare la alunecare, a cărei valoare $F_f = \mu N$ (N este valoarea forței de presiune normală a primului corp asupra celui de-al doilea, iar μ este coeficientul de frecare dintre corpurile). Această forță este permanent orientată în sens contrar vitezei $\vec{v}$ a primului corp în raport cu al doilea.

Pentru a calcula lucrul acestei forțe, examinăm un exemplu concret. În colțul 1 al unei camere cu laturile egale cu l_1 și l_2 se află o ladă ce trebuie deplasată în colțul opus 3 al camerei (fig. 3.17). Admitem că lada poate fi deplasată pe două căi: de-a lungul diagonalei 1–3 sau de-a lungul laturilor 1–2, apoi 2–3. Notăm lucrul forței de frecare la alunecare pe aceste căi prin L_{13} și L_{123} .

Presupunem că forța de tracțiune $\vec{F}$ și unghiul α , format de ea cu podeaua, rămân constante. Rămân deci constante și reacțiunea normală N a podelei, și valoarea forței de frecare la alunecare F_f . Deoarece această forță formează cu vectorul deplasare un unghi de 180° , pentru lucrul ei pe cele două căi menționate obținem

$$L_{13} = -F_f \cdot \sqrt{l_1^2 + l_2^2} = -\mu N \sqrt{l_1^2 + l_2^2},$$

$$L_{123} = -F_f (l_1 + l_2) = -\mu N (l_1 + l_2).$$

Observăm că $L_{13} \neq L_{123}$, adică lucrul forței de frecare la alunecare în timpul trecerii unui corp dintr-o poziție în alta depinde nu numai de aceste poziții, dar și de forma traiectoriei parcurse de corp între ele. Prin urmare,

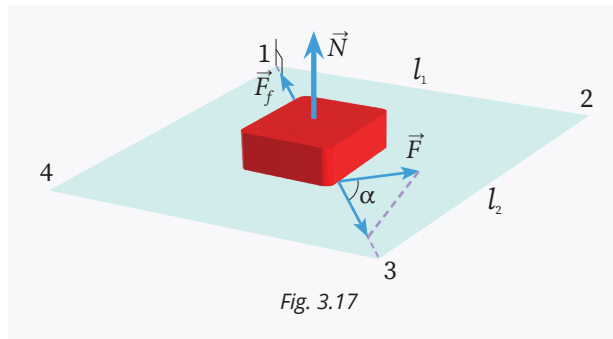


Fig. 3.17

Forța de frecare la alunecare nu este o forță conservativă.

Asupra corpului solid care se mișcă într-un mediu gazos sau lichid acționează din partea mediului o **forță de rezistență** (par. 2.6. b*). Ca și forța de frecare la alunecare, forța de rezistență este orientată în sens contrar vitezei relative a corpului, egale cu

$$\vec{v}_r = \vec{v}_c - \vec{v}_m,$$

unde $\vec{v}_c$ și $\vec{v}_m$ sunt vitezele corpului și ale mediului în raport cu același sistem de referință, de exemplu, legat cu Pământul.

Lucrul forței de rezistență poate fi atât negativ, cât și pozitiv, în funcție de sensul vitezei relative $\vec{v}_r$ în raport cu viteza corpului $\vec{v}_c$. Dacă ambele viteze au același sens, de exemplu, în cazul automobilului ce se deplasează cu viteza $\vec{v}_c$ mai mare decât viteza aerului (mediului) $\vec{v}_m$, lucrul forței de rezistență este negativ. Un alt exemplu: viteza vasului cu pânze este mai mică decât viteza vântului care-l suflă din spate. În acest caz viteza relativă $\vec{v}_r$ a vasului este de sens contrar vitezei $\vec{v}_c$ a vasului față de mal, iar lucrul forței de rezistență este pozitiv.

Rezumând cele expuse mai sus, conchidem că lucrul forțelor de frecare și de rezistență poate fi atât pozitiv, cât și negativ, în funcție de situația concretă în care se manifestă aceste forțe.

AUTOEVALUARE

- 1 Forța de frecare la alunecare este conservativă? Argumentați răspunsul.
- 2 Depinde sau nu depinde lucrul forței de frecare la alunecare de forma traiectoriei corpului între poziția sa inițială și cea finală? Ilustrați răspunsul.
- 3 Poate fi pozitiv lucrul forței de rezistență ce acționează asupra corpului din partea mediului în care el se mișcă? Dar negativ? Exemplificați.
- 4 Calculați lucrul forței de frecare la alunecare a unui corp pe drumurile închise 1–2–3–1 și 1–2–3–4–1 din figura 3.17. Comparați rezultatele obținute și comentați-le.
- 5 Într-o zi fără vânt un automobil a parcurs unul și același traseu de două ori: prima oară cu o viteză mai mică, a doua oară cu o viteză mai mare. Comparați lucrul forței de rezistență din partea aerului în cele două cazuri.

Legea conservării și transformării energiei mecanice

a Legea conservării și transformării energiei mecanice în sisteme izolate în care acționează forțe conservative

Considerăm un sistem izolat de corpuri, adică un sistem de corpuri care interacționează numai între ele și nu interacționează cu corpurile din exteriorul sistemului considerat. Admitem că forțele de interacțiune dintre corpuri sunt forțe conservative.

Din teorema variației energiei cinetice (3.29) avem

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{12}. \quad (3.50)$$

Amintim că aici E_{c1} este energia cinetică a sistemului de corpuri în pozițiile lor inițiale, E_{c2} – în pozițiile finale, iar L_{12} este lucrul mecanic efectuat de forțele de interacțiune la trecerea corpurilor din pozițiile inițiale în cele finale. Aceste forțe sunt conservative, deci lucrul efectuat de ele este egal cu variația energiei potențiale a sistemului de corpuri, luată cu semnul minus (3.37):

$$L_{12} = - (E_{p2} - E_{p1}). \quad (3.51)$$

Substituind relația (3.51) în (3.50), obținem

$$E_{c2} - E_{c1} = - (E_{p2} - E_{p1})$$

sau

$$E_{c2} + E_{p2} = E_{c1} + E_{p1}. \quad (3.52)$$

Mărimea fizică E egală cu suma energiei cinetice și a celei potențiale a sistemului la momentul dat se numește energie mecanică a acestui sistem.

$$E = E_c + E_p. \quad (3.53)$$

Astfel, relația (3.52) ia forma

$$E_2 = E_1. \quad (3.54)$$

Această relație sau (3.52) exprimă legea conservării și transformării energiei mecanice.

Legea în cauză arată că se conservă suma celor două forme de energie mecanică și că variația uneia dintre ele impune variația respectivă a celeilalte forme. De exemplu, creșterea energiei cinetice este însoțită de micșorarea energiei potențiale cu aceeași mărime.

Să explicăm această lege în baza exemplului următor.

Exemplu

Considerăm un corp cu masa m aflat la înălțimea H deasupra suprafeței Pământului. În starea inițială, la înălțimea H , viteza corpului și energia sa cinetică sunt nule. Energia mecanică a lui se reduce la energia potențială $E_1 = E_{p1} = mgH$. Corpul, fiind lăsat liber, cade spre Pământ. În această mișcare el posedă și energie cinetică, și energie potențială, astfel că energia mecanică a lui la înălțimea h ia valoarea $E = E_c + E_p = \frac{mv^2}{2} + mgh$.

Conform legii conservării energiei, avem

$$\frac{mv^2}{2} + mgh = mgH. \quad (3.55)$$

Cu cât corpul se află mai aproape de Pământ (înălțimea h este mai mică), energia potențială este mai mică, iar cea cinetică – mai mare. La suprafața Pământului ($h = 0$) energia potențială devine nulă, toată energia mecanică a corpului transformându-se în energie cinetică:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH, \quad (3.56)$$

unde v_0 este viteza corpului la suprafața Pământului.

Relația (3.56) a fost obținută aplicând legea conservării și transformării energiei mecanice. Ea poate fi obținută și pe altă cale, considerând mișcarea uniform accelerată a corpului în cădere liberă, având accelerația gravitațională g și viteză inițială nulă.

Dacă notăm timpul căderii cu t , avem $v_0 = gt$, $H = \frac{gt^2}{2}$. Din aceste două relații, după excluderea timpului t , obținem relația (3.56).

Legea conservării și transformării energiei a fost formulată în anul 1847 de către H. Helmholtz.



Hermann von HELMHOLTZ (1821–1894), fizician și fiziolog german

Descoperiri în electromagnetism, optică, acustică, mecanica fluidelor, fizica fenomenelor termice. A formulat (1847) legea conservării energiei, demonstrând caracterul general al acesteia, stabilind că ea se respectă în fenomenele mecanice, termice, electromagnetice, fiziologice etc. A construit primul circuit oscilant dintr-o inductanță și un condensator, a formulat ideea despre structura atomică a electricității ș.a. În domeniul acusticii fiziologice a elaborat o teorie a auzului, a construit modelul urechii, iar în cel al fiziologiei văzului a propus teoria acomodării ochiului, teoria văzului color.

b) *Variația energiei mecanice a sistemului în prezența forțelor neconservative și a forțelor externe

Considerăm un sistem de corpuri care interacționează nu numai între ele, ci și cu corpurile din exteriorul sistemului. Admitem că unele dintre aceste forțe sunt neconservative. Pornim de la teorema variației energiei cinetice (3.29): $E_{c2} - E_{c1} = L_{12}$.

Lucrul total al forțelor este egal cu suma lucrurilor forțelor interne L_{12}^i și a celor externe L_{12}^e , adică $L_{12} = L_{12}^i + L_{12}^e$. Lucrul forțelor interne, la rândul lor, este egal cu lucrul forțelor interne conservative $L_{12}^{i,c}$, plus lucrul forțelor interne neconservative $L_{12}^{i,nc}$, deci

$L_{12}^i = L_{12}^{i,c} + L_{12}^{i,nc}$. Prin urmare, lucrul total $L_{12} = L_{12}^{i,c} + L_{12}^{i,nc} + L_{12}^e$. Dar lucrul forțelor conservative se exprimă prin energia potențială de interacțiune – relația (3.35). Avem $L_{12}^{i,c} = E_{p1} - E_{p2}$. Astfel, lucrul total se prezintă sub forma

$$L_{12} = E_{p1} - E_{p2} + L_{12}^{i,nc} + L_{12}^e. \quad (3.57)$$

Substituind această expresie în relația ce exprimă teorema variației energiei cinetice și folosind expresia (3.53) pentru energia mecanică, obținem

$$E_2 - E_1 = L_{12}^{i,nc} + L_{12}^e. \quad (3.58)$$

Variația energiei mecanice a unui sistem de corpuri este egală cu lucrul forțelor interne neconservative, plus lucrul forțelor externe.

Problemă REZOLVATĂ

O sanie cu masa $m = 10$ kg a coborât, din stare de repaus, o pantă de zăpadă de înălțime $h = 2,5$ m, apoi a continuat mișcarea pe o porțiune orizontală de drum și s-a oprit după ce a parcurs pe aceasta o distanță egală cu $l = 50$ m. Neglijând frecarea dintre sanie și panta de zăpadă, determinați: a) viteza saniei la capătul inferior al pantei; b) coeficientul de frecare dintre sanie și porțiunea orizontală de drum; c) lucrul mecanic minim care trebuie consumat pentru a readuce sania în poziția sa inițială de pe pantă. Se va considera $g = 9,8$ m/s².

Rezolvare

Se dă:

$m = 10$ kg,
 $h = 2,5$ m,
 $l = 50$ m

a) $v_B - ?$; b) $\mu - ?$;
c) $L' - ?$

Reprezentăm schematic situația descrisă în problemă (fig. 3.18).

- a) În conformitate cu legea conservării energiei mecanice pentru mișcarea pe pantă, unde nu acționează forțe neconservative, avem $E_B = E_A$. În poziția inițială A, sania posedă energie potențială, astfel că $E_A = E_{pA} = mgh$,

iar în poziția B – energie cinetică, deci $E_B = E_{cB} = \frac{mv_B^2}{2}$. Egalând energiile mecanice ale saniei, obținem $\frac{mv_B^2}{2} = mgh$, de unde rezultă că $v_B = \sqrt{2gh}$; $v_B = 7$ m/s.

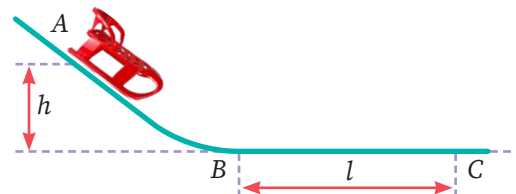


Fig. 3.18

- b) La mișcarea pe porțiunea orizontală asupra saniei acționează forța de frecare $F_f = \mu N = \mu mg$.

Egalăm variația energiei cinetice a saniei cu lucrul acestei forțe: $E_{cC} - E_{cB} = -F_f \cdot l$ sau $0 - \frac{mv_B^2}{2} = -\mu mgl$.

Exprimăm coeficientul de frecare $\mu = \frac{v_B^2}{2gl} = \frac{h}{l}$, $\mu = 0,05$.

- c) Pentru a deplasa sania pe drumul CB, trebuie să acționăm din exterior cu o forță de tracțiune orizontală egală ca modul cu forța de frecare. Deci $L'_{CB} = F_f \cdot l = \mu mgl$. Pentru a deplasa sania pe panta BA, trebuie să consumăm un lucru egal cu variația energiei potențiale a acesteia: $L'_{BA} = E_{pA} - E_{pB} = mgh$. Astfel, lucrul total consumat este

$$L' = L'_{CB} + L'_{BA} = \mu mgl + mgh = \frac{h}{l} mgl + mgh = 2mgh.$$

Aici s-a ținut seama de expresia coeficientului de frecare obținut la punctul (b). Efectuând calculele, avem $L' = 490 \text{ J}$.

COMUNICARE

Perpetuum mobile. Vise și realități

Creați 2 grupuri de lucru și **repartizați** volumul activităților.

Studiați diferite surse pentru informare și selectare a materialului necesar.

Realizați comunicarea după următoarele **obiective**:

- 1 **Investigați** evoluția mașinilor cu mișcare perpetuă.
- 2 **Clasificați** mașinile cu mișcare perpetuă (perpetuum mobile).
- 3 **Dați** exemple de perpetuum mobile cu explicațiile de nerespectare a legii conservării energiei mecanice.
- 4 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 5 **Prezentați** și **evaluați** reciproc produsele realizate.

AUTOEVALUARE

- 1 Definiți energia mecanică a unui sistem de corpuri.
- 2 În ce condiții energia mecanică a unui sistem de corpuri rămâne invariabilă în timp?
- 3* Cum variază energia cinetică a sistemului de corpuri în urma ciocnirii plastice dintre ele?
- 4 Cu ajutorul unui pistol-jucărie lansați o bilă vertical în sus. Având la dispoziție doar o riglă suficient de lungă, determinați viteza inițială a bilei.
- 5 Un corp cade liber de la înălțimea $H = 60 \text{ m}$. Determinați înălțimea la care energia lui cinetică este de două ori mai mare decât cea potențială.
- 6 Un corp este aruncat oblic de la suprafața Pământului cu viteza $v_0 = 25 \text{ m/s}$. Care este viteza lui la momentul când se află la înălțimea $h = 20 \text{ m}$?
- 7 O bară mică alunecă de la vârful unui plan înclinat de lungime $l = 2,8 \text{ m}$, care formează unghiul $\alpha = 30^\circ$ cu orizontala. Determinați viteza barei la baza planului înclinat:
 - a) în lipsa frecării dintre bară și planul înclinat;
 - b) în cazul când coeficientul de frecare dintre bară și planul înclinat $\mu = 0,5$.
- 8 Determinați viteza unei bile cu masa $m = 0,02 \text{ kg}$ la lansarea ei de un pistol-jucărie cu resort, fixat orizontal. Constanta elastică a resortului $k = 242 \text{ N/m}$, acesta fiind comprimat cu $\Delta l = 0,01 \text{ m}$.
- 9* **ING** Un vagon cu masa $m = 30 \text{ t}$ se mișcă cu viteza $v = 2 \text{ m/s}$ pe o linie de rezervă a căii ferate, spre bariera de la capătul acesteia. Bariera este dotată cu două resorturi identice de constantă de elasticitate $k = 2,4 \cdot 10^5 \text{ N/m}$. Determinați comprimarea maximă a resorturilor atunci când ele opresc vagonul.
- 10* Un copil cu masa m_1 se află pe gheață, pe patine, lângă săniuța cu masa m_2 . Copilul a împins săniuța, imprimându-i viteza v_2 , el mișcându-se în sens contrar. Ce lucru mecanic a efectuat copilul?

Determinarea coeficientului de frecare la alunecare, aplicând teorema variației energiei mecanice

Scopul lucrării

Studiul experimental al teoremei despre variația energiei potențiale și determinarea cu ajutorul acesteia a coeficientului de frecare la alunecare.

Dispozitive și materiale

Rigla unui tribometru sau o scândură de 60–80 cm lungime, un corp paralelipipedic, o balanță, un dinamometru școlar, un set de mase marcate, o riglă sau o ruletă cu diviziuni milimetrice, un fir rezistent de ață.

Considerații teoretice

Pe rigla tribometrului (scândură) se fixează dinamometrul, de cârligul căruia este legat printr-un fir corpul paralelipedic (fig. 3.19). Dacă tragem corpul de-a lungul riglei tribometrului astfel încât dinamometrul să indice o forță de elasticitate $F_e = kx$, unde x este valoarea deformației resortului dinamometrului, iar k este rigiditatea lui, atunci energia mecanică în această stare este egală cu energia potențială a resortului:

$$E_1 = E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{F_e \cdot x}{2}. \quad (3.59)$$

Eliberând corpul paralelipedic, acesta se va mișca până la oprire parcurgând o distanță s . Energia mecanică în starea finală $E_2 = 0$. Astfel, energia potențială a resortului dinamometrului se consumă la efectuarea lucrului mecanic pentru învingerea forței de frecare la alunecare pe distanța s . Forța de frecare este o forță neconservativă, lucrul ei este negativ

$$L_{12}^{i,nc} = -\mu mgs, \quad (3.60)$$

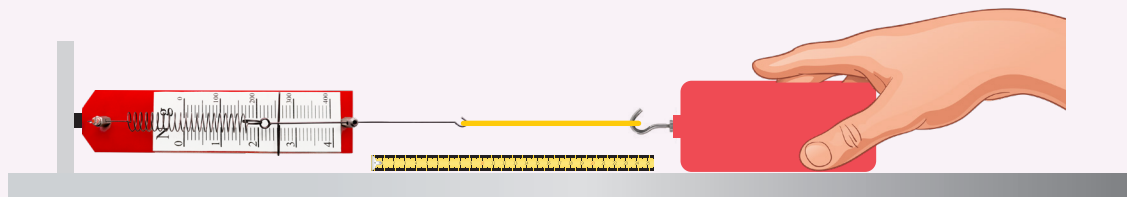


Fig. 3.19

unde m este masa corpului paralelipedic, g este accelerația gravitațională, iar μ este coeficientul de frecare la alunecarea corpului pe rigla tribometrului.

Menționăm că asupra corpului paralelipedic mai acționează și forțe externe, anume forța de greutate și forța de reacțiune normală, însă ele, fiind perpendiculare pe direcția mișcării, nu efectuează lucrul mecanic $L_{12}^e = 0$.

Folosind teorema despre variația energiei mecanice (3.58) și expresiile (3.59) și (3.60), obținem

$$\frac{F_e \cdot x}{2} = \mu mgs,$$

de unde pentru determinarea coeficientului de frecare la alunecare avem

$$\mu = \frac{F_e x}{2mgs}. \quad (3.61)$$

Modul de lucru:

- 1 Determinați masa corpului paralelipipedic cu ajutorul balanței și introduceți în caiet valoarea obținută folosind tabelul de mai jos.
- 2 Legați cu un fir de $8 \div 10$ cm cârligele dinamometrului și corpului paralelipipedic și puneți sistemul de corpuri pe rigla tribometrului, fixând dinamometrul în corespundere cu *figura 3.19*.
- 3 Trageți corpul paralelipipedic de-a lungul riglei tribometrului (scândurii) astfel încât dinamometrul să indice o anumită forță ($F = 1 \div 3$ N). Măsurați alungirea x a resortului. Introduceți valorile forței de elasticitate și a alungirii resortului în tabel.

Nr. crt.	m (10^{-3} kg)	F_e (N)	x (10^{-3} m)	s (10^{-3} m)	μ
1.					
2.					
3.					
4.					
5.					
Valoarea medie					

- 4 Însemnați poziția corpului pe rigla tribometrului și eliberați-l. Măsurați distanța s parcursă de corp și introduceți valoarea acesteia în tabel.
- 5 Repetați încă de 2-4 ori măsurările descrise la punctele 3 și 4, modificând o dată forța de elasticitate indicată de dinamometru, iar altă dată – masa corpului paralelipipedic, adăugând pe el mase marcate.
- 6 Calculați valoarea coeficientului de frecare la alunecare pentru fiecare set de măsurări, precum și valoarea medie a acestuia. Introduceți valorile obținute în tabel.
- 7 Estimați erorile absolută și relativă ale determinării coeficientului de frecare la alunecare, folosind următoarele relații:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{\mu}}{\bar{\mu}} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta F_e}{F_e} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta s}{s}, \quad \Delta \bar{\mu} = \varepsilon \cdot \bar{\mu}.$$

- 8 Prezentați rezultatul final sub forma:
- 9 Formulați concluziile referitor la rezultatele obținute.

$$\mu = \bar{\mu} \pm \Delta \bar{\mu}; \quad \varepsilon = \dots \%$$

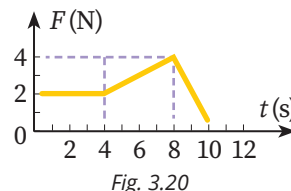
Analizează și aplică!

- ▶ În această lucrare de laborator se iau diferite valori atât ale forței de elasticitate, cât și ale masei corpului paralelipipedic prin adăugarea de mase marcate. Se modifică oare în asemenea situații valoarea coeficientului de frecare la alunecare? Explicați.
- ▶ De ce forța de greutate și cea de reacțiune normală care acționează asupra corpului paralelipipedic nu efectuează lucrul mecanic la deplasarea lui pe distanța s ?

Test de evaluare sumativă

PROFIL REAL

- 1** Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:
- 1 p.** **a** Impulsul unui sistem de puncte materiale se conservă în timp dacă _____ aplicate sistemului este egală cu zero;
- 1 p.** **b** Forțele al căror lucru mecanic pe orice drum închis este egal cu zero sunt numite _____;
- 1 p.** **c** Într-un sistem de corpuri lucrul total al forțelor interne neconservative și al celor externe este egal cu _____ a sistemului.
- 2** Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:
- | | | |
|-------------|-----------------------|----------------|
| 1 p. | Cantitatea de mișcare | W |
| 1 p. | Lucrul mecanic | $J \cdot s$ |
| 1 p. | Puterea | $kg \cdot m/s$ |
| | | $W \cdot s$ |
- 3** Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.
- 1 p.** **A** **F** **a** Mărima fizică egală cu raportul dintre forță și durată acțiunii acesteia este numită impuls al forței.
- 1 p.** **A** **F** **b** Lucrul mecanic este o mărime de proces.
- 1 p.** **A** **F** **c** Câmpul forțelor conservative este un câmp potențial.
- 4** **3 p.** În figura 3.20 este reprezentată dependența de timp a forței variabile ce acționează asupra unui corp. Determinați cu cât a variat impulsul corpului în timp de 10 s.
- 5** **2 p.** Un fotbalist lovește o minge cu masa de 0,3 kg aflată în repaus cu o forță de 600 N. Determinați viteza mingii după lovitură, dacă durată loviturii este de 0,02 s.
- 6** **2 p.** Un corp cu masa de 2 kg este lansat vertical în sus cu viteza de 5 m/s. Neglijând rezistența aerului, determinați energia potențială în punctul de ridicare maximă.
- 7** Un vagon cu masa de 40 de tone, ce se mișcă cu viteza de 4 m/s, ajunge din urmă un alt vagon cu masa de 60 de tone ce se mișcă cu viteza de 2 m/s. Determinați:
- 3 p.** **a** cu cât s-a micșorat viteza primului vagon după ciocnirea neelastică dintre vagoane;
- 4 p.** **b** cu cât se micșorează energia cinetică a celor două vagoane în urma ciocnirii lor plastice.
- 8** Un automobil se mișcă uniform accelerat pe un drum orizontal. Efectuând un lucru mecanic de 150 kJ, într-un anumit interval de timp automobilul își mărește viteza de la 5 m/s până la 20 m/s. Motorul automobilului dezvoltă o putere medie de 15 kW. Considerând $g = 10 \text{ m/s}^2$ și neglijând forțele de frecare și de rezistență, determinați:
- 3 p.** **a** greutatea automobilului;
- 5 p.** **b** distanța parcursă de automobil în mișcarea sa uniform accelerată;
- 2 p.** **c** forța de tracțiune dezvoltată de motorul automobilului.



1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p.** **a** Impulsul mecanic al unui punct material este egal cu _____ dintre masa și viteza lui;
- 1 p.** **b** Mărimea fizică egală cu raportul dintre lucrul mecanic și intervalul de timp în care acesta a fost efectuat se numește _____;
- 1 p.** **c** Dacă într-un sistem izolat de corpuri acționează numai forțe conservative, atunci _____ a sistemului rămâne invariabilă în timp.

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

1 p.	Impulsul	W
1 p.	Energia	m/s ²
1 p.	Puterea	J
		kg · m/s

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- 1 p.** **A** **F** **a** Forțele care efectuează lucrul mecanic negativ sunt numite forțe rezistente.
- 1 p.** **A** **F** **b** Dacă forțele aplicate punctului material rămân constante, atunci câmpul acestora este numit câmp omogen.
- 1 p.** **A** **F** **c** Energia potențială poate lua doar valori pozitive.

4 **3 p.** În figura 3.21 este reprezentat graficul dependenței forței de tracțiune a unui automobil în funcție de distanța parcursă. Determinați lucrul mecanic efectuat de această forță la parcurgerea distanței de 80 m.

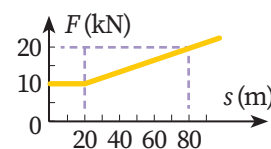


Fig. 3.21

5 **2 p.** Un autobuz cu masa de 2 000 kg ce se mișcă rectiliniu și-a mărit viteza de la 5 m/s până la 15 m/s. Determinați variația impulsului autobuzului.

6 **2 p.** Un resort a fost deformat cu $x = 50$ mm cu ajutorul unei forțe $F = 2\,400$ N. Calculați energia potențială a resortului în aceste condiții.

7 O ladă cu masa de 800 kg este trasă uniform de-a lungul unui plan cu lungimea de 10 m și înclinat sub un unghi de 30° față de orizont. Coeficientul de frecare la mișcarea lăzii pe plan $\mu = 1/(2\sqrt{3})$. Considerând $g = 10$ m/s², determinați:

- 3 p.** **a** lucrul mecanic necesar pentru deplasarea lăzii pe planul înclinat;
- 2 p.** **b** lucrul mecanic efectuat de o macara care ar ridica lada direct pe verticală la aceeași înălțime;
- 1 p.** **c** puterea dezvoltată de motorul macaralei pentru realizarea lucrului efectuat la punctul a) în 0,5 minute.

8 Unui corp cu masa de 100 kg i se imprimă o viteză inițială de 5 m/s. Corpul se deplasează pe un plan orizontal, întâmpinând o rezistență datorită frecării. Considerând coeficientul de frecare dintre corp și suprafața planului orizontal egal cu 0,2, iar accelerația gravitațională egală cu 10 m/s², să se determine:

- 4 p.** **a** După cât timp se va opri corpul și ce distanță va parcurge el până la oprire?
- 2 p.** **b** Care este puterea medie consumată la mișcarea corpului?

Ciocnirea perfect elastică

Să analizăm un alt gen de ciocnire a corpurilor – **ciocnirea perfect elastică** sau **ciocnirea elastică**. După această ciocnire, corpurile se separă unul de altul fără a fi deformat, energia cinetică a lor conservându-se. Acesta este un model ideal, deoarece în realitate corpurile după ciocnire rămân parțial deformat. Dacă însă deformările sunt destul de mici și pot fi neglijate, ca în cazul ciocnirii dintre bilele de biliard din fildeș sau din oțel, modelul ciocnirii perfect elastice poate fi aplicat.

Considerăm ciocnirea elastică centrică a două bile. În cazul ciocnirii centrice, vitezele bilelor până la și după ciocnire sunt situate pe dreapta care trece prin centrele lor (fig. 3.22).

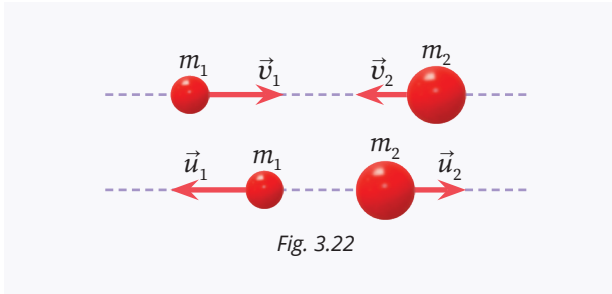


Fig. 3.22

Astfel, în cazul ciocnirii elastice se respectă legea conservării impulsului (3.13) și legea conservării energiei cinetice care se scrie după cum urmează:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3.62)$$

Transcriem legile de conservare (3.13) și (3.62) sub forma

$$\begin{cases} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ m_1 (v_1^2 - u_1^2) = m_2 (u_2^2 - v_2^2) \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) (\vec{v}_1 + \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2) (\vec{u}_2 + \vec{v}_2). \end{cases}$$

Comparând aceste ecuații, obținem un sistem echivalent:

$$\begin{cases} m_1 (\vec{v}_1 - \vec{u}_1) = m_2 (\vec{u}_2 - \vec{v}_2), \\ \vec{v}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{v}_2. \end{cases} \quad (3.63)$$

Pentru a determina viteza necunoscută u_1 , înmulțim ecuația a doua cu $(-m_2)$ și adunăm ecuația astfel obținută cu prima ecuație (3.63).

Pe această cale obținem pentru viteza u_1 expresia

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{v}_1 + 2m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.64)$$

Formula pentru viteza $\vec{u}_2$ poate fi obținută folosind o proprietate a sistemului inițial de ecuații (3.13) și (3.62). Observăm că acest sistem este simetric față de indicii 1 și 2, adică la înlocuirea simultană a indicelui 1 cu 2 și a indicelui 2 cu 1 sistemul de ecuații nu se modifică. Aceeași proprietate trebuie să o posedă și soluțiile lui. Prin urmare, expresia pentru viteza $\vec{u}_2$ se obține din formula (3.64) după înlocuirea simultană a indicelui 1 cu 2 și invers.

Obținem

$$\vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v}_2 + 2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \quad (3.65)$$

Evidențiem câteva cazuri particulare.

- 1 Bilele au mase egale, $m_1 = m_2$. Pentru vitezele lor după ciocnire obținem $\vec{u}_1 = \vec{v}_2$ și $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$, adică în urma ciocnirii elastice bilele au făcut schimb de viteze.
- 2 Bila cu masa m_2 se află inițial în repaus. Vitezele bilelor după ciocnire sunt

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_1; \\ \vec{u}_2 &= \frac{2m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

- 3 Dacă bilele au mase egale și a doua se află în repaus, avem $\vec{u}_1 = 0$ și $\vec{u}_2 = \vec{v}_1$. Prin urmare, prima bilă după ciocnire se oprește, iar a doua se mișcă cu viteza primei bile până la ciocnire.
- 4 Bila cu masa m_1 se ciocnește de un corp cu masa $m_2 \gg m_1$ aflat în repaus. De exemplu, o bilă se ciocnește elastic cu un perete imobil, viteza bilei $\vec{v}_1$ fiind perpendiculară pe acesta. Din expresiile (3.66) obținem $\vec{u}_1 = -\vec{v}_1$ și $\vec{u}_2 = 0$, adică după ciocnirea elastică bila se mișcă cu viteză de aceeași valoare ca și până la ciocnire, dar de sens contrar.

Problemă REZOLVATĂ

Două bile cu masele $m_1 = 0,3 \text{ kg}$ și $m_2 = 0,1 \text{ kg}$ sunt suspendate de fire inextensibile de aceeași lungime astfel încât ele se ating una de alta. Prima bilă este deviată de la verticală la înălțimea $h_0 = 4 \text{ cm}$ și eliberată. Să se determine înălțimile h_1 și h_2 la care se ridică bilele după ciocnirea lor absolut elastică și centrală.

Rezolvare

Se dă:

$$m_1 = 0,3 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0,1 \text{ kg}$$

$$h_0 = 4 \text{ cm}$$

$$h_1 = ?; h_2 = ?$$

Notăm cu v viteza primei bile la momentul ciocnirii, iar cu u_1 și u_2 viteza primei bile și a celei de a doua imediat după ciocnire. Atunci legea conservării impulsului proiectată pe direcția de mișcare a bilelor are aspectul

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (1)$$

Considerând poziția de echilibru al bilelor în calitate de nivel zero al energiei potențiale, devierea primei bile la înălțimea h_0 este însoțită de obținerea energiei potențiale $m_1 g h_0$. După ciocnirea bilelor această energie se redistribuie între ele mai întâi trecând în energie cinetică, iar mai apoi, ajungând în pozițiile de abatere maximă la înălțimile h_1 și h_2 - în energie potențială, astfel încât

$$m_1 g h_0 = m_1 g h_1 + m_2 g h_2. \quad (2)$$

Folosind legea conservării energiei pentru mișcarea bilelor până la ciocnire și după, conform căreia energiile potențiale la înălțimile h_0 , h_1 și h_2 sunt egale cu energiile cinetice la vitezele v , u_1 și u_2 corespunzător, obținem $v = \sqrt{2gh_0}$, $u_1 = \sqrt{2gh_1}$ și $u_2 = \sqrt{2gh_2}$. Folosind aceste expresii pentru viteze, din (1) rezultă $m_1 \sqrt{h_0} = m_1 \sqrt{h_1} + m_2 \sqrt{h_2}$, iar din (2) $h_2 = m_1(h_0 - h_1)/m_2$. Din ultimele două ecuații avem: $m_1(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1}) = \sqrt{m_1 m_2 (h_0 - h_1)}$ sau, $m_1^2(\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})^2 = m_1 m_2 (\sqrt{h_0} - \sqrt{h_1})(\sqrt{h_0} + \sqrt{h_1})$ de unde obținem $h_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) h_0$. Înlocuind valorile numerice, pentru înălțimile h_1 și h_2 la care se ridică bilele după ciocnire obținem:

$$h_1 = \left(\frac{0,3 - 0,1}{0,3 + 0,1}\right)^2 \cdot 4 \cdot 10^{-2} = 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm}; \quad h_2 = \frac{0,3}{0,1} (4 - 1) \cdot 10^{-2} = 0,09 \text{ m} = 9 \text{ cm}.$$

AUTOEVALUARE

- 1 Care ciocniri ale corpurilor se numesc elastice (perfect elastice)?
- 2 Care dintre legile de conservare este valabilă atât în cazul ciocnirilor elastice, cât și în cel al ciocnirilor plastice ale corpurilor?
- 3 Două bile de oțel se mișcă pe o suprafață orizontală de-a lungul unei drepte. Una de masă $m_1 = 1 \text{ kg}$ se mișcă cu viteza $v_1 = 10 \text{ m/s}$ și o ajunge din urmă pe a doua de masă $m_2 = 3 \text{ kg}$, ce se mișcă cu viteza $v_2 = 6 \text{ m/s}$. Care sunt vitezele bilelor după ciocnirea lor elastică frontală? De câte ori se micșorează energia cinetică a primei bile după ciocnire? Rezistența aerului și frecarea se neglijează.
- 4 Un corp de masă $m_1 = 6 \text{ kg}$ se ciocnește cu altul aflat în repaus de masă $m_2 = 4 \text{ kg}$. Impulsul primului corp până la ciocnire este $p_1 = 10 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Ciocnirea este elastică și centrală. Determinați imediat după ciocnire: a) impulsurile sferelor; b) variația impulsului primei sfere Δp_1 ; c) energiile cinetice ale sferelor; d) variația energiei cinetice a primei bile.
- 5 De câte ori se micșorează viteza unei bile după ciocnirea centrală absolut elastică a acesteia cu altă bilă aflată în repaus, masa căreia este de 5 ori mai mică decât a primei bile?
- 6 Un corp cu masa $m_1 = 2 \text{ kg}$ aflat în mișcare se ciocnește cu altul de masă $m_2 = 8 \text{ kg}$ aflat în stare de repaus. Considerând ciocnirea elastică și centrală, determinați ce parte din energia cinetică a primului corp este transmisă celui de-al doilea.
- 7 O bilă de masă $m_1 = 0,4 \text{ kg}$ a ciocnit elastic și central o altă bilă de masă $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ care se afla în repaus. Energia cinetică a bilei a doua după ciocnire a devenit egală cu 40 J . Determinați energia cinetică a primei bile până la ciocnire și după aceasta.
- 8 O bilă care se mișcă cu viteza $v_1 = 4 \text{ m/s}$ se ciocnește elastic cu alta de aceeași masă aflată în stare de repaus. Ca rezultat, prima bilă și-a schimbat direcția mișcării cu unghiul $\alpha = 30^\circ$. Determinați: a) vitezele bilelor după ciocnire; b) unghiul β dintre vectorul vitezei bilei a doua și direcția inițială a mișcării primei bile.



ELEMENTE DE STATICĂ

Starea de repaus sau de mișcare de de translație rectilinie uniformă a corpului este numită **echilibru mecanic de translație**, iar cea de rotație uniformă a corpului în jurul unei axe – **echilibru de rotație**. Când corpul se află în repaus, echilibrul este **static**, iar când în mișcare uniformă, echilibrul este **dinamic**. În continuare, în această unitate vom studia condițiile de echilibru.

4.1

Echilibrul corpului acționat de forțe coplanare. Equilibrul de translație

Mișcarea de translație a rigidului este mișcarea în care segmentul de dreaptă ce unește două puncte arbitrare ale rigidului rămâne paralel cu sine însuși (fig. 4.1).

Analizând mișcarea de translație a corpului din figura 4.1, observăm că segmentul AB ce unește punctele arbitrare A și B ocupă ulterior poziția $A'B'$. În conformitate cu definiția rigidului, segmentele AB și $A'B'$ au lungimi egale, iar potrivit definiției mișcării de translație, aceste segmente sunt paralele. Prin urmare, patrulaterul $ABB'A'$ este un paralelo-

gram. Deci în intervalul de timp cât a durat această mișcare, deplasările punctelor arbitrare A și B sunt egale: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Punctele fiind arbitrare, rezultă că deplasările, vitezele și accelerațiile tuturor punctelor rigidului în mișcare de translație sunt egale între ele. Acest fapt permite să considerăm rigidul în mișcare de translație drept punct material, chiar dacă dimensiunile corpului nu sunt neglijabile.

Din cele expuse rezultă că pentru rigidul în mișcare de translație sunt valabile aceleași condiții de echilibru ca și pentru un punct material.

În conformitate cu principiul inerției, punctul material se află în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform atunci când asupra lui nu acționează nicio forță sau când rezultanta forțelor este egală cu zero.

Astfel, **condiția echilibrului de translație al rigidului** este

Un punct material sau un rigid în mișcare de translație se află în stare de echilibru dacă rezultanta $\vec{R}$ a tuturor forțelor concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ care acționează asupra punctului material sau a rigidului este egală cu zero.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0. \quad (4.1)$$

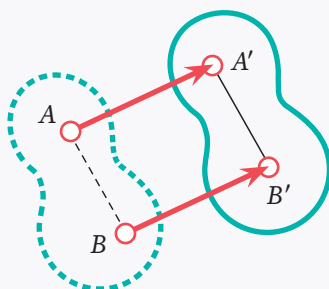
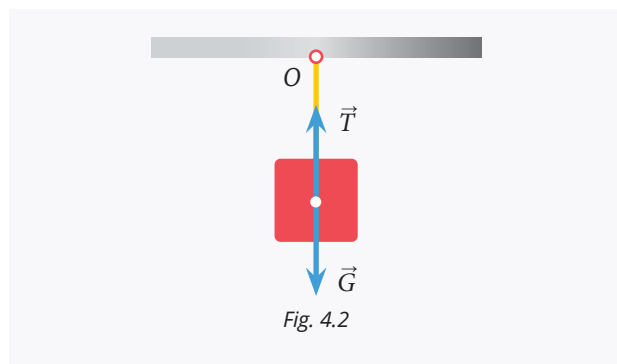


Fig. 4.1

Menționăm că forțele sunt concurente dacă liniile lor de acțiune se intersectează într-un punct. În majoritatea cazurilor, corpul din stare de echilibru se află în contact cu alte corpuri – fire, tije, corpuri cu suprafețe plane, cilindrice sau de alte forme. Aceste corpuri limitează mișcarea corpului considerat și poartă numele de **corpuri de legătură** sau, mai simplu, **legături**.

Legăturile acționează asupra corpului considerat cu forțe oarecare, numite **forțe de reacțiune** sau **forțe de legătură**. Aceste forțe depind de restul forțelor care acționează asupra corpului considerat.

Analizăm un exemplu. Asupra unui corp suspendat de un fir subțire inextensibil acționează forța de tensiune din fir $\vec{T}$ (forță de legătură) și forța de greutate $\vec{G}$ (fig. 4.2). În acest caz din condiția de echilibru (4.1) avem $\vec{T} + \vec{G} = 0$ sau $\vec{T} = -\vec{G}$. Astfel, valoarea forței de tensiune din fir $|\vec{T}| = |\vec{G}|$.



În unele cazuri, direcțiile forțelor de reacțiune sunt cunoscute, ele depinzând de corpul ce realizează legătura, și anume direcția reacțiunii coincide cu direcția în care mișcarea punctului material este limitată de legătura dată. Astfel, firul împiedică îndepărtarea corpului de punctul de suspensie O

(fig. 4.2), reacțiunea lui – tensiunea – este orientată de-a lungul firului spre punctul de suspensie. În cazul când legăturile sunt realizate de tije articulate la ambele capete, reacțiunile sunt orientate de-a lungul tijelor. Sensul lor depinde însă de starea de deformare în care se află tija (fig. 4.3, a): comprimată (tija BC) sau alungită (tija AB). În fine, în cazul când legătura este realizată de un corp cu suprafață plană (în punctul A din fig. 4.3, b) sau corpul considerat are o suprafață plană ce vine în contact cu corpul de legătură (punctul B din fig. 4.3, b), forța de reacțiune este normală la suprafața plană.

Determinarea reacțiunilor în legături sau a unor forțe necunoscute care acționează asupra corpului rigid aflat în echilibru poate fi realizată prin metodă grafică sau prin metodă analitică. Metoda grafică necesită construirea poligonului forțelor la o scară aleasă și determinarea mărimilor necunoscute din el.

Mult mai frecvent se folosește metoda analitică. În această metodă se alege cât mai convenabil sistemul de coordonate (cât mai multe forțe să fie orientate de-a lungul axelor lui), apoi se trece de la ecuația vectorială (4.1) la ecuațiile scalare pentru proiecțiile forțelor:

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} &= 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} &= 0, \\ F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} &= 0. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Aceste trei condiții scalare de echilibru (4.2) sunt echivalente cu condiția vectorială (4.1).

Pentru simplitate, în cazul sistemului plan de forțe, se alege o axă (de obicei, Oz) perpendiculară pe planul în care se situează forțele, astfel încât în cea de-a treia ecuație (4.2) toți termenii sunt nuli. Sistemul (4.2) se reduce la un sistem cu numai 2 ecuații.

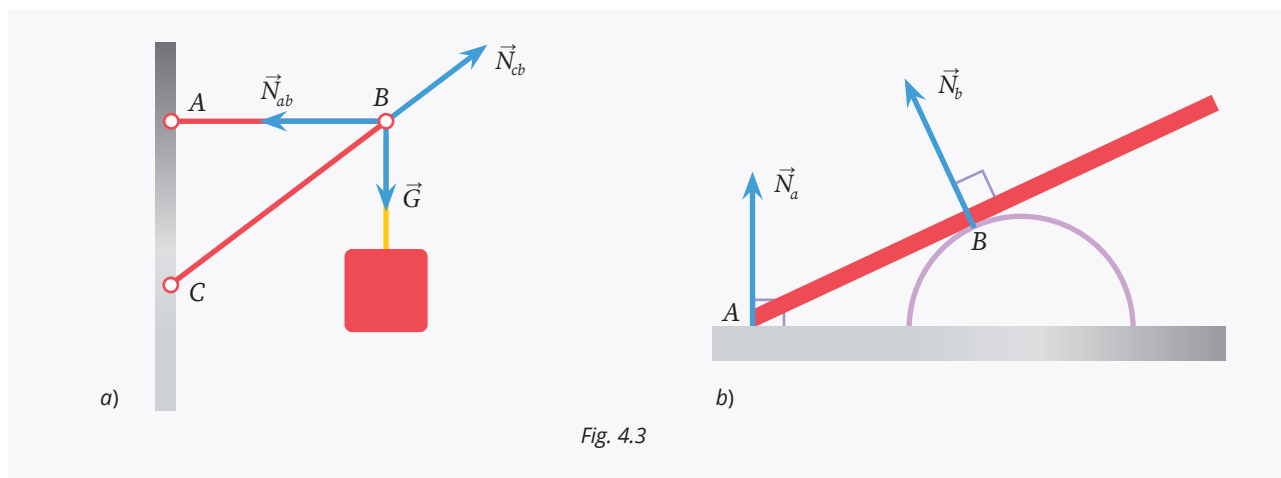


Fig. 4.3

Problemă REZOLVATĂ

Un felinar de stradă, de masă $m = 12 \text{ kg}$, este suspendat cu ajutorul tijei orizontale AB , articulate la capătul A , și al cablului BC care formează cu tija un unghi $\alpha = 30^\circ$ (fig. 4.4). Să se determine forța ce întinde cablul și forța ce comprimă tija.

Rezolvare

Se dă:

$$m = 12 \text{ kg}, \\ \alpha = 30^\circ$$

$$T = ?, N_{AB} = ?$$

Reprezentăm în figura 4.5 sistemul de forțe aplicate în punctul B : forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ a felinarului, tensiunea $\vec{T}$ din cablu și reacțiunea $\vec{N}_{AB}$ a tije. Punctul de suspensie B se află în repaus, deci, conform condiției de echilibru de translație (4.1), suma forțelor ce acționează asupra lui este nulă: $\vec{T} + \vec{N}_{AB} + \vec{G} = 0$.

Luăm axele de coordonate, așa cum este indicat în figura 4.5, și trecem de la ecuația vectorială la ecuațiile pentru proiecțiile forțelor pe aceste axe:

$$\begin{aligned} \text{pe axa } Bx & \quad T \cos \alpha - N_{AB} = 0, \\ \text{pe axa } By & \quad T \sin \alpha - G = 0. \end{aligned}$$

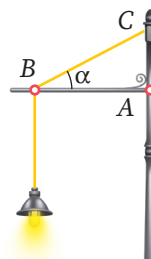


Fig. 4.4

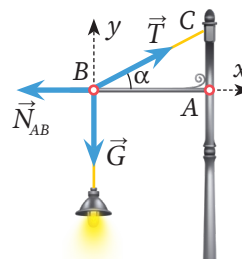


Fig. 4.5

Din cele două ecuații, care reprezintă condițiile de echilibru, găsim: $T = \frac{G}{\sin \alpha} = \frac{mg}{\sin \alpha}$; $T = 240 \text{ N}$ și $N_{AB} = T \cos \alpha$; $N_{AB} \approx 208 \text{ N}$. În conformitate cu principiul acțiunii și reacțiunii, forțele deformatoare sunt egale în modul cu forțele de reacțiune ale legăturilor. Prin urmare, forța ce întinde cablul este egală cu tensiunea din el $T = 240 \text{ N}$, iar forța ce comprimă tija – cu reacțiunea acesteia $N_{AB} \approx 208 \text{ N}$.

AUTOEVALUARE

- 1 Explicați afirmația că un corp se află în echilibru de translație.
- 2 Un corp se află în echilibru dinamic de translație în raport cu un sistem inerțial de referință. Cum trebuie ales un alt sistem de referință, încât față de acesta corpul considerat să se afle în echilibru static?
- 3 Care este condiția de echilibru al unui rigid în mișcare de translație?
- 4 Care corpuri se numesc corpuri de legătură?
- 5 Cum este orientată reacțiunea unei tije articulate? De ce depinde sensul acesteia?
- 6 **ING** O greutate de masă $m = 60 \text{ kg}$ este suspendată de un cablu a cărui tensiune de rupere este $T_r = 1176 \text{ N}$. La capătul cablului de care atârână greutatea este aplicată o forță orizontală $\vec{F}$ (fig. 4.6). Determinați unghiul minim α pe care-l poate forma cablul cu orizontala și valoarea forței $\vec{F}$ ce corespunde acestui unghi.
- 7 **ING** Un felinar ce iluminează partea carosabilă a unei străzi este suspendat la mijlocul unui cablu de lungime $l = 30 \text{ m}$. Punctul de care este suspendat felinarul se află cu $h = 1,2 \text{ m}$ mai jos de punctele în care capetele cablului sunt fixate pe stâlpii de susținere. Determinați tensiunea în cablu, dacă masa felinarului $m = 16 \text{ kg}$.
- 8 **ING** O sferă de masă $m = 2,4 \text{ kg}$ și rază $r = 6 \text{ cm}$ este suspendată de un fir de lungime $l = 24 \text{ cm}$, celălalt capăt al firului fiind fixat într-un punct al unui perete vertical neted (fig. 4.7). Care este tensiunea în firul de suspensie și forța cu care sfera apasă asupra peretelui?
- 9 **ING** O bară cu masa de 4 kg se află pe o suprafață orizontală. Coeficientul de frecare dintre bară și suprafață este de $0,3$. La unul din capetele barei acționează o forță orizontală $F_1 = 14 \text{ N}$. Determinați valoarea minimă a unei forțe orizontale F_2 aplicată la celălalt capăt al barei în sens opus forței F_1 pentru ca bara să se afle în echilibru. Se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

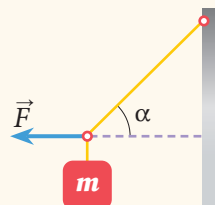


Fig. 4.6

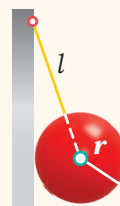


Fig. 4.7

Momentul forței. Echilibrul de rotație al rigidului

Să efectuăm un experiment în care folosim un disc cu niște cuie mici distribuite la distanțe egale unul de altul pe două diametre reciproc perpendiculare și cu axă de rotație în centrul lui (fig. 4.8). Acționăm asupra a două cuie de pe unul dintre diametre cu forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care au modulele egale, drepte-suport paralele și sensuri contrare (fig. 4.8, a). Sistemul de forțe de acest fel este numit **cuplu de forțe**, iar distanța d dintre dreptele-suport ale forțelor ce constituie cuplul este numită **braț al cuplului**.

Conform definiției, rezultanta forțelor ce constituie cuplul de forțe este nulă $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. Chiar dacă rezultanta forțelor ce acționează asupra discului este nulă, acesta nu rămâne în repaus, ci se rotește până ajunge în poziția în care forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ au o dreaptă-suport comună care trece prin axa de rotație (fig. 4.8, b).

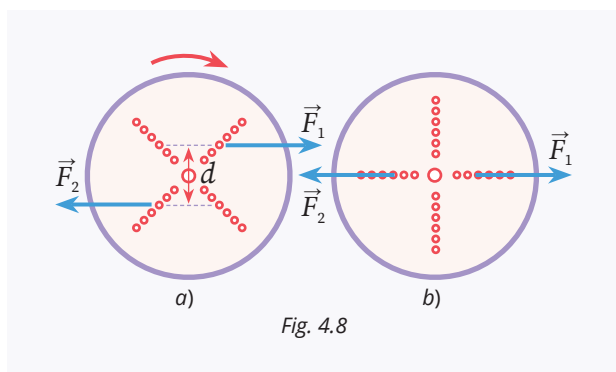


Fig. 4.8

Acest experiment demonstrează următoarele: condiția de echilibru (4.1) nu este suficientă pentru ca un corp să se afle în echilibru, deoarece nu exclude mișcarea de rotație.

Pentru a stabili condiția de echilibru al mișcării de rotație, efectuăm un experiment în care folosim discul din experimentul precedent pe care îl prindem în cleștele unui stativ. Fixăm pe disc o coală de hârtie și realizăm o stare de echilibru de rotație asemenea celei reprezentate în figura 4.9, a. Cu un creion marcăm pe hârtie direcțiile firelor de care sunt suspendate corpurile. Scoatem coala de hârtie de pe disc, construim dreptele-suport ale forțelor (prelungim direcțiile firelor). Măsurăm distanțele b_1 , b_2 , b_3 de la axa de rotație până la aceste drepte.

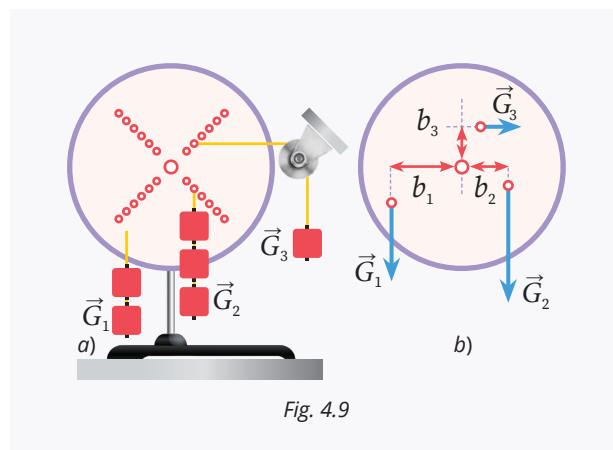


Fig. 4.9

Forța $\vec{G}_1$ ar roti discul în sens trigonometric (antiorar), iar forțele $\vec{G}_2$ și $\vec{G}_3$ – în sens orar (fig. 4.9, b). Calculăm mărimile $\vec{G}_1 b_1$ și $\vec{G}_2 b_2 + \vec{G}_3 b_3$. Observăm că ele satisfac condiția

$$\vec{G}_1 b_1 = \vec{G}_2 b_2 + \vec{G}_3 b_3. \quad (4.3)$$

Mărima b egală cu distanța dintre axa de rotație și dreapta-suport a forței se numește **braț al forței în raport cu această axă**.

Introducem mărimea numită **moment al forței în raport cu axa de rotație**

$$M = \pm F \cdot b. \quad (4.4)$$

Ea este egală ca valoare cu produsul dintre forță și brațul ei. Convențional, se ia semnul „plus” când forța ar roti corpul în sens antiorar (trigonometric) și semnul „minus” atunci când ea l-ar roti în sens orar.

Sensul fizic al momentului forței constă în descrierea cantitativă a efectului de rotație pe care îl produce o forță asupra unui corp rigid.

Unitatea de moment al forței în SI este **newton-metrul** (N·m). Menționăm că în cazul momentului forței, produsul N·m nu trebuie notat cu J (joule) cum s-a procedat în cazul unității lucrului mecanic.

În cazul experimentului reprezentat în figura 4.9, momentele forțelor de greutate sunt $M_1 = \vec{G}_1 b_1$, $M_2 = -\vec{G}_2 b_2$ și $M_3 = -\vec{G}_3 b_3$, iar condiția (4.3) se scrie astfel:

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0. \quad (4.5)$$

În caz general, **condiția echilibrului de rotație al rigidului** este

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = 0. \quad (4.6)$$

Un corp rigid se află în echilibru de rotație atunci când suma algebrică a momentelor tuturor forțelor în raport cu axa de rotație este egală cu zero.

Deci un corp rigid se află în echilibru în raport cu un sistem de referință inerțial numai atunci când se respectă ambele condiții de echilibru – pentru

mișcarea de translație (4.1) și pentru mișcarea de rotație (4.6):

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n &= 0, \\ M_1 + M_2 + \dots + M_n &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Menționăm că pentru un sistem plan de forțe alegerea axei de rotație care este perpendiculară pe acest plan poate fi arbitrară, dacă rezultanta acestor forțe se egalează cu zero. De aceea axa de rotație, în raport cu care se calculează suma momentelor forțelor, se ia astfel încât momentele unui număr mai mare de forțe să fie egale cu zero.

Problemă REZOLVATĂ

O bară omogenă AB de masă $m = 24 \text{ kg}$ și lungime $l = 2 \text{ m}$ se sprijină de podeaua netedă și se reazemă de muchia C situată la înălțimea $h = 1,5 \text{ m}$ deasupra podelei. Bara formează unghiul $\alpha = 60^\circ$ cu podeaua și este susținută de cablul orizontal AD întins aproape de podea, paralel cu ea (fig. 4.10).

Determinați:

- a) forța de reacțiune a muchiei C ;
- b) tensiunea mecanică din cablul de susținere a barei;
- c) forța de reacțiune a podelei.

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} m &= 24 \text{ kg}, \\ l &= 2 \text{ m}, \\ h &= 1,5 \text{ m}, \\ \alpha &= 60^\circ \end{aligned}$$

- a) $N_c - ?$, b) $T - ?$,
- c) $N_a - ?$

Asupra barei acționează forța de greutate $m\vec{g}$, reacțiunea $\vec{N}_a$ normală pe podea, reacțiunea muchiei $\vec{N}_c$ perpendiculară pe bară și tensiunea cablului $\vec{T}$ (fig. 4.11). Condiția pentru echilibrul de translație al barei impune $m\vec{g} + \vec{N}_a + \vec{N}_c + \vec{T} = 0$.

Făcând proiecția pe axele de coordonate indicate în figura 4.11, obținem

$$\text{pe axa } Ox \quad N_c \sin \alpha - T = 0; \quad (1)$$

$$\text{pe axa } Oy \quad -mg + N_a + N_c \cos \alpha = 0. \quad (2)$$

Celor două ecuații cu trei mărimi necunoscute (N_a , N_c și T) o alăturăm pe a treia, care exprimă condiția pentru echilibrul de rotație. Egalăm cu zero suma momentelor forțelor în raport cu axa ce trece prin A , perpendicular pe planul figurii. Momentele reacțiunilor $\vec{N}_a$ și $\vec{T}$ în raport cu această axă sunt nule. Astfel obținem o ecuație cu o singură necunoscută:

$$mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha - N_c \cdot AC = 0. \quad (3)$$

- a) Distanța $AC = \frac{h}{\sin \alpha}$; prin urmare, ecuația (3) se transcrie sub forma $mg \cdot \frac{l}{2} \cdot \cos \alpha - N_c \cdot \frac{h}{\sin \alpha} = 0$, din care exprimăm forța de reacțiune a muchiei C

$$N_c = \frac{mgl \sin \alpha \cos \alpha}{2h}; \quad N_c \approx 69,2 \text{ N}.$$

- b) Din ecuația (1) exprimăm tensiunea mecanică din cablul de susținere a barei $T = N_c \sin \alpha$; $T \approx 59,9 \text{ N}$.

- c) Forța de reacțiune a podelei se determină simplu din ecuația (2). Avem $N_a = mg - N_c \cos \alpha$; $N_a \approx 205,4 \text{ N}$.

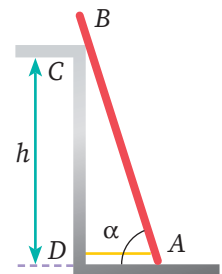


Fig. 4.10

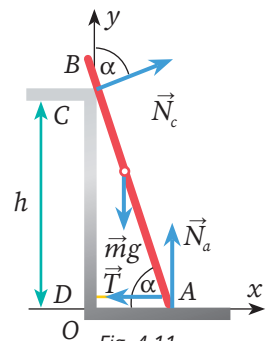


Fig. 4.11

Analizează și aplică!

- Un corp este atârnat de tavan cu două cabluri identice care fac unghiuri egale cu orizontala. Este oare posibil ca tensiunea mecanică din fiecare cablu să fie egală cu greutatea corpului?
- Forțele care constituie un cuplu de forțe au module egale cu F , iar distanța dintre direcțiile lor este d . Calculați momentul cuplului, ca suma momentelor forțelor ce-l constituie, în raport cu o axă perpendiculară pe planul cuplului. Depinde oare momentul cuplului de poziția acestei axe?
- Luați o bară lungă (cel puțin de 1 m) și încercați să o țineți în poziție orizontală, o dată apucată de un capăt, altă dată – de mijloc. Când este mai ușor să mențineți bara în poziție orizontală? Explicați de ce.

AUTOEVALUARE

- 1 Ce se numește braț al forței?
- 2 Definiți noțiunea de moment al forței.
- 3 Care este condiția de echilibru al unui rigid cu axă fixă de rotație?
- 4 Cum se va modifica condiția de echilibru de rotație, dacă s-ar adopta o altă convenție privind semnele momentelor forțelor: cele ce ar roti în sens orar ar fi considerate pozitive, iar cele care ar roti în sens trigonometric – negative?
- 5 Ce sistem de forțe este numit cuplu de forțe?
- 6 **ING** Doi muncitori de aceeași înălțime transportă o greutate așezată pe o scândură cu lungimea de 1 m, capetele căreia se sprijină pe umerii lor. Distanța de la greutate până la umărul unui muncitor este de 0,55 m, iar forța ce acționează pe umărul acestuia este de 450 N. Determinați forța ce acționează pe umărul muncitorului al doilea. Masa scândurii se neglijează.
- 7 O tijă omogenă de masă $m = 2$ kg și lungime $l = 1,2$ m are suspendate de capetele sale două corpuri cu masele $m_1 = 4$ kg și $m_2 = 6$ kg. La ce distanță de la capătul de care este suspendat corpul m_1 trebuie să se afle punctul de sprijin, pentru ca tija să se afle în echilibru?
- 8 **BIO** Sub acțiunea mușchiului biceps un om ține orizontal în mână un corp cu masa de 1 kg. Lungimea antebrațului $L = 34$ cm, iar greutatea lui $G = 14$ N este aplicată în centrul de greutate care se află la o distanță $l = 15$ cm de la cot (fig. 4.12). Ce forță F perpendiculară pe antebraț ar trebui să aplice mușchiul biceps pentru a ține corpul orizontal dacă el acționează la distanța $b = 4$ cm de la cot? Accelerația gravitațională se va considera $g = 10$ m/s².
- 9 Un muncitor menține o scândură de masă $m = 30$ kg de un capăt al acesteia, astfel încât scândura formează un unghi $\alpha = 30^\circ$ față de orizontală. Care este valoarea forței aplicate perpendicular pe scândură de către muncitor? Care ar fi valoarea forței, dacă aceasta ar fi verticală?
- 10 **ING** Masa unui cilindru de presare este egală cu 3 600 kg, iar raza lui este egală cu 45 cm. Determinați forța de tracțiune orizontală, necesară pentru a trece cilindrul peste o piatră cu înălțimea de 9 cm. Accelerația gravitațională este egală cu 10 m/s².
- 11 **ING** O pârghie omogenă cu brațele egale cu 0,45 m și 0,60 m se află în echilibru în cazul când asupra brațului mai scurt al acesteia acționează o forță de 80 N. Determinați forța de presiune a pârgchiei asupra punctului de reazem.
- 12* **ING** O scară de lungime $l = 4$ m și de masă $m = 18$ kg este sprijinită de un perete vertical neted și formează cu acesta un unghi $\alpha = 30^\circ$. Până la ce înălțime maximă poate urca un om pe scară înainte ca aceasta să alunece, dacă coeficientul de frecare dintre scară și podea $\mu = 0,3$, iar masa omului este de $n = 4$ ori mai mare decât masa scării? Cu ce forță apasă scara asupra peretelui atunci când omul se află la această înălțime?
- 13* **ING** O tijă omogenă a fost îndoită sub un unghi drept, astfel încât lungimea unei părți a ei este egală cu 1/3 din lungimea tije. Tija a fost atârnată cu unghiul drept de un cui. Ce unghi formează porțiunea mai scurtă a tije cu direcția orizontală?

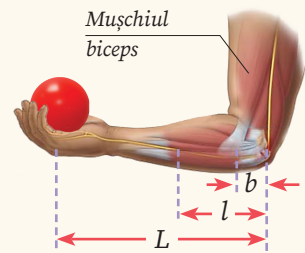


Fig. 4.12

Centrul de greutate al sistemului de puncte materiale

Considerăm un corp rigid ale cărui dimensiuni sunt mult mai mici decât raza Pământului. Ne imaginăm corpul divizat într-un număr mare n de volume mici V_i de mase egale cu m_i . Asupra acestora acționează forțe de greutate $G_i = m_i g$. Dimensiunile corpului fiind mici, aceste forțe sunt paralele.

Rezultanta forțelor paralele $\vec{G} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \dots + \vec{G}_n$ este forța de greutate a corpului, iar punctul de aplicație al ei se numește *centru de greutate al corpului*.

Centrul de greutate al corpului este punctul față de care momentul total al forțelor de greutate ce acționează asupra corpului este egal cu zero.

Cunoașterea poziției centrului de greutate este deosebit de importantă în tehnică, deoarece ea determină stabilitatea clădirilor, a turnurilor, a strungurilor, a barajelor, a navelor maritime, a automobilelor etc.

a Determinarea poziției centrului de greutate

Poziția centrului de greutate al corpului se determină mai simplu atunci când acesta este omogen și are elemente de simetrie. De exemplu, inelul, figura plană de forma unui paralelogram de grosime constantă, sfera, cilindrul, prisma dreaptă au centre de simetrie. Centrele de greutate coincid cu ele. Menționăm că centrul de greutate poate fi și un punct ce nu aparține corpului, ca la inel. Trunchiul de con (fig. 4.13, a) are o axă de simetrie OO' – centrul

de greutate al său se află pe această axă. Un ciocan (fig. 4.13, b) are două plane de simetrie – P și P' . Centrul de greutate al ciocanului se află pe aceste plane de simetrie, adică pe linia de intersecție a lor.

Relativ simplu se determină poziția centrului de greutate al unei plăci triunghiulare omogene de grosime constantă. Ne imaginăm triunghiul divizat în fâșii înguste, paralele cu una dintre laturile lui, de exemplu, cu AD (fig. 4.14). Centrul de greutate al fiecărei fâșii se află la mijlocul ei, adică centrele de greutate ale tuturor fâșiilor se află pe mediana BE ; pe ea se află deci și centrul de greutate al triunghiului. Dacă ne-am fi imaginat triunghiul divizat în fâșii paralele cu latura AB , am fi ajuns la concluzia că centrul de greutate se află pe mediana DF . Astfel, conchidem că centrul de greutate C al plăcii triunghiulare de grosime constantă se află la intersecția medianelor. Se știe că acest punct împarte mediana într-un raport anumit: $EC : CB = FC : CD = 1 : 2$.

Poziția centrului de greutate al figurii plane neomogene sau de formă neregulată se determină, cel mai simplu, pe cale experimentală. Corpul se suspendă de un fir. În stare de echilibru, forța sa de greutate, aplicată în centrul de greutate, este echilibrată de tensiunea firului. Prin urmare, aceste două forțe au o dreaptă-suport comună. Centrul de greutate se află pe direcția firului de suspensie. Trasăm direcția corespunzătoare AA' pe corp (fig. 4.15, a). Experimentul se repetă suspendând corpul în alt punct al său B (fig. 4.15, b) și se trasează pe corp direcția BB' a firului. Centrul de greutate aparține ambelor direcții (AA' și BB'), deci se află în punctul C de intersecție a lor.

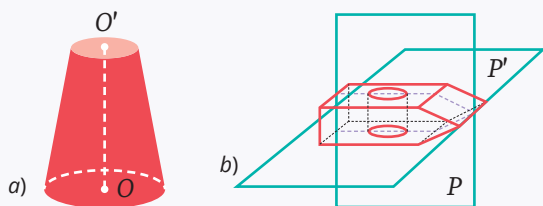


Fig. 4.13

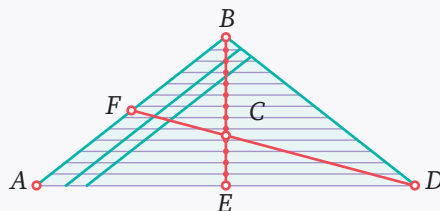


Fig. 4.14

Evident, corpul fixat în centrul de greutate se află în echilibru în orice poziție a sa, când asupra lui acționează numai forțele de greutate.

Cunoașterea poziției centrului de greutate este necesară pentru a analiza stabilitatea corpurilor. Analizăm un corp care are o suprafață de sprijin, de exemplu, un cilindru. Din figura 4.16 se vede că în cazul a) corpul se află în echilibru (forța de greutate este echilibrată de reacțiunea suportului), iar în cazul c) corpul se răstoarnă. În cazul b) corpul se află la limita echilibrului, adică în echilibru nestabil.

Corpul cu suprafață de sprijin se află în echilibru stabil atunci când verticala coborâtă din centrul de greutate trece prin această suprafață.

Stabilitatea echilibrului unui corp cu mai multe suprafețe posibile de sprijin depinde de suprafața pe care el este așezat. Din figura 4.17 se vede că la înclinarea corpului cu același unghi α , după eliberarea lui, în cazul a) corpul se întoarce în poziția inițială, iar în cazul b) el se răstoarnă. Echilibrul este cu atât mai stabil, cu cât poziția centrului de greutate al corpului este mai joasă față de suprafața de sprijin. Ulterior, la aceeași concluzie se va ajunge din alte considerente.

Dacă un corp are mai multe regiuni de contact cu suportul pe care se află, atunci rolul suprafeței de sprijin îl are **baza de sprijin** – suprafața limitată de conturul obținut prin unirea punctelor celor mai îndepărtate de contact cu suportul. În figura 4.18 este reprezentată baza de sprijin a unei mese.

b) Echilibrul în câmpul gravitațional

Să analizăm starea de echilibru mecanic al unui corp în câmpul gravitațional, unde acesta este supus acțiunii forțelor de greutate și a forțelor de legătură.

Spunem că un corp este în echilibru static dacă acesta este imobil în raport cu un sistem de referință inerțial. Condiția necesară ca în raport cu acest sistem de referință corpul să fie în echilibru este ca suma vectorială a tuturor forțelor care acționează asupra lui să fie nulă. Dar este oare această condiție și suficientă pentru ca echilibrul să fie stabil?

Admitem că energia potențială gravitațională în starea inițială E_{p1} este mai mare decât în starea finală $E_{p2} < E_{p1}$. Atunci din relația (3.37) rezultă că lucrul forței de greutate este pozitiv $L_{12} > 0$, deci unghiul dintre forță

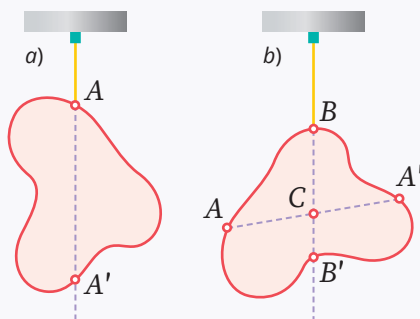


Fig. 4.15

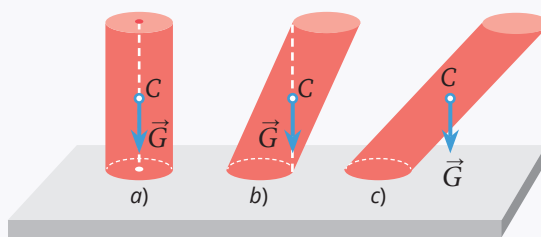


Fig. 4.16

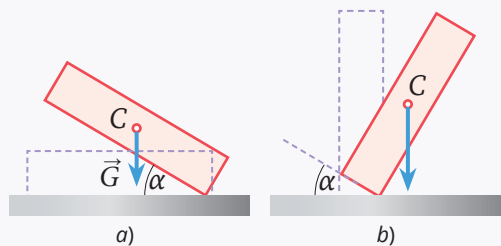


Fig. 4.17



Fig. 4.18

și deplasare este ascuțit. Aceasta înseamnă că forța de greutate are o componentă orientată în sensul deplasării, adică în sensul micșorării energiei potențiale.

Relația dintre lucrul mecanic și energia potențială gravitațională permite să se formuleze unele concluzii referitoare la **stabilitatea stării de echilibru mecanic**.

Considerăm trei cazuri diferite ale echilibrului unei bile (fig. 4.19). În toate cazurile, în poziția de echilibru 1, forța de greutate $m\vec{g}$ a bilei este echilibrată de reacțiunea normală $\vec{N}$ a suprafeței pe care ea se află. Pentru a cerceta stabilitatea stărilor de echilibru, ne imaginăm că bila este deviată puțin (stările 2 din fig. 4.19) de la poziția sa de echilibru și să urmărim comportarea ulterioară a ei.

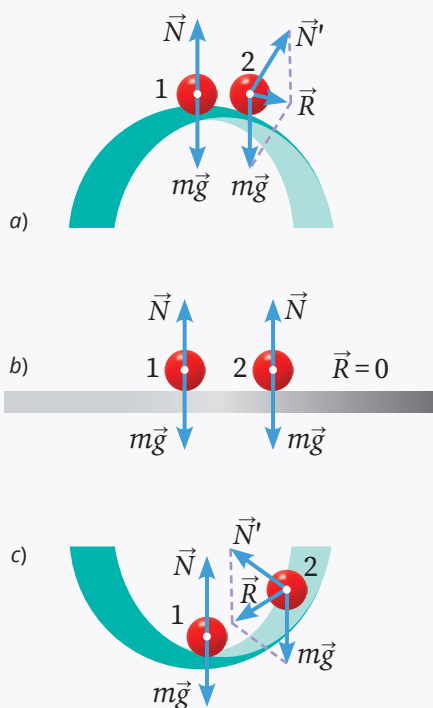


Fig. 4.19

Energia potențială a bilei în poziția de echilibru 1 din figura 4.19, a este maximă. Fie bila este deplasată puțin, în poziția 2. Energia potențială a bilei se micșorează și forța rezultantă $\vec{R}$ care acționează asupra bilei o îndepărtează de poziția de echilibru. Un astfel de echilibru – starea 1 (fig. 4.19, a) – este numit **echilibru nestabil**. Bila, fiind puțin deplasată din această stare, se îndepărtează tot mai mult de ea.

La devierea bilei din poziția sa de echilibru 1 pe o suprafață orizontală (fig. 4.19, b) energia potențială rămâne constantă ($\Delta E_p = 0$), deci în direcție orizontală asupra bilei nu acționează o forță rezultantă diferită de zero. Același rezultat se obține adunând forțele ce acționează asupra bilei în poziția 2. Bila continuă să rămână în echilibru, numit **echilibru indiferent**.

În fine, în starea de echilibru 1, reprezentată în figura 4.19, c, energia potențială a bilei este minimă. La o mică deplasare a ei din această poziție energia potențială crește (în poziția 2), deci asupra bilei acționează o forță orientată în sens contrar deplasării, adică spre poziția de echilibru. Același rezultat se obține și în urma compunerii forțelor ce acționează asupra bilei în poziția 2 (fig. 4.19, c). Starea de echilibru 1 din această figură se numește stare de **echilibru stabil**.

Rezumând cele expuse mai sus, conchidem că:

Starea de echilibru nestabil reprezintă starea în care energia potențială gravitațională a corpului este maximă, starea de echilibru stabil constituie acea stare în care energia potențială este minimă, iar stări de echilibru indiferent îi corespunde o valoare constantă a acestei energii în regiunile vecine ale corpului.

Aceste concluzii privind stabilitatea stării de echilibru mecanic rămân valabile pentru orice câmp de forțe conservative. Putem afirma că starea de echilibru stabil al unui sistem de corpuri aflat într-un câmp de forțe conservative este starea cu energia potențială minimă.

AUTOEVALUARE

- 1 Ce este centrul de greutate al corpului?
- 2 În ce caz corpul cu suprafață de sprijin se află în echilibru?
- 3 Explicați cum se determină centrul de greutate al figurilor plane de formă neregulată.
- 4 Caracterizați cu ajutorul energiei potențiale a corpului tipurile de echilibru în câmp gravitațional.

STEAM

Asigurarea stabilității echilibrului în inginerie

Scopul proiectului

Conștientizarea importanței echilibrului diferitelor corpuri și sisteme.

Formați 4 echipe de lucru.

Discutați și repartizați volumul de lucru între echipe.

Realizați proiectul STEAM efectuând cercetări după următoarele repere:

Investigați istoricul descoperirii echilibrului și **studiați** condițiile de realizare.

Analizați mecanisme naturale și artificiale la funcționarea cărora este folosit echilibrul.

Explicați importanța menținerii echilibrului pentru corpul uman, pentru animale și pentru ecosisteme utilizând și cunoștințele de la alte discipline școlare.

Alegeți un mecanism natural sau artificial în care echilibrul deține un rol fundamental și **realizați** o lucrare artistică (desen, colaj, grafică digitală sau altă tehnică la alegere) în care **să ilustrați** vizual acest echilibru prin culori, linii, forme etc.

Propuneți soluții pentru problemele existente în cotidian cu referire la problema studiată și **argumentați** importanța implementării acestora pentru potențialii beneficiari.

Estimați dacă inițiativele și soluțiile propuse sunt fezabile în contextul situației reale a comunității în care locuiți.

Elaborați o prezentare Power Point în care **să reflectați** cercetările și rezultatele obținute în cadrul proiectului.



Coordonatele centrului de greutate. Centrul de masă

Să determinăm poziția centrului de greutate al unui sistem de două bile omogene, unite cu o tijă subțire. Pentru simplitate, admitem că masa tijei este mult mai mică decât masele m_1 și m_2 ale bilelor, iar razele acestora sunt mult mai mici decât lungimea tijei. În acest caz masa tijei se neglijează, iar bilele se consideră puncte materiale.

Deducem formula care permite calcularea coordonatelor centrului de greutate al celor două puncte materiale (al bilelor) când sunt cunoscute coordonatele lor. Reprezentăm sistemul considerat în figura 4.20 și introducem notațiile corespunzătoare. Aplicând condiția echilibrului de rotație (4.6), obținem

$$G_1 b_1 \cos \alpha = G_2 b_2 \cos \alpha. \quad (4.8)$$

Din relația (4.8) exprimăm raportul modulelor forțelor de greutate:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{b_2}{b_1}. \quad (4.9)$$

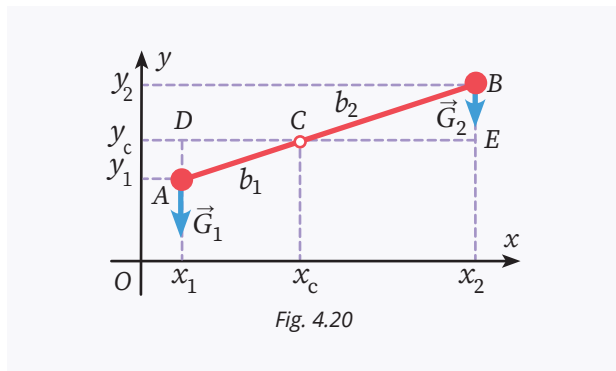


Fig. 4.20

Triunghiurile dreptunghice CDA și CEB sunt asemenea. Scriem raportul laturilor corespunzătoare:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD} = \frac{BE}{AD}. \quad (4.10)$$

Din figură observăm: $BC = b_2$, $AC = b_1$, $CE = x_2 - x_c$, $DC = x_c - x_1$, $BE = y_2 - y_c$ și $AD = y_c - y_1$. Relațiile (4.10) iau forma

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} = \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1}.$$

Ținând seama de relația (4.9), putem scrie

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{x_2 - x_c}{x_c - x_1} \text{ și } \frac{G_1}{G_2} = \frac{y_2 - y_c}{y_c - y_1}.$$

De aici obținem expresiile coordonatelor centrului de greutate al celor două bile (puncte materiale):

$$x_c = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}; \quad y_c = \frac{G_1 y_1 + G_2 y_2}{G_1 + G_2}. \quad (4.11)$$

Menționăm că aceste formule își păstrează forma și în cazul unui sistem din mai multe puncte materiale:

$$x_c = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2 + \dots + G_n x_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}; \quad (4.12)$$

$$y_c = \frac{G_1 y_1 + G_2 y_2 + \dots + G_n y_n}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}.$$

O formulă similară poate fi scrisă și pentru coordonata z_c în cazul când punctele materiale nu se află în unul și același plan.

Substituind $G_1 = m_1 g$ și $G_2 = m_2 g$ în formulele (4.11), după simplificarea prin g , obținem

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}; \quad (4.13)$$

$$y_c = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

Evident, aceleași formule (4.13) se obțin și în cazul când asupra punctelor materiale acționează forțe paralele, ale căror valori sunt proporționale cu masele: $\vec{F}_1 = m_1 \vec{k}$, $\vec{F}_2 = m_2 \vec{k}$, unde $\vec{k}$ are semnificația unei accelerații care în cazul forțelor de greutate coincide cu accelerația gravitațională $\vec{g}$. Deci formulele (4.13) au un caracter mai general decât formulele (4.11).

Punctul C, ale cărui coordonate se determină din formulele (4.13), este numit centrul de masă al sistemului de puncte materiale.

Această noțiune rămâne aplicabilă și atunci când asupra punctelor materiale nu acționează forțele de greutate paralele, de exemplu, în stare de imponderabilitate.

Problemă REZOLVATĂ

Două sfere omogene de raze r și $2r$, confecționate din același material, sunt fixate în punctul lor de tangență. Determinați poziția centrului de greutate al sistemului de sfere în raport cu punctul de tangență al sferelor.

Rezolvare

Se dă:

$$R_1 = r,$$

$$R_2 = 2r,$$

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho$$

$$x_c = ?$$

Reprezentăm sistemul mecanic considerat în figura 4.21. Centrul de greutate C al sistemului se află pe axa Ox , care trece prin linia centrelor C_1 și C_2 și este o axă de simetrie.

Masele sferelor sunt $m_1 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ și $m_2 = \frac{4}{3} \pi (2r)^3 \rho$, unde ρ este densitatea substanței din care s-au confecționat sferele.

Coordonatele centrelor de greutate ale sferelor sunt $x_1 = -r$ și $x_2 = +2r$.

Folosim formula (4.11) pentru coordonata centrului de greutate: $x_c = \frac{G_1 x_1 + G_2 x_2}{G_1 + G_2}$.

Substituind mărimile corespunzătoare, obținem $x_c = \frac{5r}{3}$.

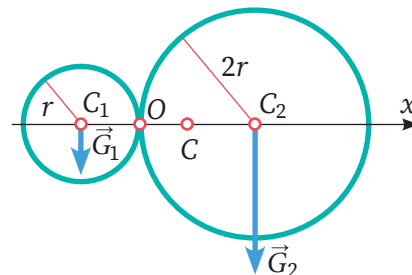


Fig. 4.21

AUTOEVALUARE

- 1 Care noțiune este mai generală: centrul de greutate sau centrul de masă? Argumentați răspunsul.
- 2 **ING** De la un cilindru omogen de lungime $L = 2$ m a fost tăiat un capăt de lungime $l = 0,4$ m. În ce sens și cu cât s-a deplasat centrul de greutate al cilindrului?
- 3 **ING** Două sfere de raze $r = 10$ cm, una din aluminiu și a doua din cupru, sunt fixate rigid în punctul de tangență al lor. Determinați poziția centrului de greutate al sistemului de sfere față de punctul lor de tangență. Densitatea aluminiului $\rho_1 = 2,70 \cdot 10^3$ kg/m³, densitatea cuprului $\rho_2 = 8,96 \cdot 10^3$ kg/m³.
- 4 **ING** O figură de forma celei reprezentate în figura 4.22 este tăiată dintr-o foaie de tablă. Determinați coordonatele centrului ei de masă, dacă se cunosc dimensiunile: $AB = 12$ cm, $BD = 20$ cm, $AE = 35$ cm.
- 5 **ING** O tijă omogenă a fost îndoită în două părți egale, care formează între ele un unghi drept. Tija a fost suspendată de un capăt cu un fir. Ce unghi formează partea superioară a tije cu direcția orizontală?

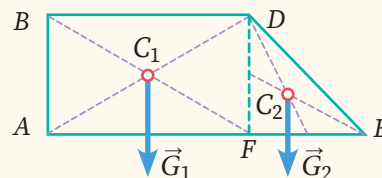


Fig. 4.22

COMUNICARE

Măsurile de asigurare a stabilității echilibrului în inginerie. Aplicarea condițiilor de echilibru în diferite domenii

Creați 2 grupuri de lucru și **repartizați** volumul activităților.

Studiați diferite surse pentru informare și selectare a materialului necesar.

Realizați comunicarea după următoarele **obiective**:

- 1 **Descoperiți** conceptul de echilibru și **identificați** condițiile de realizare a acestuia.
- 2 **Studiați** modul de asigurare a echilibrului în cazul mecanismelor simple.
- 3 **Analizați** dispozitivele care funcționează pe baza principiilor mecanismelor simple (foarfeca, balan-soarul, capsatorul ș.a.).
- 4 **Explorați** aplicarea condițiilor de echilibru în construcții, în medicină (la fixarea diferitelor fracturi), precum și în alte domenii ingineresti.
- 5 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 6 **Prezentați** și **evaluați** reciproc produsele realizate.

Test de evaluare sumativă

PROFIL REAL

1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p.** **a** Un corp se află în echilibru de rotație, dacă suma algebrică a _____ în raport cu axa de rotație este egală cu zero;
- 1 p.** **b** Mărimea egală cu distanța de la dreapta-suport a forței ce acționează asupra corpului până la axa lui de rotație se numește _____ în raport cu această axă;
- 1 p.** **c** Punctul de aplicație al forței de greutate a unui corp se numește _____ al corpului.

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

1 p.	Brațul forței	$N \cdot m$
1 p.	Lucrul mecanic	W
1 p.	Momentul forței	cm
		J

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- 1 p.** **A** **F** **a** Un solid rigid se află în echilibru de rotație, atunci când rezultanta forțelor care acționează asupra lui este egală cu zero.
- 1 p.** **A** **F** **b** Un corp se află în echilibru stabil în câmpul gravitațional, dacă energia lui potențială este minimă în raport cu valorile ei în pozițiile vecine.
- 1 p.** **A** **F** **c** Momentul forțelor, dreptele-suport ale cărora trec prin axa de rotație a corpului întotdeauna este egal cu zero.

4 **3 p.** În figura 4.23 este reprezentat un corp acționat de forța $F = 50 \text{ N}$ orientată sub unghiul $\alpha = 150^\circ$ față de segmentul OA cu lungimea de 30 cm . Construiți brațul acestei forțe și determinați momentul ei în raport cu axa de rotație care trece prin punctul O .



Fig. 4.23

5 **3 p.** O bară omogenă cu greutatea de 90 N este sprijinită într-un punct la distanța egală cu $1/3$ din lungimea ei. Ce forță trebuie aplicată la capătul mai scurt al barei, pentru ca aceasta să se afle în echilibru?

6 **3 p.** Patru bile cu masele de $0,1 \text{ kg}$, $0,2 \text{ kg}$, $0,3 \text{ kg}$ și $0,4 \text{ kg}$ sunt fixate pe o tijă subțire, astfel încât centrele lor se află la aceeași distanță de 20 cm una de alta. Neglijând masa tijei, determinați centrul de masă al sistemului de bile.

7 La suspendarea unei greutatei cu masa de 20 kg de mijlocul unui cablu cu lungimea $l_0 = 1 \text{ m}$, jumătățile acestuia formează un unghi de 120° . Considerând $g = 10 \text{ m/s}^2$, determinați:

- 3 p.** **a** forța de tensiune în fiecare dintre jumătățile de cablu;
- 3 p.** **b** cu cât s-a alungit cablul după suspendarea greutatei;
- 2 p.** **c** la ce distanță s-a deplasat greutatea în jos pe verticală după alungirea cablului.

8 **6 p.** O scară cu lungimea $l = 3 \text{ m}$ se sprijină de un perete neted (fără frecare) vertical sub un unghi de $\alpha = 60^\circ$ față de orizont. Valoarea maximă a forței de frecare la alunecarea scării pe podea este de $F_{fr} = 100 \text{ N}$. La ce distanță de-a lungul scării se poate deplasa un elev cu masa de 40 kg până când scara va începe să alunece? Masa scării se va neglija, iar accelerația gravitațională se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p. a) Corpurile care limitează posibilitatea de mișcare a unui alt corp considerat sunt numite _____;
- 1 p. b) Un corp rigid se află în echilibru de translație, dacă _____ care acționează asupra lui este egală cu zero;
- 1 p. c) Momentul forței în raport cu o axă de rotație este egal ca mărime cu produsul dintre _____ acesteia.

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

1 p.	Brațul forței	N · m
1 p.	Lucrul mecanic	W
1 p.	Momentul forței	cm
		J

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- 1 p. A F a) Asupra unui corp aflat în stare de repaus acționează cel puțin două forțe.
- 1 p. A F b) Cuplul de forțe constă din două forțe egale în modul care acționează în același sens de-a lungul a două drepte-suport paralele.
- 1 p. A F c) Momentul unei forțe este cu atât mai mare, cu cât brațul ei este mai mic.

4 3 p. În figura 4.24 este reprezentat un corp acționat de o forță F orientată sub un unghi $\alpha = 30^\circ$ față de segmentul OA cu lungimea de 20 cm. Construiți brațul acestei forțe și determinați valoarea ei dacă momentul forței în raport cu axa de rotație care trece prin punctul O este de $5 \text{ N} \cdot \text{m}$.

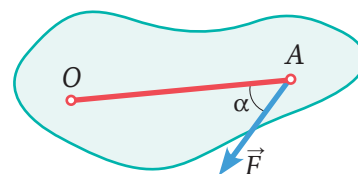


Fig. 4.24

5 3 p. Care este forța orizontală minimă necesară pentru a apăsa o bară de formă paralelipipedică pe un perete, astfel încât să nu alunece în jos? Masa barei este de 0,4 kg, iar coeficientul de frecare dintre bară și perete este de 0,1. Se va considera $g = 10 \text{ m/s}^2$.

6 3 p. O bară omogenă cu masa de 100 kg se află pe o suprafață orizontală. Ce forță verticală trebuie aplicată la un capăt al barei pentru a o desprinde de suprafață? Considerați $g = 10 \text{ m/s}^2$.

7 Două resorturi cu rigiditățile $k_1 = 100 \text{ N/m}$ și $k_2 = 300 \text{ N/m}$, care în stare nedeformată au aceeași lungime, sunt legate în serie (unul în continuarea celuilalt). La capătul resorturilor astfel legate este suspendat un corp cu masa $m = 600 \text{ g}$. Considerând $g = 10 \text{ m/s}^2$, determinați:

- 3 p. a) alungirea sistemului de resorturi;
- 3 p. b) rigiditatea sistemului de resorturi;
- 2 p. c) lucrul mecanic efectuat pentru alungirea sistemului de resorturi.

8 6 p. Masa unui cilindru de presare este egală cu 7 200 kg, iar raza lui este egală cu 52 cm. Determinați forța de tracțiune orizontală, necesară pentru a trece cilindru peste o piatră cu înălțimea de 4 cm. Accelerația gravitațională se va considera egală cu 10 m/s^2 .



OSCILAȚII ȘI UNDE MECANICE

5.1

Procese oscilatorii în natură și în tehnică. Mărimi caracteristice mișcării oscilatorii

În natură și în tehnică întâlnim frecvent mișcări ce se repetă după anumite intervale de timp, adică **periodic**. De exemplu, orice mișcare uniformă de rotație a unui corp este periodică: fiecare punct al corpului trece prin pozițiile ocupate la rotațiile precedente, având, totodată, viteza și sensul mișcării identice. O mișcare periodică efectuează și corpul suspendat de un fir sau un resort, balansierul unui ceasornic, barca pe valurile mării, plasa păianjenului, când în ea nimerește prada etc. Însă nu orice mișcare periodică este și oscilatorie. Mișcarea uniformă de rotație diferă esențial de cea descrisă în exemplele menționate. La o analiză mai detaliată observăm că mișcarea se poate realiza în jurul unei poziții fixe, care coincide cu cea de echilibru stabil, numită **centru de oscilație**. În figura 5.1 sunt prezentate exemple de mișcări oscilatorii, unde cu OO' este indicat nivelul poziției echilibrului stabil.

Mișcarea ce se repetă periodic de-a lungul unei oarecare traiectorii parcurse succesiv în sensuri opuse se numește oscilație mecanică, iar sistemul care o realizează – oscilator.

Orice oscilație se caracterizează prin anumiți parametri cantitativi, care, în condițiile date, își mențin valoarea numerică constantă și o deosebesc de alte oscilații. Acești parametri sunt **amplitudinea**, **perioada** și **frecvența**.

Valoarea abaterii maxime a corpului ce oscilează de la poziția de echilibru stabil se numește amplitudine.

Ea este determinată de condițiile inițiale aplicate oscilatorului mecanic, adică de acțiunea care îl aduce în stare de mișcare. Amplitudinea poate fi atât o mărime liniară, cât și unghiulară. În funcție de aceasta, unitatea ei în SI este **metrul (m)** sau **radianul (rad)**. În figura 5.1 amplitudinea este notată cu litera A (fig. 5.1, a, c, d) și, respectiv, cu φ_m (amplitudine unghiulară) (fig. 5.1, b).

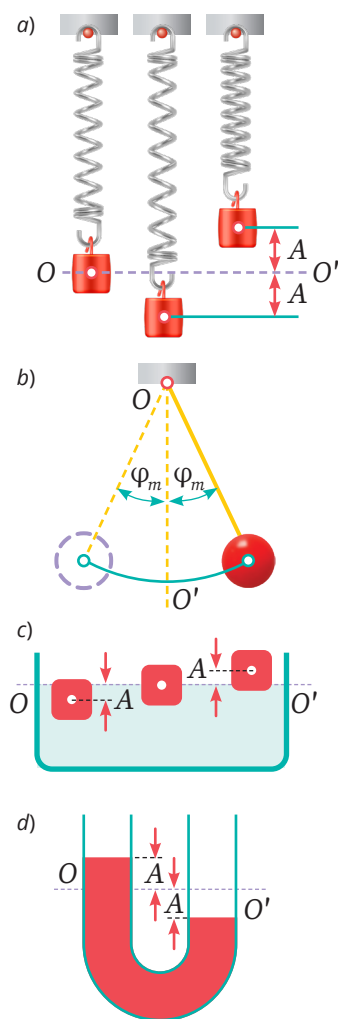


Fig. 5.1

Mișcarea dintre două treceri succesive a oscilatorului prin același punct al traiectoriei, posedând viteză și accelerație identice, reprezintă o oscilație completă. Timpul (T) necesar pentru efectuarea ei se numește *perioadă*. În SI unitatea perioadei este secunda [T] = 1 s.

Dacă se cunoaște perioada oscilațiilor T , atunci numărul de oscilații complete N , efectuate în intervalul de timp t , se determină din relația

$$N = \frac{t}{T}. \quad (5.1)$$

Un alt parametru ce descrie o oscilație este **frecvența**. Ea este notată cu litera grecească ν (*niu*) și caracterizează rapiditatea repetării mișcării oscilatorii.

Mărima ν egală numeric cu numărul de oscilații complete efectuate într-o unitate de timp se numește *frecvență* a oscilațiilor:

$$\nu = \frac{N}{t} = \frac{1}{T}. \quad (5.2)$$

Unitatea frecvenței în SI este **hertzul** (Hz):

$$[\nu] = \text{s}^{-1} = \text{Hz}.$$

Pentru a stabili condițiile necesare pentru apariția și menținerea mișcării oscilatorii, să analizăm mișcarea unui corp fixat la capătul unui resort. Presupunem că se realizează o situație ideală, când forțele de frecare și de rezistență nu acționează (fig. 5.2). Mișcarea oscilatorie, ca oricare altă mișcare, se produce numai în urma unor interacțiuni cu alte corpuri. Astfel, corpul care oscilează împreună cu cele cu care interacționează alcătuiesc un **sistem oscilant**, în care se realizează starea de echilibru stabil și se pot produce oscilații. În exemplul considerat, sistemul oscilant conține două componente: corpul, a cărui mișcare se va cerceta, și resortul.

Inițial corpul se află în poziția de echilibru stabil O (fig. 5.2, a), în care forța de elasticitate este nulă. Pentru a-l scoate din această poziție, este necesară acțiunea unei forțe exterioare. Considerând că această forță nu depășește limitele elasticității, în resortul deformat prin alungire apare forța de elasticitate $F_{e,x} = -kx$, sub a cărei acțiune corpul începe să se deplaseze din poziția 1 spre poziția de echilibru O (fig. 5.2, b), mărindu-și treptat viteza. Conform principiului fundamental al dinamicii:

$$-kx = ma_x. \quad (5.3)$$

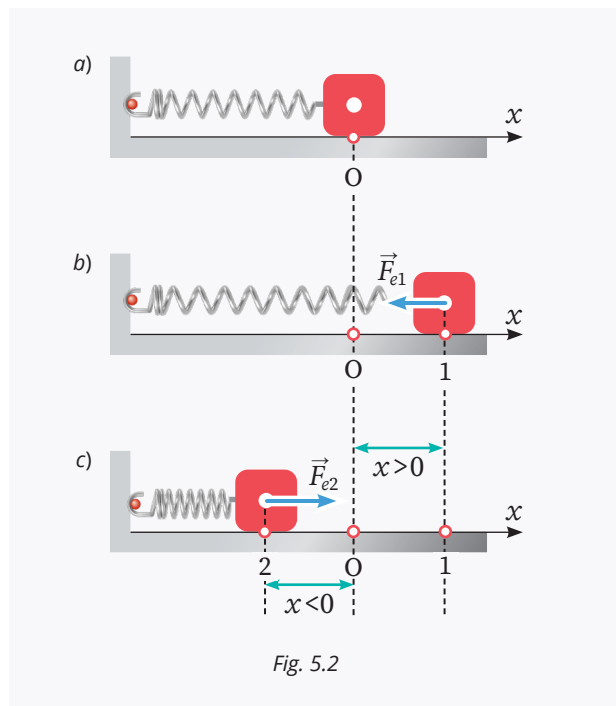


Fig. 5.2

În poziția 1 forța de elasticitate, deci și accelerația corpului, este maximă. Odată cu apropierea corpului de poziția de echilibru (micșorarea coordonatei x), forța de elasticitate F_{e1} și accelerația corpului tind spre zero, iar viteza crește și în poziția de echilibru atinge o valoare maximă.

Datorită inerției, corpul trece prin poziția de echilibru O și se deplasează spre stânga, comprimând resortul. Întrucât la comprimare în resort ia naștere forța de elasticitate F_{e2} de sens opus vitezei corpului, mișcarea lui este încetinită. Accelerația corpului se mărește în modül, iar viteza lui se micșorează. În poziția 2 (fig. 5.2, c) viteza este egală cu zero, iar valorile forței din resort și a accelerației devin maxime. Mai mult ca atât, deoarece se cercetează o situație ideală $|F_{e2}| = |F_{e1}|$, deplasările corpului în stânga și în dreapta de la poziția de echilibru sunt egale. Sub acțiunea forței F_{e2} , corpul începe mișcarea accelerată spre dreapta, mărindu-și viteza. Deoarece în poziția de echilibru $|F_{e2}| = 0$, conform ecuației (5.3), accelerația corpului de asemenea este egală cu zero, iar viteza devine maximă. Continuându-și, după inerție, mișcarea spre dreapta, corpul își micșorează viteza, ajungând în poziția 1 (fig. 5.2, b) cu viteză nulă, forța F_{e1} și accelerația fiind maxime. Ulterior mișcarea corpului se va repeta în aceeași ordine. Așadar, corpul efectuează o mișcare periodică numită **oscilație**, trecând succesiv prin pozițiile 1 – O – 2 – O – 1.

Forța sub a cărei acțiune se produce mișcarea oscilatorie este orientată întotdeauna spre poziția de echilibru stabil și se numește *forță de revenire*. Oscilațiile efectuate de un corp numai sub acțiunea forței de revenire au fost numite *oscilații proprii*.

În realitate însă, asupra oricărui corp acționează și forțele de rezistență ale mediului. Din această cauză, oscilațiile proprii reprezintă o situație ideală care nu se realizează în practică.

Oscilațiile corpului care se produc sub acțiunea forței de revenire și a forțelor de rezistență ale mediului se numesc *oscilații libere*.

Ele se deosebesc de oscilațiile proprii cu atât mai puțin, cu cât forțele de rezistență sunt mai mici.

Astfel, oscilațiile proprii reprezintă un caz limită al oscilațiilor libere, când forțele de rezistență tind către zero. Este evident că acțiunea forțelor de rezistență va conduce la micșorarea în timp a amplitudinii și, totodată, la creșterea duratei unei oscilații complete, adică a perioadei. În acest caz oscilațiile sunt numite

amortizate. Oscilațiile libere, în cazul ideal când nu acționează forțele de rezistență, sunt cele proprii, iar în cazul real – cele amortizate.

Deseori, în practică, există situații când oscilațiile corpului se produc datorită acțiunii unei forțe exterioare periodice. De exemplu, vibrațiile automobilelor, avioanelor sau ale diferitelor obiecte, care se produc din cauza funcționării ritmice a motoarelor sau a altor dispozitive. Asemenea oscilații sunt numite **forțate**.

Din cele expuse, pot fi formulate condițiile necesare pentru apariția și menținerea oscilațiilor unui corp:

- corpul trebuie să posede o energie suplimentară în comparație cu energia lui în starea de echilibru stabil;
- asupra corpului scos din poziția de echilibru trebuie să acționeze o forță de revenire;
- dacă asupra corpului acționează și forțe de rezistență, atunci energia suplimentară nu trebuie să se consume complet pentru învingerea lor.

AUTOEVALUARE

- 1 Ce se numește oscilație mecanică? Propuneți exemple.
- 2 Prin ce se deosebește mișcarea oscilatorie de cea de rotație? Ce reprezintă centrul de oscilație?
- 3 Definiți amplitudinea, perioada și frecvența mișcării oscilatorii. Care sunt unitățile acestora în SI?
- 4 Care oscilații sunt numite libere? Prin ce se deosebesc ele de oscilațiile proprii?
- 5 Descrieți oscilațiile amortizate și cele forțate. Aduceți exemple ale acestor mișcări oscilatorii.
- 6 Formulați condițiile necesare pentru apariția și menținerea oscilațiilor.
- 7 Bila *B* se poate afla în pozițiile de echilibru 1 sau 2 (fig. 5.3). În care dintre aceste poziții este posibilă mișcarea oscilatorie? Argumentați răspunsul.
- 8 Suspendați o greutate la capătul unui fir și excitați starea de oscilație a acesteia. Determinați perioada oscilațiilor având la dispoziție un ceasornic fără secundar.
- 9 Un corp efectuează oscilații cu amplitudinea $A = 2$ cm. Ce distanță parcurge corpul timp de o perioadă?
- 10 În timp de 1 min. un balansoar (scrânciob) a efectuat 20 de oscilații complete. Care este perioada de oscilație a balansoarului?
- 11 Un corp efectuează 150 de oscilații complete în 2 minute. Determinați frecvența oscilațiilor.
- 12 Căruciorul fixat la capătul unui resort efectuează o oscilație completă în 0,5 s. Determinați frecvența oscilațiilor.
- 13 **BIO** Numărând bătăile inimii, Ionel a înregistrat 80 de bătăi într-un minut. Care sunt perioada și frecvența oscilațiilor inimii lui Ionel?
- 14 Un punct material efectuează oscilații armonice cu amplitudinea de 0,3 m. Ce drum parcurge punctul material în timp de o perioadă?
- 15 Perioada oscilațiilor unui corp este egală cu 4 s. În cât timp corpul parcurge distanța de la poziția de echilibru până la poziția în care abaterea este maximă?

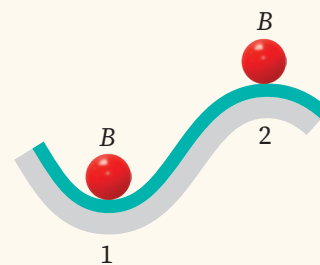


Fig. 5.3

Oscilatorul liniar armonic

În funcție de condițiile în care se află oscilatorul, mișcările executate de acesta sunt diverse, de cele mai multe ori, foarte complicate, iar descrierea lor cantitativă este destul de dificilă. Din această cauză, vom alcătui un model fizic idealizat, cu ajutorul căruia se va studia cea mai simplă mișcare oscilatorie. În calitate de oscilator se va considera un punct material de masă m , asupra căruia acționează doar forța de revenire, care reprezintă o funcție liniară în raport cu abaterea de la poziția echilibrului stabil (de exemplu, forța de elasticitate). Astfel de forțe sunt numite **cvasielastice** sau **de tip elastic**. Deoarece mișcarea oscilatorie realizată în cadrul acestui model, după cum vom vedea ulterior, este descrisă de o funcție armonică, el a fost numit **oscilator liniar armonic**. În realitate, astfel de oscilatori nu există, însă în condiții de laborator se pot confecționa sisteme oscilante cu proprietăți apropiate de condițiile ideale. De exemplu, un corp de dimensiuni mici și masă mare, suspendat de un resort perfect elastic, având masa neglijabilă în raport cu cea a corpului, este numit **pendul elastic**, iar același corp, suspendat de un fir lung inextensibil și imponderabil, **pendul gravitațional** sau **matematic**.

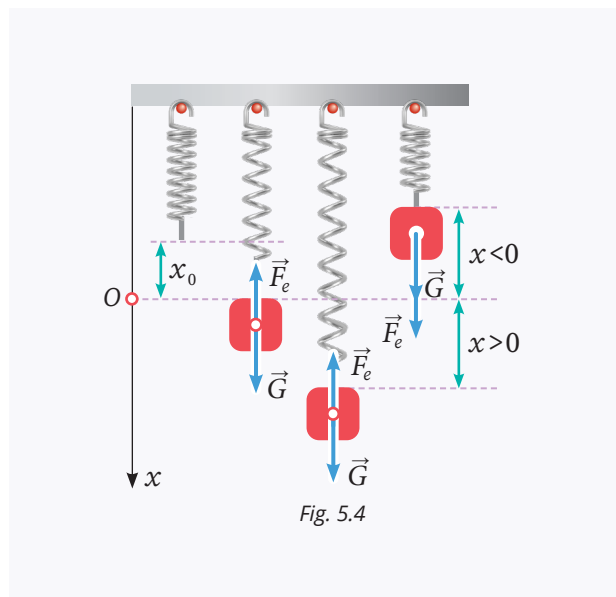
a Pendulul elastic

Fie un pendul elastic de masă m și constantă de elasticitate k . În starea inițială, sub acțiunea forței de greutate G , resortul deja este alungit cu x_0 , iar forța de elasticitate menține sistemul în poziția echilibrului stabil (fig. 5.4). Dacă luăm în această poziție originea axei de coordonate Ox , de-a lungul căreia se va produce mișcarea oscilatorie, atunci condiția echilibrului stabil se scrie sub forma $G = F_e$ sau

$$G = -kx_0. \quad (5.4)$$

La deplasarea corpului de la poziția de echilibru cu valoarea x în sensul pozitiv al axei de coordonate, din partea resortului acționează forța de elasticitate egală cu $-k(x - x_0)$ și legea a doua a lui Newton, care descrie această mișcare, capătă aspectul:

$$ma_x = -k(x - x_0) + G, \quad (5.5)$$



unde a_x este proiecția vectorului accelerație pe această axă. Luând în considerare (5.4), din (5.5) avem $ma_x = -kx$. Dacă împărțim această ecuație la m , obținem

$$a_x + \omega^2 x = 0, \quad (5.6)$$

unde

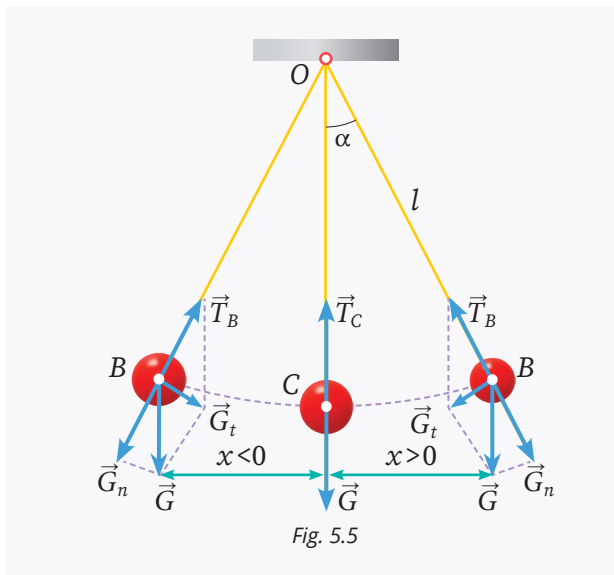
$$\omega^2 = k/m \quad (5.7)$$

reprezintă o constantă dependentă de proprietățile pendulului elastic, semnificația căreia va fi clarificată ulterior în punctul e al acestui paragraf.

Relația (5.6) descrie complet mișcarea oscilatorie a pendulului elastic și a fost numită **ecuația oscilatorului liniar armonic**.

b Pendulul gravitațional

Să analizăm particularitățile mișcării oscilatorii în cazul **pendulului gravitațional** (fig. 5.5). Sistemul oscilant este alcătuit din firul de lungime l , corpul punctiform de masă m și Pământul, din partea căruia acționează forța de greutate. Se scoate pendulul din poziția de echilibru stabil. În această stare asupra corpului acționează forța de greutate $G = mg$, orientată vertical în jos, și forța de tensiune T din fir, direcționată de-a lungul lui. Din figura 5.5 se observă că forța de greutate este caracterizată de două componente: normală G_n și tangentă G_t la traiectoria mișcării corpului, fiind orientate, respectiv, pe direcția firului și perpendicular acestuia.



Componenta G_t a forței de greutate imprimă corpului o accelerație a_t , numită **tangentială**, datorită căreia se modifică modulul vitezei lui. Sub acțiunea ei, pendulul începe să se deplaseze spre poziția de echilibru stabil de-a lungul unui arc de cerc de rază egală cu lungimea pendulului l , mărindu-și treptat viteza. În același timp, valoarea acestei componente G_t se micșorează și la trecerea prin poziția de echilibru stabil este egală cu zero (fig. 5.5), viteza fiind maximă. Datorită inerției, corpul trece dincolo de poziția de echilibru, continuându-și mișcarea cu viteză descrescătoare, deoarece apare componenta G_t a forței de greutate, orientată spre poziția de echilibru, însă de sens opus vectorului viteză. Când viteza corpului este egală cu zero, componenta tangențială a forței de greutate G_t are valoare maximă, corpul mișcându-se spre poziția de echilibru. G_t se manifestă ca o forță de revenire, sistemul cercetat îndeplinind condițiile necesare pentru realizarea mișcării oscilatorii.

Pentru obținerea ecuației mișcării acestui sistem oscilant, observăm că poziția corpului la orice moment de timp este descrisă de unghiul de abatere α a firului de la verticală sau de lungimea arcului, de-a lungul căruia se produce mișcarea. Unghiul α și lungimea arcului se vor considera pozitive dacă pendulul deviază spre dreapta de la poziția de echilibru și negative când deviază spre stânga. Din figura 5.5 se observă că proiecția forței de greutate pe direcția tangentă la traiectoria mișcării corpului, când firul pendulului formează unghiul α cu verticala, este

$$G_t = -G \sin \alpha = -mg \sin \alpha, \quad (5.8)$$

unde semnul „-” arată că G_t și α (deplasarea unghiulară de la poziția de echilibru) au întotdeauna orientări opuse. Dacă unghiul α este mic, lungimea arcului $\widehat{CB}$ este aproximativ egală cu lungimea coardei CB , care în acest caz reprezintă abaterea x de la poziția de echilibru. În această aproximație sectorul de cerc OCB , descris de firul pendulului de lungime l , se poate aproxima cu un triunghi dreptunghic (fig. 5.5), din care avem $\sin \alpha \approx CB/l = x/l$ și relația (5.8) capătă aspectul

$$G_t \approx -\frac{mg}{l} x. \quad (5.9)$$

Pentru valori mici ale unghiului α **forța de revenire** G_t este o forță cvasielastică și sistemul efectuează oscilații armonice. Conform legii a doua a lui Newton, în proiecții pe direcția cercetată $G_t = ma_t$, după introducerea relației (5.9) și simplificarea cu m , se obține ecuația

$$a_t + \omega^2 x = 0, \quad (5.10)$$

unde

$$\omega^2 = g/l. \quad (5.11)$$

De menționat că ecuația (5.10) este valabilă numai pentru unghiuri mici ($\alpha \leq 15^\circ$), când valoarea funcției „sinus” este aproximativ egală cu valoarea unghiului exprimată în radiani. Într-adevăr, dacă $\alpha \leq 15^\circ$, atunci deosebirea dintre valorile α și $\sin \alpha$ este mai mică decât 1%. Este evident că pentru unghiuri mai mari oscilațiile pendulului cercetat nu vor mai fi armonice, întrucât forța de revenire nu mai este cvasielastică.

S-a obținut un rezultat excepțional: **ecuația mișcării, atât în cazul pendulului elastic, cât și al celui gravitațional, este aceeași. Se deosebește numai constanta ω , care depinde în fiecare caz de proprietățile sistemului oscilant studiat.** Aceasta înseamnă că abaterea de la poziția de echilibru în ambele cazuri se modifică în timp după aceeași lege, chiar dacă forțele care determină caracterul acestor mișcări au natură fizică diferită: la pendulul elastic – rezultanta forțelor elastică și de greutate, iar la cel gravitațional – rezultanta forțelor de greutate și de tensiune a firului.

Ecuația de forma (5.6) sau (5.10) este aparent foarte simplă, însă rezolvarea ei este destul de complicată și nu se încadrează în programa de liceu. Totodată, anume soluția ei, care reprezintă legea mișcării oscilatorii, ne va permite studiul detaliat al acestei mișcări. În cele ce urmează, vom căuta soluția ecuației oscilatorului liniar armonic, pornind de la rezultate experimentale.

C Legea mișcării oscilatorii armonice

Abaterea oscilatorului de la poziția de echilibru în funcție de timp (**legea mișcării oscilatorii**) poate fi studiată ușor cu ajutorul **oscilogramelor** obținute experimental. **Oscilograma** (de la lat. *oscillum* „oscilație” și gr. *gramma* „scriere”) constituie reprezentarea grafică a legii mișcării oscilatorii. Cea mai simplă oscilogramă poate fi obținută dacă pe oscilator se fixează o mină de creion sau o peniță, care imprimă mișcarea lui pe o coală de hârtie ce se deplasează cu viteză constantă (fig. 5.6). Se observă că atât în cazul pendulului elastic (fig. 5.6, a), cât și al celui gravitațional (fig. 5.6, b), oscilograma are unul și același aspect, care permite să presupunem că funcția ce descrie legea mișcării oscilatorii este „sinus” sau „cosinus”.

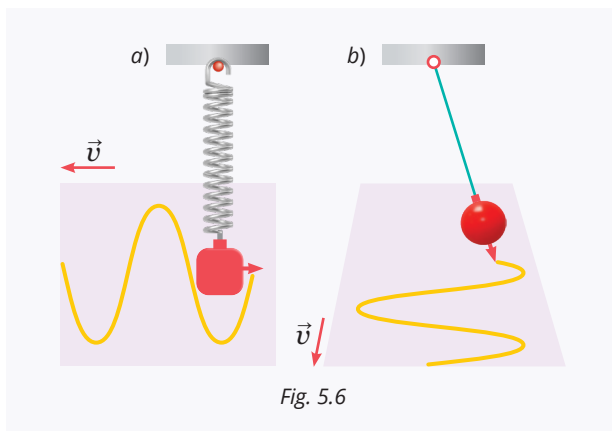


Fig. 5.6

Analizând graficele oscilațiilor din figura 5.6, ne convingem că ele se descriu cu funcția cosinus de forma

$$x = A \cos \frac{2\pi}{T} t = A \cos \omega t, \quad (5.12)$$

unde T este perioada mișcării oscilatorii, adică intervalul de timp $t = T$ în care mișcarea se repetă complet. Mărimea A reprezintă abaterea maximă a oscilatorului de la poziția de echilibru, adică **amplitudinea**. De regulă, mișcarea se repetă cu o anumită frecvență $\nu = 1/T$ numită și **frecvență liniară**. Mărimea din argumentul funcției cosinus (5.12) este proporțională cu frecvența liniară

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (5.13)$$

și este numită **frecvență ciclică** sau **pulsatie**.

Ecuația (5.12) reprezintă **legea mișcării oscilatorii**. Deoarece funcțiile „sinus” și „cosinus” sunt numite funcții armonice, rezultă că legea mișcării oscilatorii este o lege armonică. Forma ecuației care descrie mai comod mișcarea oscilatorie este determinată de

condițiile inițiale. De exemplu, dacă un pendul ce se află inițial în poziția de echilibru ($x = 0$) este pus în mișcare sub acțiunea unei lovituri de scurtă durată, imprimându-i-se o viteză inițială în sensul pozitiv, atunci mișcarea lui va avea loc după legea $x = A \sin \omega t$, iar dacă același pendul la momentul inițial este eliberat din poziția de abatere maximă ($x = A$), atunci legea mișcării este $x = A \cos \omega t = A \sin (\omega t + \pi/2)$.

Oscilatorul însă poate începe mișcarea și dintr-o poziție arbitrară situată între cele de echilibru sau de abatere maximă. În asemenea cazuri, la momentul $t = 0$ argumentul funcției „sinus” sau „cosinus” este diferit de 0 sau $\pi/2$ și ia valori arbitrare. Așadar, în funcție de condițiile inițiale, legea mișcării oscilatorului liniar armonic are aspectul

$$x = A \sin (\omega t + \varphi_0) \quad (5.14, a)$$

sau

$$x = A \cos (\omega t + \varphi_0), \quad (5.14, b)$$

unde φ_0 se măsoară în **radiani** și poate lua valori atât pozitive și negative, cât și egale cu zero. Este evident că cele două relații pentru legea mișcării sunt absolut echivalente și se pot utiliza în egală măsură.

d Caracteristicile momentane ale oscilațiilor armonice

Amplitudinea A , perioada T și frecvența ν , introduse pentru descrierea mișcării oscilatorii, nu permit a spune în ce stare se află oscilatorul la momentul de timp dat și în care sens se mișcă. Pentru aceasta vom introduce niște mărimi noi ce caracterizează starea momentană a sistemului oscilant, utilizând în acest scop legea mișcării (5.14), obținută mai sus.

Mărimea x ce caracterizează poziția oscilatorului la momentul de timp ales în raport cu starea de echilibru se numește elongație.

Din (5.14) se observă că amplitudinea A este numeric egală cu valoarea maximă a elongației, adică $A = |x_{\max}|$.

O altă caracteristică importantă a sistemului oscilant este **faza** oscilației.

Argumentul funcției ce descrie oscilația și determină coordonata, viteza și alte mărimi ce caracterizează mișcarea oscilatorului la momentul dat al timpului se numește fază.

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

unde φ_0 este **faza inițială** a oscilației și corespunde elongației oscilatorului la momentul de timp $t = 0$.

Luând în considerare (5.13), faza oscilației capătă aspectul

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T} + \varphi_0. \quad (5.15)$$

Faza permite să se facă deosebirea dintre două oscilații, care se produc cu aceeași perioadă și amplitudine. Dacă pentru două oscilații se vor lua aceleași condiții inițiale de măsurare a fazei, atunci deosebirea dintre ele se poate exprima prin **diferența de fază (defazajul)** $\Delta\varphi$. Din (5.15) se observă că două oscilații caracterizate de aceeași perioadă (frecvență) vor avea permanent același defazaj. În acest caz două oscilații sunt **în concordanță de fază** sau **sincrone**, dacă $\Delta\varphi = 0$, și **în opoziție de fază** sau **asincrone**, dacă $\Delta\varphi = \pi$.

Starea momentană a oscilatorului se mai caracterizează prin **viteză și accelerație de oscilație**. Pentru obținerea legilor de variație a vitezei și accelerației în funcție de timp, vom observa că la mișcarea unui punct material pe un cerc de rază egală cu amplitudinea oscilației $OM = A$ (fig. 5.7), variația proiecției poziției acestuia reprezintă o oscilație armonică. Într-adevăr, la o rotație a punctului material M pe întregul cerc, proiecția lui M' pe axa Oy efectuează o oscilație completă.

Punctul material M în mișcarea sa pe cerc este caracterizat de vectorii viteză $\vec{v}_M$ și accelerație centripetă $\vec{a}_M$ (fig. 5.7), ale căror module se exprimă conform relației (1.52) prin pulsația ω . Este evident că proiecțiile vectorilor $\vec{v}_M$ și $\vec{a}_M$ pe axa de coordonate Oy (fig. 5.7) vor caracteriza, respectiv, viteza și accelerația de oscilație a proiecției M' a punctului material M și, totodată, a oscilatorului liniar armonic.

Din triunghiurile dreptunghice evidențiate în figura 5.7, pentru proiecțiile vectorilor $\vec{v}_M$ și $\vec{a}_M$ se obține:

$$\begin{aligned} v_y &= v_M \cos \omega t = A\omega \cos \omega t, \\ a_y &= -a_M \sin \omega t = -A\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Aceste relații reprezintă legile vitezei și accelerației de oscilație a unui oscilator liniar armonic într-un caz particular, când faza inițială este nulă (la

momentul $t=0$ punctul material se află în poziția M_0). În cazul general, când faza inițială este diferită de zero (punctul material M se află într-o poziție arbitrară de pe circumferință), legile respective au forma

$$v_y = A\omega \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (5.16)$$

$$a_y = -A\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (5.17)$$

Se observă că atât viteza, cât și accelerația de oscilație variază în timp ca și elongația (5.14, a) după o anumită lege armonică. Ca și elongația, ele sunt caracterizate de valori maxime sau de valori de amplitudine.

Din (5.16) și (5.17) reiese că acestea se obțin, respectiv, când $\cos(\omega t + \varphi_0) = 1$ și $\sin(\omega t + \varphi_0) = -1$, adică $v_{y, \max} = A\omega$, iar $a_{y, \max} = A\omega^2$.

e Dependenta pulsației și perioadei oscilațiilor armonice libere de proprietățile sistemului

În paragraful 5.2, a , b s-a constatat că ecuația oscilatorului liniar armonic conține o constantă care depinde de proprietățile sistemului oscilant studiat. Din analiza dimensională a acestei constante rezultă că ea are semnificația pătratului pulsației oscilațiilor. Într-adevăr, și în cazul pendulului elastic

$$[\omega^2] = \frac{[k]}{[m]} = \frac{\text{N}}{\text{m} \cdot \text{kg}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m} \cdot \text{kg}} = \frac{1}{\text{s}^2}$$

și al celui gravitațional

$$[\omega^2] = \frac{[g]}{[l]} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2 \cdot \text{m}} = \frac{1}{\text{s}^2}$$

se obține aceeași dimensiune: s^{-2} .

Mărimea ω a fost numită **pulsație** sau **frecvență proprie** a oscilatorului.

Așadar, frecvența proprie a pendulului elastic se exprimă prin relația

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (5.18)$$

care rezultă din (5.7), iar dacă introducem această relație în (5.13), atunci pentru perioada pendulului elastic se obține

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5.19)$$

Perioada oscilațiilor este cu atât mai mică, cu cât coeficientul de elasticitate al resortului este mai mare și cu atât mai mare, cu cât masa corpului suspendat este mai mare. Un resort caracterizat de un coeficient de elasticitate mare imprimă corpului o accelerație mare, adică o variație mai rapidă a vitezei, iar în cazul unui corp de masă mai mare variația vitezei este mai lentă.

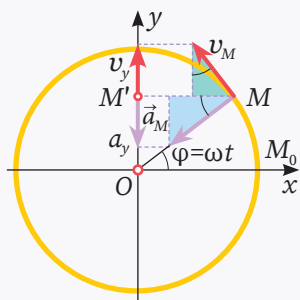


Fig. 5.7

Pentru pendulul gravitațional (matematic) frecvența proprie se determină din relația (5.11):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (5.20)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (5.21)$$

Problemă REZOLVATĂ

Un oscilator armonic liniar efectuează oscilații în conformitate cu legea $x = 0,02 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (m). Determinați amplitudinea, perioada și faza inițială a oscilațiilor. Care este poziția inițială din care începe mișcarea oscilatorie?

Rezolvare

Se dă:

$$x = 0,02 \sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (m)}$$

$$A = ?, T = ?, \varphi_0 = ?, x_0 = ?$$

Din comparația legii mișcării dată în condițiile problemei cu forma sa generală (5.14, a) rezultă

$$A = 0,02 \text{ m}; \varphi_0 = (\pi/6) \text{ rad} = 30^\circ; \omega = (\pi/3) \text{ s}^{-1}.$$

Perioada oscilațiilor $T = 2\pi/\omega = 6 \text{ s}$. Poziția inițială a oscilatorului se determină din legea mișcării la momentul $t = 0$. Obținem $x_0 = 0,02 \sin(\pi/6) = 0,01 \text{ m}$.

AUTOEVALUARE

- 1 Descrieți modelul oscilatorului liniar armonic. Care sunt particularitățile lui? Propuneți exemple.
- 2 Ce reprezintă pendulul elastic? Dar cel gravitațional?
- 3 Care este forța de revenire în cazul pendulului gravitațional?
- 4 Ce reprezintă oscilograma? Descrieți modul de obținere a celei mai simple oscilogramme.
- 5 Ce reprezintă pulsația și cum se exprimă ea prin perioadă și frecvență?
- 6 Care sunt caracteristicile momentane ale oscilațiilor armonice?
- 7 Care este legea mișcării oscilatorii armonice? Explicați semnificația termenilor din această ecuație.
- 8 Ce reprezintă defazajul? Când două mișcări oscilatorii sunt în concordanță de fază? Dar în opoziție de fază? Propuneți exemple.
- 9 Confectionați două pendule gravitaționale și realizați cu ele oscilații: a) sincrone; b) asincrone. Cum trebuie să procedați?
- 10 Care sunt legile vitezei și accelerației de oscilație a unui oscilator liniar armonic?
- 11 Cum depind pulsația și perioada oscilațiilor armonice de proprietățile sistemului oscilant?
- 12 Un corp cu masa de 1 kg este prins de capătul unui resort, al cărui coeficient de elasticitate este egal cu 100 N/m. La momentul $t = 0$, corpul se află la o distanță de 20 cm față de poziția de echilibru. Determinați amplitudinea, perioada și faza inițială a oscilațiilor produse. Scrieți legea $x(t)$ a mișcării oscilatorii și reprezentați-o grafic.
- 13 Un corp de masă m , legat la capătul unui resort, oscilează cu frecvența $\nu = 0,6 \text{ Hz}$. Determinați masa acestui corp, dacă se cunoaște că la legarea încă a unui corp de masă $m_1 = 500 \text{ g}$ sistemul obținut oscilează cu perioada $T_1 = 2,5 \text{ s}$.
- 14 Care trebuie să fie lungimea unui pendul gravitațional pentru ca perioada lui să fie egală cu 1 s?
- 15 Distanța dintre pozițiile extreme ale mișcării oscilatorii a unui pendul elastic este de 8 cm. Determinați perioada oscilațiilor pendulului, dacă viteza lui la momentul traversării poziției de echilibru este de 16 cm/s.
- 16 **BIO** O viespe cu masa de 0,6 g a nimerit în plasa unui păianjen. Determinați constanta de elasticitate a plasei, dacă ea oscilează cu frecvența de 3 Hz. Care va fi frecvența de oscilație a plasei, dacă în ea va nimeri o muscă cu masa de 0,15 g?
- 17 **BIO** O albină în zbor își bate aripile de 200 de ori pe secundă. Considerând mișcarea fiecărei dintre aripile albinei ca o mișcare oscilatorie armonică, iar viteza maximă de oscilație a vârfului aripii egală cu 2,5 m/s, determinați amplitudinea mișcării vârfului aripii.

Conservarea și transformarea energiei mecanice în mișcarea oscilatorie

Să analizăm mișcarea oscilatorie din punct de vedere energetic. Oscilatorul scos din poziția de echilibru posedă energia potențială

$$E_p = \frac{kx^2}{2}, \quad (5.22)$$

unde x este elongația (amintim că ea are ca origine poziția de echilibru), iar k – coeficientul de elasticitate al resortului în cazul pendulului elastic sau coeficientul de proporționalitate din relația pentru forța cvasielastă de revenire în cazul altor oscilatori armonici. De exemplu, în cazul pendulului gravitațional de lungime l , abătut la înălțimea h față de poziția de echilibru, energia potențială este $E_p = mgh$ și pentru oscilații mici (unghiul de abatere φ este mic) se aduce la forma (5.22), având valoarea coeficientului $k = mg/l$, care rezultă din (5.9).

În starea inițială, când $x = A$, sistemul oscilant posedă numai energie potențială:

$$E = E_p^{\max} = \frac{kA^2}{2}. \quad (5.23)$$

Rezultă că

Energia totală este proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor.

La deplasarea oscilatorului spre poziția de echilibru elongația se micșorează, iar viteza lui crește. Aceasta înseamnă că energia potențială a oscilatorului se micșorează, însă concomitent el va avea și energie cinetică:

$$E_c = \frac{mv_x^2}{2}, \quad (5.24)$$

care crește datorită măririi vitezei sale. Când oscilatorul ajunge în poziția de echilibru, unde $x = 0$, viteza este maximă, iar energia lui potențială devine egală cu zero și energia cinetică în această poziție trebuie să coincidă cu energia totală:

$$E_c^{\max} = \frac{mv_{x,\max}^2}{2} = \frac{kA^2}{2} = E.$$

Din această relație reiese că viteza maximă a oscilatorului depinde de amplitudinea lui și are valoarea

$$v_{x,\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \omega A. \quad (5.25)$$

Așadar, în decursul unui sfert de perioadă are loc o transformare completă a energiei potențiale în energie cinetică. Este evident că, datorită periodicității mișcării oscilatorii în decursul unei perioade, energia potențială se va transforma în energie cinetică și invers de patru ori.

Într-o stare intermediară, între poziția de echilibru și de abatere maximă de la aceasta, oscilatorul posedă atât energie potențială, cât și cinetică. Energia mecanică totală în această stare este dată de relația

$$E = \frac{kA^2}{2} = \frac{mv_{x,\max}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv_x^2}{2}, \quad (5.26)$$

care exprimă legea conservării energiei mecanice a oscilatorului studiat.

În figura 5.8 este reprezentată dependența energiei potențiale (5.22) în funcție de elongație. Linia orizontală corespunde valorii determinate de energia totală a oscilatorului, iar distanța dintre această linie și curba energiei potențiale este egală cu energia cinetică, care devine egală cu zero în punctele extreme $x = \pm A$. Se observă că în poziția de echilibru ($x = 0$) energia potențială este minimă. Deoarece forma acestei dependențe este asemănătoare cu o groapă, se spune că oscilatorul în stare de echilibru se află la fundul unei **gropi de potențial**. Dacă oscilatorul este scos din această stare și lăsat liber, atunci el tinde să revină la poziția de echilibru și începe mișcarea oscilatorie.

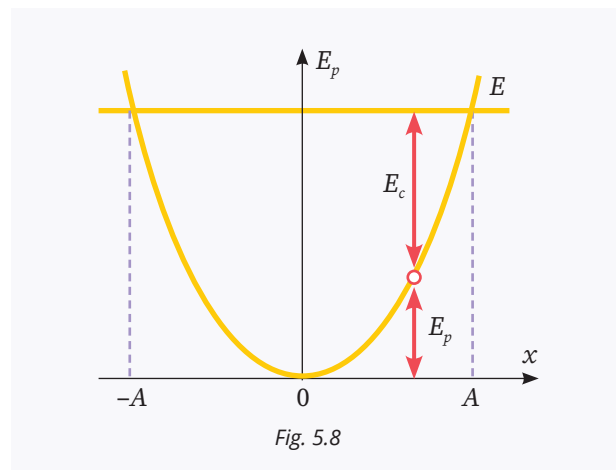


Fig. 5.8

Problemă REZOLVATĂ

La capătul unui resort este suspendat un corp mic cu masa de 0,5 kg, care în starea de echilibru produce o alungire de 0,025 m. Corpul este scos din această stare în direcția verticală și lăsat liber, resortul alungindu-se încă cu 0,01 m. Considerând accelerația gravitațională egală cu 10 m/s^2 și neglijând forțele de rezistență, determinați:

- a) perioada, frecvența și pulsația oscilațiilor;
- b) valoarea maximă a vitezei de oscilație și cea a forței ce acționează asupra corpului;
- c) energiile cinetică, potențială și totală la momentul abaterii corpului de la poziția de echilibru cu $x = \pm A/2$.

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} m &= 0,5 \text{ kg}, \\ x_0 &= 0,025 \text{ m}, \\ A &= 0,01 \text{ m}, \\ g &= 10 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

- a) T – ?, ν – ?, ω – ?;
- b) v_m – ?, F_m – ?;
- c) E_c – ?, E_p – ?, E – ?

- a) Pentru determinarea perioadei pendulului elastic, vom folosi expresia (5.19). Constanta de elasticitate se obține din condiția că resortul aflat în poziția de echilibru este deja alungit cu x_0 , adică $G = kx_0$. Rezultă $k = G/x_0 = mg/x_0$ și pentru perioadă avem

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{x_0}{g}} = 0,314 \text{ s}.$$

Folosind relațiile (5.2) și (5.13) pentru frecvență și pulsație, obținem, respectiv:

$$\nu \approx 3,185 \text{ Hz} \quad \text{și} \quad \omega = 20 \text{ s}^{-1}.$$

- b) Valoarea maximă a vitezei se calculează folosind relația (5.25), în care ω este frecvența proprie (pulsația) calculată mai sus. Forța care acționează asupra corpului este maximă atunci când abaterea este maximă, adică egală cu amplitudinea. Astfel, $F_m = kA = mgA/x_0$. Introducând valorile numerice, obținem $v_m = \omega A = 0,2 \text{ m/s}$; $F_m = 2 \text{ N}$.

- c) Energia totală a oscilatorului este proporțională cu pătratul amplitudinii și nu depinde de poziția lui. Astfel, $E = kA^2/2 = mgA^2/(2x_0) = 10 \text{ mJ}$. În poziția ce corespunde elongației $x = \pm A/2$, energia potențială este $E_p = kx^2/2 = kA^2/8 = E/4 = 2,5 \text{ mJ}$, iar cea cinetică: $E_c = E - E_p = 3E/4 = 7,5 \text{ mJ}$.

AUTOEVALUARE

- 1 Care este energia totală a oscilatorului liniar armonic?
- 2 În care poziții energia cinetică și cea potențială au valori egale cu cea totală?
- 3 În cât timp are loc o transformare completă a energiei potențiale în energie cinetică?
- 4 Explicați în baza legii conservării energiei mecanice transformările energetice ale oscilatorului armonic în decurs de o perioadă.
- 5 Un corp cu masa de 2 kg efectuează oscilații armonice cu amplitudinea de 4 cm. Care este perioada oscilațiilor corpului, dacă energia lui cinetică maximă în procesul de oscilație este de 1 J?
- 6 Un punct material de masă $m = 10 \text{ g}$ oscilează în conformitate cu legea $x = 8 \cos(2t + \varphi_0)$ (cm). Determinați valoarea maximă a forței care acționează asupra punctului material și energia lui totală.
- 7 Energia totală a unui corp cu masa de 1 kg care efectuează oscilații armonice este de 5 mJ. Scrieți legea mișcării oscilatorii, dacă valoarea maximă a forței de revenire ce acționează asupra corpului este de 0,4 N, iar faza inițială a oscilațiilor $\varphi_0 = \pi/4$.
- 8 Un oscilator armonic efectuează o mișcare oscilatorie. Determinați:
 - a) pentru ce valoare a raportului dintre elongație și amplitudine x/A energiile cinetică și potențială ale oscilatorului vor fi egale.
 - b) care va fi raportul dintre energiile cinetică și potențială E_c/E_p când elongația x este egală cu jumătate din amplitudinea oscilațiilor A .

Studiul pendulului elastic și determinarea constantei de elasticitate a unui resort

Scopul lucrării

Studiul experimental al oscilațiilor pendulului elastic și determinarea constantei de elasticitate a acestuia.

Dispozitive și materiale

Stativ cu două clește, resort, set de mase marcate, riglă milimetrică, cronometru (de exemplu, de la un telefon mobil) sau ceasornic cu secundar.

Considerații teoretice

Perioada oscilațiilor T a pendulului elastic este determinată cu relația (5.19).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Se observă că ea este direct proporțională cu masa sistemului oscilator m și invers proporțională cu constanta de elasticitate k .

Pentru unul și același resort de masă neglijabilă perioada este cu atât mai mare, cu cât masa corpului suspendat este mai mare.

Determinarea perioadei se poate realiza în două moduri: fie cu ajutorul relației (5.19), fie măsurând intervalul de timp t , în care se produc un număr N de oscilații complete, adică

$$T = \frac{t}{N}. \quad (5.27)$$

Folosind relațiile (5.19) și (5.27), obținem

$$\left(\frac{t}{N}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k},$$

de unde pentru constanta de elasticitate a resortului avem

$$k = 4\pi^2 m \left(\frac{N}{t}\right)^2. \quad (5.28)$$



Fig. 5.9

Modul de lucru:

- 1 Realizați montajul experimental din figura 5.9, având grijă ca indicația „0” de pe rigla milimetrică să coincidă cu capătul resortului în starea nedeformată.
- 2 Atârnați la capătul liber al resortului o masă marcată și așteptați stabilirea poziției de echilibru.

- 3 Scoateți pendulul elastic din poziția de echilibru, deplasându-l cu 2–3 cm și măsurați cu cronometrul intervalul de timp t , în care se produc N oscilații armonice (de exemplu, 10 sau 20), adică oscilații de aproximativ aceeași amplitudine.
- 4 Repetați aceste măsurări de la punctul 3 încă de două ori și determinați valoarea medie a intervalului de timp t .
- 5 Repetați încă de 2 ori măsurările descrise în punctele 2-4, adăugând de fiecare dată noi mase marcate.
- 6 Calculați valoarea constantei de elasticitate a resortului utilizat în experiență, folosind relația (5.28). Introduceți în caiet rezultatele măsurărilor și determinărilor folosind tabelul de mai jos.

Nr. crt.	m (kg)	N	t (s)	$\bar{t}$ (s)	k (N/m)	$\bar{k}$ (N/m)
1.						
2.						
3.						

- 7 Estimați erorile absolută și relativă ale constantei de elasticitate folosind următoarele relații:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{k}}{\bar{k}} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \frac{\Delta t}{t}, \quad \Delta \bar{k} = \varepsilon \cdot \bar{k}.$$

- 8 Prezentați rezultatul final sub forma:

$$k = (\bar{k} \pm \Delta \bar{k}) \frac{N}{m}; \quad \varepsilon = \dots\%$$

- 9 Formulați concluziile referitor la rezultatele obținute.

AUTOEVALUARE

- 1 Ce reprezintă oscilațiile armonice? Care este legea mișcării oscilatorii a pendulului elastic?
- 2 De care parametri depinde frecvența proprie a pendulului elastic?
- 3 Cum se explică faptul că frecvența proprie nu depinde de amplitudinea oscilațiilor?
- 4 Explicați de ce pentru determinarea perioadei este mai bine să se măsoare timpul în care pendulul elastic realizează mai multe oscilații. Poate oare numărul de oscilații să fie mult mai mare decât 10? Argumentați răspunsul.
- 5 Propuneți o altă modalitate de determinare a constantei de elasticitate.

Studiul pendulului gravitațional și determinarea valorii intensității câmpului gravitațional (a accelerației gravitaționale)

Scopul lucrării

Studiul experimental al oscilațiilor pendulului gravitațional și determinarea cu ajutorul acestuia a intensității câmpului gravitațional (a accelerației gravitaționale).

Dispozitive și materiale

Stativ cu două clește, resort, un corp din setul de mase marcate, riglă milimetrică, cronometru (de exemplu, de la un telefon mobil) sau ceasornic cu secundar, șubler, fir.

Considerații teoretice

Câmpul gravitațional al Pământului este creat de atracția lui și acționează asupra tuturor corpurilor din jurul său care posedă masă. Caracteristica principală a câmpului gravitațional terestru este intensitatea lui care depinde de masa și raza planetei noastre. După cum s-a constatat în paragraful 2.4, *b*, în condiții terestre intensitatea câmpului gravitațional coincide cu accelerația gravitațională. În această lucrare de laborator vom determina intensitatea câmpului gravitațional al Pământului (accelerația gravitațională) folosind metoda pendulului gravitațional.

Dacă pendulul gravitațional este deviat de la poziția de echilibru cu un unghi mic (aproximativ 10°), atunci el efectuează oscilații armonice având perioada determinată de relația (5.21). Perioada oscilațiilor T se mai poate determina și cu relația (5.27) măsurând timpul t , în care au loc un anumit număr N de oscilații. Atunci din (5.21) și (5.27) avem

$$\left(\frac{t}{N}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{l}{g},$$

de unde pentru accelerația gravitațională obținem

$$g = 4\pi^2 l \left(\frac{N}{t}\right)^2, \quad (5.29)$$

unde l este lungimea pendulului gravitațional.

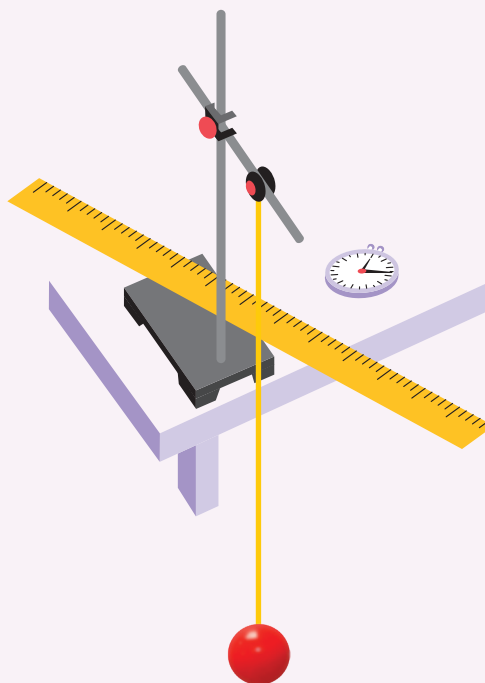


Fig. 5.10

Modul de lucru:

- 1 Așezați stativul la marginea mesei și realizați montajul experimental din figura 5.10.
- 2 Măsurați cu rigla lungimea firului de la punctul de suspensie până la corp, iar cu șublerul – înălțimea lui. Însumând valorile măsurate ale lungimii firului și ale unei jumătăți din înălțimea corpului, obțineți lungimea pendulului.

- 3 Aduceți pendulul în stare de oscilație, deviind corpul de la poziția de echilibru la o distanță de aproximativ 5 cm și eliberându-l.
- 4 Măsurați cu ajutorul cronometrului timpul t , în care se produc un anumit număr N de oscilații (de exemplu, 10 sau 20). Repetați aceste măsurări de 3 ori și determinați valoarea medie a intervalului de timp t .
- 5 Repetați procedeele descrise în punctele 2–4 pentru încă 2 lungimi diferite ale pendulului.
- 6 Calculați intensitatea câmpului gravitațional (acelerația gravitațională) cu ajutorul relației (5.29) și introduceți în caiet rezultatele măsurărilor și determinărilor folosind tabelul de mai jos.

Nr. crt.	l (m)	N	t (s)	$\bar{t}$ (s)	g (m/s ²)	$\bar{g}$ (m/s ²)
1.						
2.						
3.						

- 7 Estimați erorile absolută și relativă ale intensității câmpului gravitațional (acelerației gravitaționale) folosind următoarele relații:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{g}}{\bar{g}} = 2 \frac{\Delta \pi}{\pi} + 2 \frac{\Delta t}{t}, \quad \Delta \bar{g} = \varepsilon \cdot \bar{g}.$$

- 8 Prezentați rezultatul final sub forma:

$$g = (\bar{g} \pm \Delta \bar{g}) \frac{m}{s^2}; \quad \varepsilon = \dots\%.$$

- 9 Formulați concluziile referitor la rezultatele obținute.

AUTOEVALUARE

- 1 Descrieți acțiunea câmpului gravitațional. Care este caracteristica lui principală?
- 2 Ce reprezintă pendulul gravitațional și care este perioada lui de oscilație?
- 3 De ce este nevoie ca unghiul de abatere de la poziția de echilibru al pendulului să fie mic?
- 4 Când credeți că este mai corectă determinarea perioadei pendulului gravitațional – la efectuarea a 10 oscilații sau a 100 de oscilații? Explicați de ce.

Oscilații amortizate și forțate. Rezonanța

Oscilațiile armonice, studiate anterior, când forțele de rezistență nu s-au luat în considerare, prezintă o idealizare a oscilațiilor libere. În sistemele reale mișcarea întotdeauna are loc într-un mediu care opune o anumită rezistență și pentru învingerea ei se consumă o parte din energia sistemului oscilant. Întrucât energia oscilatorului este direct proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor, rezultă că odată cu diminuarea ei, se micșorează amplitudinea lor. Cu cât forțele de rezistență sunt mai mari, cu atât mai multă energie se consumă pentru învingerea acestora și cu atât mai repede se va micșora amplitudinea oscilațiilor, ajungând la un moment dat până la dispariția lor. În figura 5.11 sunt prezentate două oscilograme ale unui oscilator real, de exemplu, a unui pendul elastic, oscilațiile căruia se produc în aer *a*) și în lichid *b*). Se observă că în aer, unde forțele de rezistență sunt mici, există un interval anumit de timp, în decursul căruia oscilațiile pot fi considerate aproximativ armonice. De multe ori însă, în diferite sisteme oscilante, forțele de rezistență sunt semnificative, iar înlăturarea lor, chiar și parțială, este imposibilă. În asemenea situații (fig. 5.11, *b*) amplitudinea oscilațiilor se micșorează repede, adică energia oscilatorului este disipată în exterior și mișcarea oscilatorie se „stinge”.

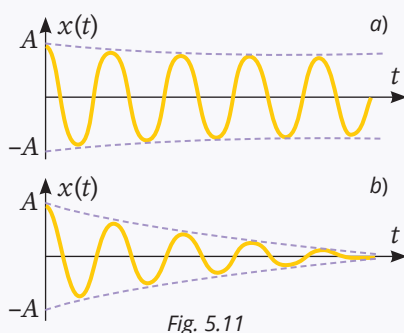


Fig. 5.11

Oscilațiile a căror amplitudine se micșorează în timp se numesc oscilații amortizate.

Sistemele oscilante studiate până acum erau acționate de o forță exterioară numai în scopul scoaterii

lor din poziția de echilibru stabil, după care acțiunea ei înceta. În asemenea situații amplitudinea oscilațiilor permanent se micșora până la „stingerea” lor, adică până la disiparea completă a energiei transmise inițial. În practică însă deseori există situații când forța exterioară acționează periodic alimentând continuu sistemul oscilant cu energie pentru menținerea aceleiași valori a amplitudinii oscilațiilor.

Oscilațiile care se produc într-un sistem datorită acțiunii unei forțe periodice exterioare se numesc oscilații forțate.

Se constată experimental că amplitudinea oscilațiilor forțate este cu atât mai mare, cu cât frecvența forței exterioare este mai apropiată de frecvența proprie a sistemului.

Fenomenul creșterii bruște a amplitudinii oscilațiilor forțate, când pulsația forței exterioare ce acționează asupra sistemului oscilant se apropie de frecvența proprie a acestuia, se numește rezonanță.

Acest fenomen se poate explica mai simplu în baza analizei transferului de energie dintre exterior și sistemul oscilant. Este evident că fenomenul de rezonanță are loc atunci când există condiții favorabile pentru transferul energiei din exterior către sistem, adică în cazul în care acțiunea forței exterioare periodice se manifestă prin efectuarea unui lucru mecanic pozitiv pe parcursul întregului ciclu al mișcării. Faptul acesta însă este posibil numai dacă forța exterioară acționează în concordanță de fază cu oscilațiile proprii ale sistemului, ceea ce se realizează când frecvența forței exterioare Ω este egală cu cea proprie ω a oscilatorului. Proiecția forței de rezistență și viteza oscilatorului au întotdeauna semne opuse. Din această cauză la rezonanță oscilațiile forței de rezistență sunt în opoziție de fază cu oscilațiile forței exterioare, deci lucrul mecanic efectuat de fiecare dintre ele se compensează reciproc. În consecință, oscilatorul se accelerează numai pe seama forței cvasielastice din sistem și oscilațiile se produc cu frecvența proprie, care coincide cu frecvența forței exterioare. Dacă $\Omega \neq \omega$, atunci pe unele porțiuni ale mișcării forța exterioară va efectua și lucru mecanic negativ, din care motiv amplitudinea oscilațiilor forțate se micșorează.

În figura 5.12 este prezentată dependența amplitudinii oscilațiilor forțate în funcție de pulsația forței exterioare pentru diferite valori ale unui coeficient β , numit de amortizare, ce descrie forțele de rezistență

din sistemul oscilant. Deoarece amplificarea acțiunii forțelor de rezistență conduce la creșterea lucrului mecanic al forței exterioare necesar pentru învingerea lor, amplitudinea de rezonanță se micșorează. Totodată, și frecvența de rezonanță devine puțin mai mică decât frecvența proprie a sistemului oscilant.

Întrucât orice corp solid posedă proprietăți elastice, adică reprezintă un sistem oscilant caracterizat de o anumită frecvență proprie, fenomenul de rezonanță se poate manifesta în cele mai neobișnuite situații. Deseori din cauza rezonanței se pot prăbuși diferite construcții, se distrug mecanisme sau părți componente ale acestora etc. Pentru înlăturarea efectelor negative legate de rezonanță, se iau măsuri speciale de evitare sau de micșorare a acțiunii fenomenului în cauză. În acest scop, se variază frecvența proprie a sistemului pentru a evita coincidența cu frecvența forței externe sau se majorează forțele de frecare din sistem pentru micșorarea amplitudinii de rezonanță.

Fenomenul de rezonanță are o aplicare vastă în diferite domenii ale științei și tehnicii, mai ales în

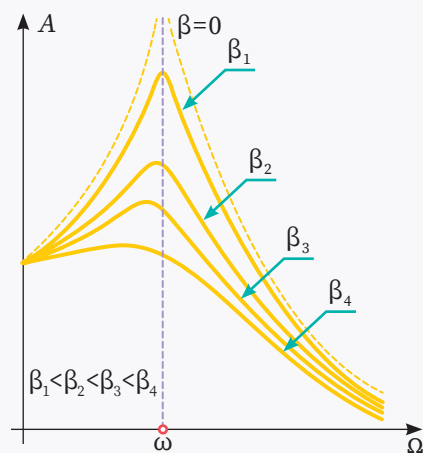


Fig. 5.12

cazul oscilațiilor electromagnetice care vor fi studiate în clasa a XII-a. Acest fenomen stă la baza funcționării diferitelor aparate și dispozitive în electronică și radiotehnică.

COMUNICARE

Fenomene de rezonanță

Creați 2 grupuri de lucru și **repartizați** volumul activităților.

Studiați diferite surse pentru informare și selectare a materialului necesar.

Realizați comunicarea după următoarele **obiective**:

- 1 **Cercetați** istoria observării fenomenului de rezonanță.
- 2 **Clasificați** principalele tipuri de rezonanță și **dați** exemple din viața cotidiană.
- 3 **Explicați** fenomenul de rezonanță distructivă și **prezentați** exemple relevante.
- 4 **Discutați** în echipă despre efectele pozitive și/sau negative și **formulați** opinii despre impactul fenomenelor de rezonanță în viața de zi cu zi.
- 5 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 6 **Prezentați** și **evaluați** reciproc produsele realizate.

AUTOEVALUARE

- 1 Care oscilații se numesc amortizate?
- 2 Cum se explică micșorarea amplitudinii oscilațiilor din considerente energetice?
- 3 Care oscilații se numesc forțate?
- 4 Ce se numește rezonanță?
- 5 Cum se explică fenomenul de rezonanță în baza transferului de energie dintre exterior și sistemul oscilant?
- 6 Cum se manifestă amplificarea forțelor de rezistență asupra fenomenului de rezonanță?
- 7 Ce trebuie de întreprins pentru înlăturarea fenomenului de rezonanță când acesta se manifestă dăunător?

Propagarea mișcării oscilatorii. Unde transversale și unde longitudinale

Orice mediu solid, lichid sau gazos reprezintă în starea de echilibru o anumită amplasare a atomilor sau a moleculelor substanței în funcție de forțele de interacțiune dintre ele. O acțiune din exterior asupra unui punct din mediul dat se transmite de la o moleculă la alta prin intermediul forțelor intermoleculare, determinând o anumită deformare a acestui mediu. Dacă forța exterioară este mică, atunci deformarea este elastică, adică moleculele revin la starea de echilibru sub acțiunea forțelor elastice. În acest caz, atomii și moleculele pot fi considerate niște oscilatori liniari armonici legați între ei cu forțe de tip elastic. Acest model de substanță a fost numit **mediu elastic**, iar acțiunea exterioară asupra lui, prin care unul dintre oscilatori este scos din poziția de echilibru – **perturbație**. În figura 5.13 este prezentat modelul unui mediu elastic unidimensional solid în care bilele reprezintă moleculele mediului, iar forțele elastice din resorturi substituie forțele intermoleculare ce acționează între ele.

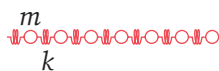


Fig. 5.13

Propagarea perturbațiilor într-un mediu elastic se numește undă elastică sau mecanică.

În continuare vom analiza acțiunea perturbațiilor armonice (oscilațiilor sinusoidale) asupra mediilor elastice, a căror propagare va determina niște unde, de asemenea, armonice. În funcție de direcția în care se produce perturbația în raport cu direcția de propagare a ei, se deosebesc unde **transversale** și unde **longitudinale**.

Unda în care perturbația mediului se produce perpendicular pe direcția de propagare a ei se numește undă transversală.

Considerăm o coardă întinsă și excităm la un capăt o perturbație orientată perpendicular pe direcția ei. Dacă perturbația este o mișcare oscilatorie a capătului corzii cu perioada T , atunci de-a lungul ei se observă deplasarea oscilației inițiale, astfel încât fiecare porțiune a corzii efectuează una și aceeași mișcare oscilatorie, întârziată față de porțiunea precedentă. Procesul de propagare a undelor transversale se explică ușor cu ajutorul modelului din figura 5.13. Într-adevăr, dacă prima bilă este deplasată transversal la o distanță oarecare de

la poziția de echilibru, atunci ea, prin intermediul forțelor elastice, va antrena într-o mișcare similară și bila vecină, dar la o distanță mai mică, întrucât este reținută de următoarea. La rândul ei, bila a doua o antrenează în mișcare transversală pe a treia la o distanță și mai mică față de poziția de echilibru, procesul continuând până când forța elastică nu va mai fi în stare să deplaseze următoarea bilă. După un sfert de perioadă, prima bilă începe mișcarea spre poziția de echilibru, iar a doua mai continuă după inerție mișcarea de la această poziție până când atinge valoarea maximă, după care începe mișcarea în sens invers. Este evident că același comportament îl vor avea și celelalte bile.

Dacă perturbația inițială este întreținută, adică prima bilă efectuează o mișcare oscilatorie cu perioada T , atunci procesul de antrenare în mișcare a următoarelor bile continuă așa cum este indicat în figura 5.14.

Undele elastice transversale se propagă numai în medii solide. Aceasta se datorează pozițiilor fixe ale particulelor din rețeaua cristalină și existenței forțelor de tip elastic între straturile ei. În lichide și gaze, datorită structurii lor interne, nu pot apărea forțe care ar restabili o deplasare transversală a particulelor. Din această cauză, în mediile lichide și gazoase se propagă alt tip de unde, și anume: undele elastice longitudinale. Trebuie, însă de menționat, că la suprafața apei se formează unde care sunt în mare parte transversale, dar conțin și elemente ale mișcărilor longitudinale.

Unda în care perturbația mediului se produce coliniar cu direcția de propagare a ei se numește undă longitudinală.

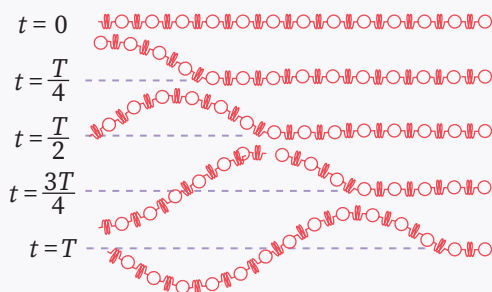


Fig. 5.14

Unda longitudinală se propagă și în mediile solide. Aceasta se observă foarte bine în cazul unui resort lung cu spirele echidistante în care se excită printr-o lovitură o perturbație de-a lungul lui. Drept rezultat al comprimării, se formează o îndesire de spire care se propagă de-a lungul resortului. Procesul de propagare a unei longitudinale se explică cu ajutorul aceluiași model din *figura 5.13*. Dacă perturbația longitudinală a primei bile constituie o oscilație armonică cu perioada T , atunci în cursul unei pătrimi de perioadă prima bilă ajunge în poziția maximă spre dreapta, antrenând în mișcare de același sens și alte bile, astfel formând o îndesire a lor. Cu cât perturbația este mai mare, cu atât mai multe bile vor fi antrenate în mișcare în acest timp. În următorul sfert de perioadă, când prima bilă începe mișcarea spre stânga, următoarea continuă după inerție mișcarea spre dreapta, până când ajunge la poziția de abatere maximă, după care își schimbă și ea sensul mișcării. Din cauza acestei întârzieri de schimbare a sensului de mișcare, se formează o rărire a bilelor, însă, concomitent, îndesirea formată în primul sfert de perioadă se va transmite următoarelor bile. Astfel, propagarea unei longitudinale reprezintă „deplasarea” unei îndesiri, urmate de o rărire de puncte prin mediul solid, după cum este arătat în *figura 5.15*.

Procesul de propagare a unei elastice longitudinale în gaze este ilustrat în *figura 5.16*. La o mișcare bruscă a pistonului din cilindru, acesta modifică componenta vitezei moleculelor gazului, orientată de-a lungul cilindrului. Considerăm masele moleculelor aproximativ aceleași, iar ciocnirile absolut elastice și centrale (modelul gazului ideal). În urma interacțiunii, moleculele cu viteze relative mari se frânează brusc, datorită transmiterii impulsului lor moleculelor cu care se ciocnesc, iar acestea din urmă își măresc viteza relativă. Astfel, apare o regiune de gaz comprimat, urmată de alta cu gaz rarefiat care se deplasează de-a lungul cilindrului.

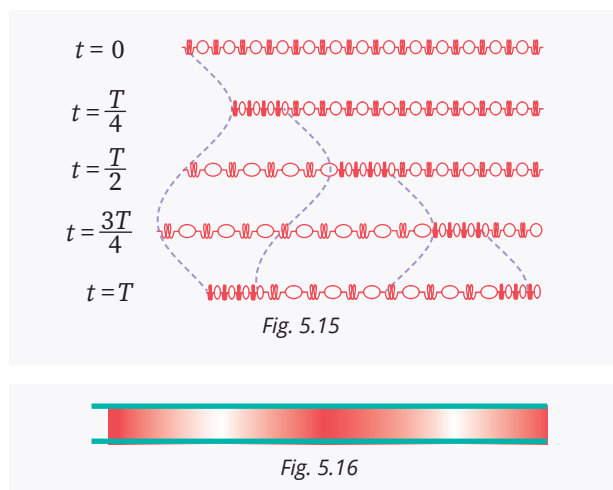


Fig. 5.15



Fig. 5.16

Din analiza efectuată mai sus a modului de propagare a undelor mecanice rezultă că ele reprezintă transmiterea mișcării oscilatorii altor puncte ale mediului cercetat. Întrucât mișcarea oscilatorie este caracterizată de o energie proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor, atunci, odată cu transmiterea mișcării oscilatorii, se transmite și această energie. Astfel, unda este un purtător al energiei, însă trebuie menționat în mod special că ea se transmite dintr-o regiune a mediului în altele fără transport de substanță.

Analiza procesului de propagare a undelor elastice permite formularea următoarelor concluzii:

- pentru inițierea și menținerea unei unde elastice este necesară existența unei surse de oscilații și a mediului elastic;
- pentru propagarea perturbației de la sursă până într-un punct oarecare al mediului este necesar un anumit interval de timp, adică unda se propagă cu o viteză finită;
- la propagarea oricărei unde energia primită prin excitarea perturbației se transferă de la un punct la altul al mediului fără transport de substanță.

AUTOEVALUARE

- 1 Ce reprezintă modelul numit mediu elastic?
- 2 Ce se numește undă elastică? Cum se clasifică undele în funcție de direcția oscilațiilor în raport cu direcția de propagare a lor?
- 3 Care unde se numesc transversale? Aduceți exemple. Explicați procesul de propagare a undelor transversale.
- 4 Ce se numește undă longitudinală? Dați exemple. Explicați procesul de propagare a undelor longitudinale.
- 5 În care medii se pot propaga undele transversale? Dar longitudinale?
- 6 Cum se clasifică undele în funcție de numărul dimensiunilor după care ele se propagă?
- 7 De ce în procesul de propagare a undelor transferul de energie are loc fără transport de substanță?

Caracteristicile mișcării ondulatorii. Viteza de propagare a undelor

Considerăm o sursă de oscilații de la care ia naștere și se propagă în spațiu o undă. Cunoașteți că oscilațiile sunt caracterizate de o anumită fază, dependentă de timp, iar aceasta se transmite prin intermediul undei și celorlalte puncte ale spațiului. Rezultă că la diferite intervale de timp punctele spațiului, antrenate în mișcarea oscilatorie, vor avea faze diferite. Se observă însă că toate punctele până la care a ajuns unda la momentul de timp dat posedă aceeași fază.

Locul geometric al punctelor până la care a ajuns unda la momentul de timp dat se numește *front de undă*. Linia normală pe frontul de undă se numește *rază* și constituie direcția de propagare a undei.

Toate punctele situate pe frontul de undă încep să oscileze la același moment. El separă în spațiu două zone distincte: zona antrenată deja în mișcare oscilatorie și cea în care procesul oscilatoriu încă nu are loc.

Analiza procesului de propagare a undelor conduce la concluzia că există și alte puncte în afara celor de pe frontul de undă, caracterizate de aceeași fază a oscilațiilor.

Locul geometric al punctelor care oscilează în aceeași fază se numește *suprafață de undă*.

Din cele expuse mai sus, reiese că frontul de undă este de asemenea o suprafață de undă, însă cea mai avansată față de sursa de oscilații.

La propagarea unei unde există o infinitate de suprafețe de undă și întotdeauna numai un singur front de undă.

Forma suprafeței de undă este diferită, în funcție de forma sursei de oscilații și de proprietățile mediului în care se propagă. În cazul particular al unui mediu omogen și izotrop, suprafețele de undă, deci și frontul de undă, au formă sferică, dacă sursa de oscilații este punctiformă sau sferică, și formă plană, dacă sursa de oscilații este o suprafață plană (fig. 5.17, a). În aceste cazuri se spune că în spațiu se propagă o **undă sferică** și, respectiv, o **undă plană**. Dacă se cercetează frontul de undă la o distanță mare de la sursa de oscilații, atunci, indiferent de aspectul sursei într-un mediu izotrop, forma lui poate fi aproximată cu una plană. După cum se observă din figura 5.17, b, la distanțe mari de la sursa de oscilații, în regiuni restrânse ale spațiului, unda sferică se poate aproxima cu unda plană.

Întrucât mișcarea ondulatorie este generată de cea oscilatorie, este evident că pentru descrierea cantitativă a undelor sunt valabile toate mărimile fizice utilizate la studiul oscilațiilor: amplitudinea, frecvența, pulsația, perioada, faza, faza inițială. Dacă sursa de oscilații este caracterizată de o frecvență constantă în timp, atunci, indiferent de proprietățile mediului elastic, toate punctele suprafețelor de undă vor avea aceeași frecvență și deci aceeași pulsație și perioadă. Din această cauză, se pot utiliza noțiunile de frecvență, pulsație și perioadă ale undei. Un alt comportament are amplitudinea de oscilație. Pentru

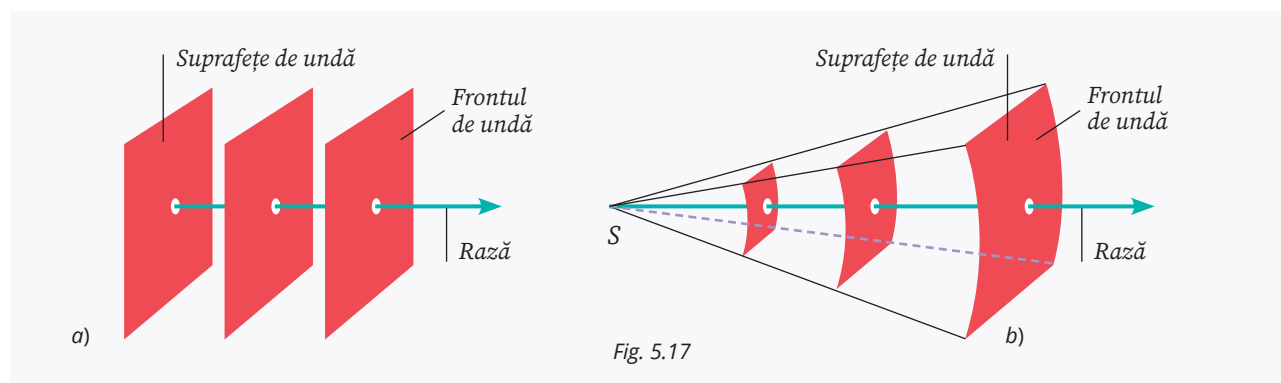


Fig. 5.17

o undă sferică aceasta se micșorează odată cu îndepărtarea de la sursa de oscilații. Cu cât distanța parcursă de frontul de undă este mai mare, cu atât energia ce revine unei particule din mediul elastic este mai mică, deoarece energia sursei se distribuie la un număr tot mai mare de particule ale mediului, antrenate în procesul oscilatoriu. Energia sursei se va mai micșora și din cauza forțelor de rezistență, inevitabile într-un mediu real. Având în vedere că energia oscilatorului este direct proporțională cu pătratul amplitudinii, devine clară și cauza micșorării amplitudinii.

În afară de mărimile fizice menționate, unda este caracterizată și de mărimi legate de propagarea ei. Acestea sunt **viteza de propagare** și **lungimea de undă**.

Viteza de deplasare a frontului de undă se numește viteză de propagare a undei. Deoarece toate punctele frontului de undă au aceeași fază, ea este numită și viteză de fază.

Din analiza procesului de propagare a undelor, rezultă că perturbația inițială sub forma unei oscilații

de perioadă T se deplasează în mediul elastic cu o anumită periodicitate spațială. După fiecare interval de timp egal cu o perioadă, punctele mediului, situate pe două suprafețe de undă consecutive, oscilează în concordanță de fază, adică cu un defazaj de 2π rad. Dacă viteza de propagare a undei este constantă, după fiecare interval de timp T frontul de undă parcurge una și aceeași distanță:

$$\lambda = vT. \quad (5.30)$$

Distanța minimă λ dintre două suprafețe de undă, ale căror puncte oscilează în concordanță de fază, se numește lungime de undă (în SI $[\lambda] = m$).

Dacă se exprimă perioada prin frecvență, atunci pentru lungimea de undă obținem

$$\lambda = \frac{v}{\nu}. \quad (5.31)$$

Așadar, lungimea de undă depinde de sursa de oscilații prin perioadă sau frecvență și de mediul în care se propagă unda, prin viteză.

Analizează și aplică!

- ▶ Doi astronauți se află pe Lună la o anumită distanță unul de altul. Unul dintre ei excită o undă mecanică. Se va propaga această undă până la al doilea astronaut? Explicați.
- ▶ Identificați dacă unda este transversală sau longitudinală în cazul când: a) unda din coarda unei chitare este excitată prin ciupirea acesteia; b) unda dintr-un resort lung este excitată prin mișcarea unui capăt înainte și înapoi de-a lungul resortului; c) unda se propagă de la vibrația unei coarde de chitară.

AUTOEVALUARE

- 1 Ce se numește front de undă și ce delimitează el în spațiu?
- 2 Ce se numește suprafață de undă și prin ce se deosebește de frontul de undă?
- 3 Cum se poate identifica ce fel de undă (plană sau sferică) se propagă în spațiu, dacă se cunosc forma sursei de oscilații și proprietățile mediului? Când o undă sferică se poate aproxima cu una plană?
- 4 Care sunt mărimile fizice utilizate pentru descrierea cantitativă a undelor?
- 5 Ce se numește viteză de fază și ce reprezintă ea?
- 6 Ce se numește lungime de undă și care este relația de legătură cu viteza de propagare și perioada sau frecvența de oscilație a sursei?
- 7 Distanța minimă dintre punctele situate pe două suprafețe de undă care oscilează în aceeași fază este egală cu 1,5 m. Care este frecvența oscilațiilor sursei dacă viteza de propagare a undei este de 450 m/s?
- 8 Determinați lungimea de undă a unei unde excitate de o sursă de oscilații aflată într-un mediu, în care oscilațiile cu perioada de 2 ms se propagă cu viteza de 1 500 m/s.
- 9 O sursă de oscilații emite o undă cu lungimea $\lambda = 3,4$ m. Determinați perioada oscilațiilor sursei dacă în decurs de 3 s unda s-a propagat la o distanță de 1 020 m.
- 10 Distanța dintre două creste consecutive ale valurilor de pe un lac este de 70 cm. Cu ce viteză se propagă unda pe suprafața apei, dacă perioada de oscilație a unui obiect care plutește pe această suprafață este egală cu 1 s?

Principiul lui Huygens

Forma frontului de undă la orice moment de timp coincide cu cea a sursei de oscilații numai în cazul mediilor omogene. Deseori însă este necesară construirea frontului de undă, în cazul mediilor cu neomogenități (paravane, orificii, suprafața de separație dintre două medii omogene etc.) în care se produc fenomene calitativ noi.

Metoda generală de construire a frontului de undă la un moment arbitrar de timp în baza celui cunoscut la momentul inițial a fost propusă de către fizicianul olandez Christiaan Huygens. Analizând procesul de propagare a undelor, el a ajuns la concluzia că fiecare punct al mediului antrenat în mișcare oscilatorie reprezintă pentru punctele vecine o sursă nouă de oscilații, numită **sursă de unde secundare**.

Astfel, Huygens a formulat următorul principiu:

Orice punct al mediului până la care a ajuns unda la momentul dat devine o sursă de unde sferice secundare, iar înfășurătoarea lor la un moment ulterior reprezintă noul front de undă.

Aplicarea acestui principiu la construirea frontului de undă este ilustrată în figura 5.18. La momentul de timp t_0 frontul de undă este F_0 . Pentru a construi undele sferice secundare în jurul fiecărui punct de pe F_0 , se trasează sfere de rază $\Delta r = v\Delta t$, unde v este viteza de propagare a undei, iar $\Delta t = t - t_0$ reprezintă intervalul de timp în decursul căruia frontul de undă ajunge în poziția nouă. Construind înfășurătoarea undelor secundare (tangenta comună a tuturor sferelor de rază Δr), obținem noul front de undă F (fig. 5.18).

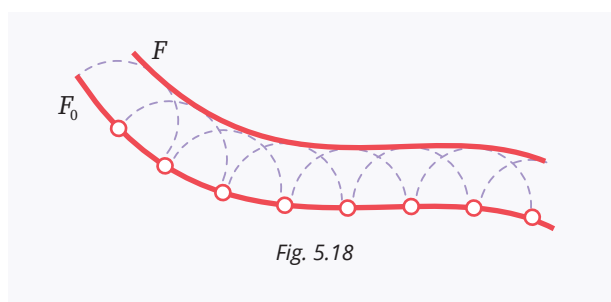


Fig. 5.18

AUTOEVALUARE

- 1 Ce reprezintă sursa de unde secundare?
- 2 Formulați principiul lui Huygens. Care este esența acestui principiu?
- 3 Explicați cum se utilizează principiul lui Huygens la construirea frontului unei unde arbitrare.

Reflexia și refracția undelor. Studiu calitativ

Modificarea direcției de propagare a undelor la întâlnirea suprafeței de separație dintre două medii cu proprietăți elastice diferite constituie esența fenomenelor de **reflexie** și **refracție**.

Considerăm o undă care se propagă spre suprafața de separație S dintre două medii, raza (direcția de propagare) a căreia formează un unghi i cu normala la suprafața S (fig. 5.19). Această undă este numită **undă**

incidentă (caracterizată cu **raza incidentă**), iar unghiul i – **unghi de incidență**.

Fenomenul de reîntoarcere a undelor în mediul din care au venit când întâlnesc suprafața de separație a două medii se numește reflexie.

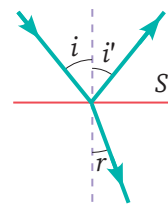


Fig. 5.19

Unda formată prin reflexie este numită **undă reflectată** (caracterizată cu **raza reflectată**), iar unghiul i' dintre raza reflectată și normala la această suprafață – **unghi de reflexie** (fig. 5.19).

Fenomenul de modificare a direcției de propagare a unei unde la traversarea suprafeței de separație a două medii se numește refracție.

Unda care pătrunde în mediul al doilea este numită **undă refractată** (caracterizată cu **raza refractată**), iar unghiul r dintre această rază și normala la suprafața S – **unghi de refracție** (fig. 5.19).

La suprafața de separație dintre două medii cu proprietăți diferite aceste fenomene se produc simultan, însă există și situații când unul dintre ele devine predominant. Atât cercetările experimentale, cât și studiul teoretic al reflexiei și refracției au condus la evidențierea următoarelor legi:

Legile reflexiei

- Raza incidentă, raza reflectată și normala în punctul de incidență se află în același plan.
- Unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

$$\angle i = \angle i'. \quad (5.32)$$

Legile refracției

- Raza incidentă, raza refractată și normala în punctul de incidență se află în același plan.
- Raportul dintre sinusurile unghiurilor de incidență și de refracție este constant pentru două medii elastice date și egal cu raportul vitezelor respective ale undelor în aceste medii:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (5.33)$$

AUTOEVALUARE

- 1 Care este esența fenomenelor de reflexie și refracție?
- 2 Ce se numește reflexie? Explicați ce reprezintă unghiurile de incidență și reflexie.
- 3 Ce se numește refracție? Explicați ce reprezintă unghiul de refracție.
- 4 Care sunt legile reflexiei? Ilustrați aceste legi construind mersul razelor incidentă și reflectată.
- 5 Care sunt legile refracției? Ilustrați aceste legi construind mersul razelor incidentă și refractată.

5.9



Difracția undelor

Fenomenul de reflexie studiat în paragraful precedent are loc atunci când în calea propagării undelor există obstacole cu dimensiuni foarte mari. De multe ori însă undele întâlnesc în calea lor diferite obstacole cu dimensiuni mai mici (comparabile cu lungimea de undă). S-a constatat că modul de propagare a undelor depinde în mare măsură de corelația dintre lungimea de undă și dimensiunea obstacolului întâlnit. De exemplu, undele de pe suprafața unui lac (valurile) într-o zi liniștită înconjoară un pilon și pluta undiței unui pescar, de parcă acestea nici nu ar exista și, în același timp, o barcă lasă o regiune de umbră în care undele nu pătrund. Evident, diametrul pilonului este aproximativ egal cu lungimea de undă (distanța dintre două creste ale valurilor), cel al plutei – mult mai mic,

iar barca are dimensiuni mult mai mari decât lungimea de undă. Astfel, când dimensiunile obstacolului sunt mai mici sau comparabile cu lungimea de undă, are loc o deviere de la propagarea rectilinie a undelor.

Fenomenul de pătrundere a undelor în regiunea de umbră a diferitelor obstacole (de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă) în urma devierii de la propagarea lor rectilinie se numește difracție.

Fenomenul de difracție a undelor de pe suprafața apei se evidențiază ușor cu ajutorul următoarei experiențe. Într-o cuvă cu apă se introduce un perete despărțitor, prevăzut cu o fantă. Dacă în compartimentul din stânga se excită o undă plană, atunci în

funcție de dimensiunile fantei în compartimentul din dreapta apar două situații diferite, prezentate în figura 5.20. Când lățimea fantei d este comparabilă sau mai mică decât lungimea de undă λ , se observă pătrunderea undei în regiunea de umbră (fig. 5.20, a), iar dacă $d \gg \lambda$, profilul undei practic nu se schimbă, denaturându-se puțin în apropierea regiunii de umbră (fig. 5.20, b).

Explicarea din punct de vedere calitativ a pătrunderii undelor în regiunea de umbră este posibilă cu ajutorul principiului lui Huygens. Conform acestui principiu, toate punctele frontului de undă, ajunse pe planul fantei, devin surse de unde sferice secundare ce se propagă în mediul din spatele obstacolului (fantei). Din figura 5.20 se observă că frontul de undă

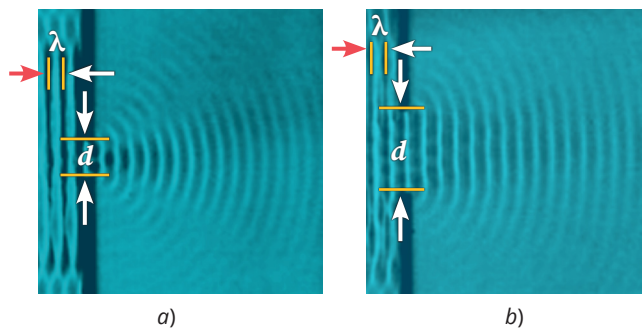


Fig. 5.20

pătrunde cu atât mai mult în regiunea de umbră, cu cât dimensiunea fantei este mai mică în raport cu lungimea de undă.

AUTOEVALUARE

- 1 Ce se numește difracție a undelor?
- 2 Ce condiții trebuie îndeplinite pentru a observa fenomenul de difracție?
- 3 Cum se explică fenomenul de difracție cu ajutorul principiului lui Huygens?

5.10



Interferența undelor. Studiu calitativ

Să analizăm acum particularitățile propagării concomitente a mai multor unde prin unul și același mediu. Este evident că în asemenea situații vor exista regiuni ale mediului în care undele se suprapun. Întrucât unda reprezintă o mișcare oscilatorie ce se propagă în spațiu, în regiunile menționate fiecare punct al mediului este antrenat în această mișcare de perturbațiile tuturor undelor ajunse la el. Rezultă că **elongația undei într-un punct oarecare al mediului la un moment dat reprezintă suma vectorială a elongațiilor provenite de la fiecare undă aparte**. Mai mult ca atât, experiențele arată că în cazul elongațiilor nu prea mari, adică **în cazul undelor armonice, ele se propagă independent una de alta**. Aceste afirmații constituie **principiul superpoziției undelor**. Dacă în mediul elastic se propagă unde cu pulsații diferite, atunci oscilațiile punctelor din regiunea de suprapunere a lor nu sunt armonice. În fiecare punct al mediului diferența de fază a

oscilațiilor punctelor vecine este diferită la diferite momente de timp și din această cauză oscilațiile rezultante nu au o amplitudine stabilă. Rezultatul suprapunerii undelor depinde de corelația dintre fazele, pulsațiile și amplitudinile lor. Un interes practic deosebit reprezintă cazul suprapunerii undelor de aceeași pulsație și caracterizate de o diferență de fază constantă în timp.

Sursele de unde, ale căror oscilații se produc cu aceeași pulsație și mențin pe durata întregului proces oscilatoriu o diferență de fază constantă, se numesc surse coerente, iar undele produse de aceste surse – unde coerente.

La suprapunerea undelor coerente se obține o configurație stabilă a punctelor mediului, unele dintre ele oscilând cu amplitudine mare, iar altele – cu amplitudine mică.

Fenomenul de amplificare sau de atenuare reciprocă a amplitudinii oscilațiilor rezultante în diferite puncte ale mediului în urma suprapunerii undelor coerente se numește interferență. Regiunea mediului unde se produce interferența este numită câmp de interferență, iar aspectul acestuia – tablou de interferență.

Să analizăm procesul de formare a tabloului de interferență a undelor de pe suprafața apei. Pentru aceasta pe o tijă se fixează la o anumită distanță unul de altul două ace. Dacă aducem tija în stare de vibrație cu o pulsație oarecare, atunci cele două ace, lovind suprafața apei dintr-o cuvă, produc două unde coerente.

În figura 5.21 sunt reprezentate schematic suprafețele de undă după intervale de timp egale cu jumătate de perioadă și tabloul de interferență obținut în acest caz. Punctele S_1 și S_2 corespund locurilor de pe suprafața apei, unde lovesc acele. Suprafețele de undă desenate cu cercuri întregi corespund creștelor, iar cele cu cercuri întrerupte – adânciturilor de pe suprafața apei. Astfel, în punctele A sau B, unde se întâlnesc două creste sau, respectiv, două adâncituri, are loc amplificarea amplitudinii de oscilație, obținându-se o creastă mai înaltă sau o adâncitură mai mare (**maxim de interferență**), iar în punctul C, unde se întâlnesc o creastă cu o adâncitură, are loc micșorarea amplitudinii de oscilație (**minim de interferență**). Întrucât energia undelor este proporțională cu pătratul amplitudinii lor, rezultă că **la interferență are loc redistribuirea energiei undelor în punctele de maxim**. Din figură se mai observă că toate punctele în care se întâlnesc creștele (adânciturile) sunt în concordanță de fază, iar diferența dintre drumurile parcurse de fiecare undă de la sursele S_1 și S_2 până la punctul dat este egală cu un număr întreg de lungimi de undă λ (un număr par de semilungimi de undă). Punctele în care se întâlnesc o creastă cu o

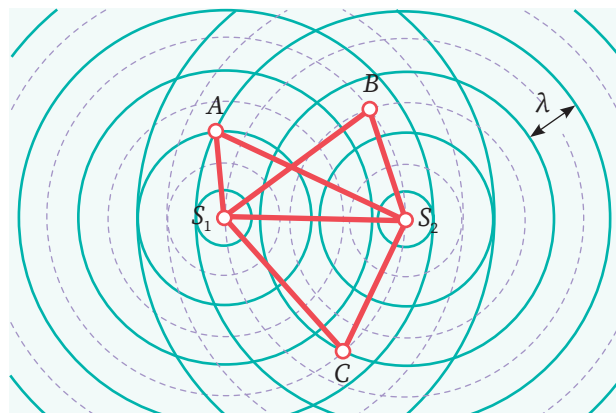


Fig. 5.21

adâncitură sunt în opoziție de fază, iar diferența de drum constituie un număr impar de semilungimi de undă. Așadar,

Punctele câmpului de interferență pentru care diferența de drum este un număr par de semilungimi de undă oscilează cu amplitudine maximă, iar cele pentru care diferența de drum este un număr impar de semilungimi de undă oscilează cu amplitudine minimă.

Astfel, condiția de maxim de interferență este

$$\Delta x = \pm 2m \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (5.34)$$

iar cea de minim de interferență –

$$\Delta x = \pm (2m + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}, \quad (5.35)$$

unde m este un număr întreg și reprezintă ordinul maximum sau minimum. De exemplu, $m = 0$ evidențiază pe tabloul de interferență maximumul central sau minimele de ordinul 1, situate simetric de o parte și de alta a maximumului central la distanțele $\lambda/2$ și $-\lambda/2$.

AUTOEVALUARE

- 1 Care este esența principiului superpoziției undelor?
- 2 Care surse de oscilații se numesc coerente? Ce reprezintă undele coerente?
- 3 Ce se numește interferență? Explicați procesul de formare a tabloului de interferență.
- 4 Ce reprezintă diferența de drum?
- 5 În care condiții un punct al câmpului de interferență va oscila cu amplitudine maximă? Dar cu amplitudine minimă?

Elemente de acustică

Compartimentul fizicii în care sunt studiate producerea, propagarea și analiza sunetelor este numit **acustică**.

Undele mecanice longitudinale care se propagă în medii elastice și produc senzații auditive se numesc unde sonore sau sunete, iar sursele unor astfel de unde reprezintă vibrații sonore.

a Unde sonore. Calitățile sunetului

Undele sonore ajung la urechea noastră, propagându-se de obicei prin aer, însă ele se pot propaga atât în lichide, cât și în solide. Cercetările experimentale și teoretice au arătat că viteza de propagare a undelor sonore prin lichide și solide este mult mai mare decât în gaze. De exemplu, viteza sunetului în aer în condiții normale este de 340 m/s, în apă – de 1 500 m/s, iar în oțel – de 5 500 m/s. Însă nu orice vibrație poate produce senzația de sunet. S-a constatat că urechea unui om este sensibilă la undele mecanice caracterizate cu frecvențe situate în diapazonul de aproximativ 16–20 000 Hz. Acest diapazon are un caracter convențional. El nu depinde de proprietățile undelor sonore, ci numai de calitățile urechii umane și poate varia de la o persoană la alta și odată cu vârsta. Deja la o vârstă medie omul nu mai poate recepționa sunete cu frecvențe mai mari de 12–14 kHz.

Sunetele se deosebesc între ele prin intermediul anumitor particularități numite **calitățile sunetului**. Acestea sunt **intensitatea**, **înălțimea** și **timbrul** sunetului.

Intensitatea sunetului I se măsoară cu energia transportată de unda sonoră într-o unitate de timp printr-o unitate de suprafață, așezată perpendicular pe direcția de propagare și are unitatea în (SI) W/m^2 .

Frecvența și intensitatea sunt două caracteristici independente ale undelor sonore. Cu alte cuvinte, la una și aceeași frecvență pot exista sunete slabe și sunete puternice, sau invers, pot exista sunete de frecvență joasă și de frecvență înaltă, dar având aceeași intensitate. Urechea umană este sensibilă

pentru intensități caracterizate cu valori cuprinse într-un interval foarte mare. Cel mai puternic sunet pe care îl poate recepționa urechea noastră are o intensitate de aproximativ 10^{12} ori mai mare decât a celui mai slab sunet perceptibil. Limita inferioară a intensității sunetului sub care urechea omului nu mai percepe vibrațiile sonore este numită prag inferior de audibilitate, iar cea superioară, deasupra căreia sunetul produce senzație dureroasă – prag superior de audibilitate.

Un sunet se poate caracteriza cu valoarea relativă a intensității lui I în raport cu intensitatea unui sunet de referință, care în practică se ia cea de la pragul inferior de audibilitate – $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$. Întrucât domeniul de audibilitate este foarte larg, pentru compararea sunetelor s-a dovedit a fi foarte comodă utilizarea scării logaritmice. Astfel, se introduce mărimea fizică β numită **nivel sonor** și definită cu relația

$$\beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (5.36)$$

Unitatea nivelului sonor este **bellul** cu simbolul B și a fost numită astfel în cinstea inventatorului telefonului Alexander Graham Bell (1847–1922). Din (5.36) se observă că un sunet cu nivelul sonor de 1 B (un bell) are intensitatea de 10 ori mai mare decât a pragului inferior de audibilitate. Bellul este o unitate destul de mare și de aceea în practică pentru măsurarea nivelului sonor se folosește o unitate mai mică: **decibell** cu simbolul dB ($1 \text{ B} = 10 \text{ dB}$).

Calitatea unui sunet de a fi mai jos (grav) sau mai înalt (ascuțit) se numește înălțime.

În funcție de frecvență, sunetul este cu atât mai ascuțit, cu cât frecvența lui este mai mare. La vibrația unui corp nepunctiform întotdeauna se propagă sunete complexe care conțin mai multe frecvențe. Sunetul cu cea mai mică frecvență ν_f pe care îl produce un corp este numit **sunet fundamental**, iar cele cu frecvența $\nu = m\nu_f$ ($m = 2, 3, \dots$) – **armonici superioare**.

Calitatea prin care se deosebesc două sunete care au aceeași intensitate și frecvență fundamentală, dar emise de surse diferite se numește timbrul sunetului.

Timbrul unui sunet depinde de intensitatea, înălțimea și numărul armonicilor superioare care însoțesc sunetul fundamental. Rezultă că deosebirea sunetelor prin timbrul lor se datorează complexității acestora. Cu cât sunetul conține mai multe armonici, cu atât el este mai plăcut, mai armonios pentru auz.

Din punctul de vedere al calităților sunetelor și al senzațiilor produse de ele asupra urechii omului, acestea pot fi clasificate în modul următor:

- sunetele de intensitate mare și de scurtă durată (trăsnete, bubuituri, detonări ș.a.). Astfel de sunete sunt foarte neplăcute pentru auz, producând adesea și senzații de durere;
- sunetele obținute în urma unor oscilații cu amplitudine variabilă în timp, dar fără niciun fel de periodicitate, sunt numite **zgomote**;
- sunetele periodice, indiferent de gradul lor de complexitate, sunt numite **sunete muzicale**. Ele provoacă o senzație plăcută pentru auz, dacă, bineînțeles, au intensitatea sub pragul superior de audibilitate.

b Infrasonete și ultrasunete. Aplicații

Diapazonul de frecvențe al undelor sonore este mult mai larg decât cel perceput de oameni. Există însă animale care pot recepționa vibrații cu frecvențe atât mai mici de 16 Hz, cât și mai mari de 20 kHz. De exemplu, meduzele pot recepționa sunete cu frecvențe de aproximativ 8–13 Hz, câinele – până la 40 kHz, iar liliiecii și delfinii – cu frecvențe de peste 100 kHz. Undele sonore cu frecvențe mai mici de 16 Hz sunt numite **infrasonete**, iar cele cu frecvențe mai mari de 20 kHz – **ultrasunete**.

Sursele de infrasonete sunt atât naturale (cutremure, erupții vulcanice, uragane, cascade), cât și artificiale (motoarele cu reacție și ale navelor marine și alte echipamente grele). Infrasonetele pot fi auzite de multe animale care le folosesc pentru comunicare sau/și navigare (elefanții, hipopotamii, rinocerii, girafele, balenele, peștii, meduzele, aligatorii, crocodilii ș.a.). De asemenea, animalele folosesc infrasonetele pentru a simți apropierea diferitelor fenomene naturale precum furtunile și cutremurele. Chiar dacă oamenii nu

pot auzi infrasonetele, acestea acționează asupra lor având un efect iritant, provocând presiune în urechi, dureri de cap, amețeli și alte senzații dăunătoare. Cu cât nivelul infrasonetelor este mai înalt, cu atât efectele dăunătoare asupra oamenilor devin mai pronunțate și trebuie evitată expunerea prelungită la acestea.

Diapazonul de frecvențe al ultrasunetelor începe de la 20 kHz și poate ajunge până la 1 GHz și chiar mai mult. Se disting ultrasunete de frecvență joasă (20 kHz–100 kHz), de frecvență medie (100 kHz–10 MHz) și de frecvență înaltă (10 MHz–1 GHz), fiecare dintre acestea având domeniul propriu de aplicare.

Ultrasunetele sunt produse cu ajutorul unor generatoare electromagnetice care funcționează pe baza efectului piezoelectric sau al celui magnetostrictiv. Aplicarea unei tensiuni alternative cu frecvență mai mare de 20 kHz pe fețele unui cristal piezoelectric conduce la contracția sau dilatarea acestuia și deci la emisia undelor acustice. În cazul efectului magnetostrictiv, în câmpul magnetic variabil se introduce un material feromagnetic care începe să vibreze, devenind sursă de unde acustice.

În natură ultrasunetele sunt generate de numeroase animale, care folosesc pentru orientare principiul ecolocației. De exemplu, pentru localizarea obstacolelor sau a prăzii liliiecii și delfinii emit impulsuri scurte de unde ultrasonore și după un interval de timp recepționează impulsurile-ecou. Cu cât intervalul de timp dintre emiterea impulsului și ecoul recepționat este mai mare, cu atât obstacolul sau prada este mai departe. De menționat că principiul ecolocației este folosit la construcția **sonarului maritim** – dispozitiv care recepționează după un timp impulsurile de ultrasunete emise, după reflectarea lor de la diferite obstacole (bancuri de pești, submarine, stânci etc.).

Ultrasunetele au numeroase aplicații în diferite domenii. În construcții este folosit controlul ultrasonor pentru depistarea diferitelor defecte (fisuri sau goluri) în elementele de beton armat fără deteriorarea lor. În tehnologia alimentelor ultrasunetele se folosesc la sterilizarea și conservarea diferitelor produse. În agricultură se folosesc pentru îndepărtarea diferiților dăunători. În tehnică cu ajutorul ultrasunetelor se realizează vopsirea mai uniformă și mai intensă a fibrelor cu un consum mai mic de vopsea. Ultrasunetele sunt folosite pe larg în cosmetologie la curățarea pielii, la introducerea substanțelor active, la tratarea acneei ș.a. În medicină ultrasunetele sunt folosite atât pentru tratamentul, cât și pentru

diagnosticarea diferitelor afecțiuni. În acest scop este utilizată ecografia (ultrasonografia) care este o metodă de investigare medicală noninvasivă pentru

vizualizarea majorității organelor interne ale corpului în timp real.

COMUNICARE

Efecte acustice

În colaborare cu un coleg/o colegă **studiați** din diverse surse de informare materiale despre efectele acustice și **prezentați** următoarele aspecte:

- 1 **Enumerați** efectele acustice pozitive (optimizarea acustică) și negative (poluarea fonică) la interacțiunea sunetelor cu mediul și cu corpul uman.
- 2 **Prezentați** un studiu despre efectele negative ale poluării fonice asupra sănătății fizice și mentale.
- 3 **Analizați** importanța cercetărilor pentru înlăturarea efectelor negative (acustica arhitecturală, acustica tehnică).
- 4 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 5 **Evaluați** reciproc produsele realizate.

AUTOEVALUARE

- 1 Care unde se numesc sonore?
- 2 Care este diapazonul undelor sonore?
- 3 Care este clasificarea undelor sonore în funcție de frecvența vibrațiilor elastice?
- 4 Ce reprezintă intensitatea sunetului și care sunt unitățile ei în SI?
- 5 Ce reprezintă pragul inferior (superior) de audibilitate?
- 6 Cum se definește mărimea fizică numită nivel sonor și care este unitatea ei de măsură în SI?
- 7 Ce se numește înălțime a sunetului? Ce reprezintă sunetul fundamental și armonicile lui superioare?
- 8 Ce se numește timbrul sunetului?
- 9 Cum se clasifică sunetele din punctul de vedere al calității lor și al senzațiilor auditive produse de acestea?
- 10 Care este diapazonul infrasunetelor?
- 11 Enumerați sursele de infrasunete și cum sunt acestea utilizate. Cum se manifestă acțiunea infrasunetelor asupra organismului uman?
- 12 Care este diapazonul ultrasunetelor?
- 13 Enumerați aplicațiile ultrasunetelor.
- 14 **BIO** Determinați intensitatea sunetului caracterizat cu nivelul sonor de:
 - a 20 dB – vorbirea în șoaptă;
 - b 65 dB – conversația obișnuită;
 - c 120 dB – pragul durerii;
 - d 140 dB – concert de muzică rock.
- 15 **BIO** Diapazonul de frecvențe recepționate de urechea unui om este situat între 16 Hz și 20 kHz. Care este diapazonul lungimilor de undă corespunzător celui al frecvențelor? Viteza sunetului în aer este de 340 m/s.
- 16 **BIO** Tumorile cerebrale sunt înlăturate cu ajutorul unui aspirator chirurgical cu ultrasunete, care produce unde sonore cu frecvența de 25,6 kHz. Determinați lungimea de undă a acestor unde în aer și în fluidele corporale. Viteza undelor sonore în aer este de 340 m/s, iar în fluidele corporale – de 1 450 m/s.

STEAM

Utilizarea ultrasunetului

Scopul proiectului

Aprofundarea cunoștințelor despre ultrasunete și despre utilizarea lor în natură și în diferite domenii.

Formați 4 echipe de lucru.

Discutați și repartizați volumul de lucru între echipe.

Realizați proiectul STEAM efectuând cercetări după următoarele repere:

Explicați modul în care ultrasunetele sunt utilizate în natură ca mijloc de orientare spațială de către diferite ființe biologice.

Studiați metodele de producere artificială a ultrasunetelor și **prezentați** evoluția diverselor aplicații ale acestora.

Analizați utilizarea ultrasunetelor în medicină (de exemplu: diagnostica ecografică a organelor interne, metode de tratament ultrasonor etc.).

Documentați-vă din surse diverse și **identificați** rolul ultrasunetului în cinematografia documentară și artistică.

Investigați și constatați rolul aplicării ultrasunetului în cercetările științifice (fizică, biologie, chimie etc.) și al utilizării efectelor ultrasonore în tehnică.

Analizați utilizarea ultrasunetelor în industrie și agricultură și **propuneți** soluții pentru rezolvarea unei probleme prin aplicarea acestor tehnologii (de exemplu în agricultură: combaterea dăunătorilor și rozătoarelor; măsurarea umidității și a densității solului etc.).

Evaluati fezabilitatea soluțiilor propuse pentru problemele din comunitatea/localitatea în care locuiți.

Elaborați o prezentare Power Point în care **să reflectați** cercetările și rezultatele obținute în cadrul proiectului.



Unde seismice

Unul dintre cele mai distrugătoare și înspăimântătoare fenomene naturale de pe Pământ îl constituie **cutremurul (seismul)**. Seismele reprezintă niște eliberări bruște de energie, relativ localizate și de scurtă durată, care produc zguduiri și oscilații ale scoarței terestre, ce se propagă prin intermediul undelor.

Undele elastice care se propagă în interiorul și la suprafața Pământului se numesc unde seismice.

De cele mai multe ori cutremurele durează doar câteva secunde, însă au fost înregistrate de asemenea cutremure cu durata de aproximativ un minut și chiar mai mult. De exemplu, cutremurul din Tohoku, Japonia (11 martie 2011), a durat aproximativ 6 minute. Energia elastică eliberată la un cutremur catastrofal este enormă. Conform calculelor estimative, aceasta ajunge până la aproximativ 10^{18} J (pentru comparație – energia solară absorbită de suprafața Pământului timp de un an este de aproximativ 10^{24} J).

Cauza nemijlocită a cutremurelor o constituie deformarea scoarței terestre (de alungire, comprimare, forfecare etc.), care provoacă tensiuni mecanice enorme în rocile Pământului. Atunci când acestea „înving” rezistența de rupere a rocilor, are loc eliberarea bruscă a energiei acumulate și se produce cutremurul. Regiunea în care este eliberată energia se numește **focar** sau **hipocentru** și, în majoritatea cazurilor, se află la adâncimi cuprinse între 1 și 700 km. Locul aflat pe suprafața Pământului deasupra focarului este numit **epicentru**. S-a constatat că distrugerile sunt mai mari în zona epicentrului, când focarul se află la adâncime mică. Dacă focarul se află la adâncimi mari, cutremurul se manifestă violent nu numai în regiunea epicentrului, dar și la distanțe mari de acesta.

Care este natura forțelor ce generează asemenea deformății? Există mai multe ipoteze cu privire la originea acestora, însă majoritatea cercetătorilor susțin ipoteza despre **mișcarea plăcilor tectonice**.

În general, cutremurele se pot produce în orice regiune a scoarței terestre, însă ele sunt mai frecvente în regiunile apropiate de marginile plăcilor tectonice care se mai numesc **falii de transformare** sau **linii de refracție**.

Energia eliberată în focarul unui cutremur se propagă în toate direcțiile prin intermediul undelor



Cutremurul din Tohoku, Japonia

seismice. Există două tipuri principale de unde seismice: **unde de volum**, care se propagă în interiorul Pământului, și **unde de suprafață**, care se propagă la suprafața scoarței terestre.

Undele de volum, la rândul lor, se divizează în: **unde primare (P)** și **unde secundare (S)**. Deplasarea undelor *P* se realizează prin comprimări și dilatări succesive ale mediului pe direcția de propagare a lor, adică sunt unde longitudinale și se transmit atât prin medii solide (litosferă), cât și lichide (magma din mantaua externă și nucleul extern). S-a constatat că undele *P* întotdeauna ajung la suprafață mai repede (au viteză mai mare) decât undele *S*, însă ultimele transferă mai multă energie și deci au o forță de distrugere mai mare. Astfel, înregistrarea undelor *P* ar putea fi un avertisment al primejdiei distrugerilor, dar intervalul de timp până la sosirea undelor *S* este prea mic (de ordinul secundelor sau maxim al zecilor de secunde) pentru a fi prevenită populația. Undele *S* se deplasează prin oscilații ale particulelor mediului, perpendiculare pe direcția de propagare a lor, adică sunt transversale și se transmit numai prin medii solide (litosferă).

Undele de suprafață se propagă la suprafața scoarței terestre și sunt de două tipuri **Love** și **Rayleigh**. Undele Love produc doar mișcări orizontale pe direcția stânga-dreapta față de cea de propagare, iar undele Rayleigh se propagă asemănător mișcării valurilor, deplasând scoarța terestră pe direcțiile atât sus-jos, cât și înainte-înapoi.

Viteza undelor seismice depinde de densitatea și proprietățile elastice ale rocilor prin care se propagă. Undele *P* au viteze, în medie, de 7 km/s, ce sunt de aproximativ de 1,7 ori mai mari decât ale undelor *S*. Viteza undelor de suprafață este mai mică decât a celor de volum și constituie aproximativ 3 km/s.

Pentru înregistrarea undelor seismice în timpul unui cutremur se folosesc instrumente foarte sensibile, numite **seismografe**.

Pentru descrierea efectelor de distrugere și compararea cutremurelor, în prezent se utilizează două tipuri de scări: **scara intensității** și **scara magnitudinii**. Conform scării intensității, fiecărui cutremur i se atribuie un număr, ce caracterizează consecințele lui într-un anumit loc, dependent de distanța față de epicentru și particularitățile solului, numit **intensitate macroseismică** (*I*). Întrucât pentru unul și același cutremur în diferite localități intensitatea macroseismică este diferită, caracteristica lui energetică este determinată de cea mai mare intensitate

înregistrată. Scara internațională a intensităților, folosită în prezent de majoritatea țărilor, are 12 grade și se numește **scara intensității seismice Mercalli**. Fiecare grad al acestei scări conține o descriere foarte detaliată a efectelor cutremurului, observate la suprafața Pământului.

O altă scară, frecvent utilizată pentru stabilirea mărimii cutremurelor, folosind numai înregistrările instrumentale, este cea propusă de **Charles Richter**. El a definit magnitudinea *M* a unui cutremur ca logaritmul în baza 10 a amplitudinii maxime a unei seismice, înregistrate cu un seismograf standard, aflat la distanța de 100 km de la epicentru. Aceasta înseamnă că creșterea magnitudinii cu o unitate corespunde creșterii amplitudinii maxime a unei seismice de 10 ori.

Între scările Mercalli și Richter nu există o corelație exactă. Ele pot fi doar comparate în cazul unei localități concrete. În tabelul de mai jos este prezentată scara intensității seismice Mercalli, expusă într-o formă prescurtată.

Intensitatea (I)	Efectele cutremurului după scara Mercalli
1	Microseisme înregistrate numai cu seismografe.
2	Este sesizat numai de foarte puțini oameni, aflați în stare de repaus, mai ales de la etajele superioare ale clădirilor.
3	Vibrații simțite în încăperi, îndeosebi la etajele superioare, însă foarte mulți oameni nu le atribuie unui cutremur.
4	În timpul zilei este simțit de majoritatea celor din încăperi. În timpul nopții unii se trezesc din somn. Vesela sună ușor.
5	Este simțit de aproape toată populația. Se pot răsturna obiectele mici sau mobila instabilă. Oscilează lustrele.
6	Este simțit de toată populația, unii de spaimă fug din case. Se deplasează mobila, în unele locuri cade tencuiala.
7	Toți se înspăimântă, părăsesc încăperile. Se răstoarnă diferite obiecte, apar fisuri ușoare sau puternice în pereți în funcție de duritatea lor.
8	Spaimă generală și panică. Se prăbușesc coșurile de pe clădiri. Pereții se fisurează. Construcțiile mai slabe se deteriorează. Se deplasează mobila grea. Se modifică nivelul apei din fântâni.
9	Panică generală. Clădirile mai slabe se dărâmă, iar cele durabile suferă avarii considerabile. Apar crăpături pe suprafața solului. Se rup conductele subterane.
10	Majoritatea clădirilor sunt distruse din temelie sau avariate considerabil. Crăpături multiple în scoarța terestră. Apa din râuri și lacuri este aruncată peste maluri.
11	Catastrofă. Se distrug clădirile, digurile, căile de transport, au loc alunecări de teren și devieri ale unor ape curgătoare.
12	Modificarea reliefului. Pe suprafața Pământului se formează unde. Nu rezistă, practic, nicio construcție. Se modifică cursul apelor, apar lacuri noi.

Cutremurele care se resimt în Republica Moldova au epicentrul în regiunea Vrancea din România. Acestea se datorează coliziunii dintre Placa Eurasianică și Subplăcile Intraalpină și Moesică, mai exact, subducției Plăcii Eurasiatice. După cum se observă din diagrama prezentată în *figura 5.22*, unde sunt indicate numai cutremurele de magnitudine $M > 4$ care au avut loc în secolul trecut, regiunea Vrancea are o activitate seismică destul de mare. De menționat că în

această perioadă cutremurele cu magnitudinea $M > 7$ s-au repetat la un interval de aproximativ 35 de ani.

Cea mai importantă problemă a seismologilor este, fără îndoială, cercetarea posibilităților de atenționare timpurie a cutremurelor. Însă în prezent asemenea tehnologii încă nu există. Nimeni nu poate spune cu exactitate unde, în ce an și în ce zi va avea loc un cutremur cu consecințe grave pentru oameni.

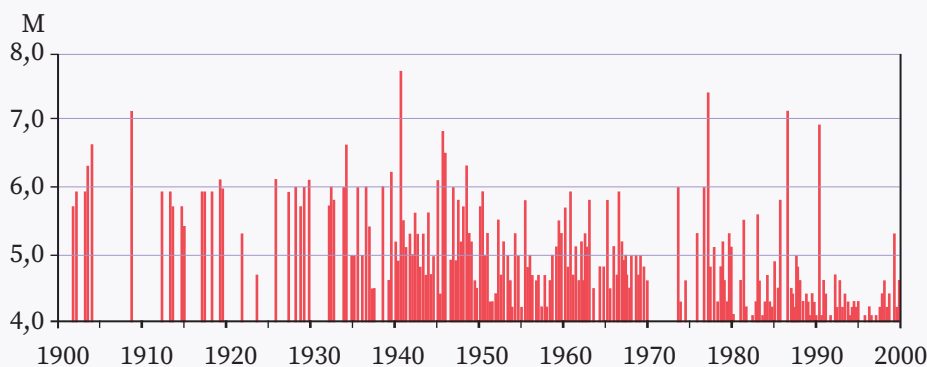


Fig. 5.22

AUTOEVALUARE

- 1 Ce se numesc unde seismice?
- 2 Ce reprezintă focarul unui cutremur? Dar epicentrul?
- 3 Care sunt mecanismele de formare a cutremurelor?
- 4 Ce reprezintă falia de transformare?
- 5 Care sunt tipurile de unde seismice? Caracterizați-le.
- 6 Care sunt scările pentru descrierea și compararea cutremurelor, utilizate în prezent? Prin ce se deosebesc ele?

COMUNICARE

Efecte seismice

În colaborare cu un coleg/o colegă **studiați** din diverse surse de informare materiale despre efectele seismice și **prezentați** următoarele aspecte:

- 1 **Realizați** o trecere în revistă a istoriei cutremurelor în Moldova.
- 2 **Analizați** principalele efecte fizice ale seismelor (tipurile undelor seismice și caracteristicile lor).
- 3 **Descrieți** efectele cutremurelor (asupra mediului natural, asupra construcțiilor).
- 4 **Prezentați** modul de evaluare a cutremurelor și a efectelor asupra persoanelor (scările Mercalli și Richter).
- 5 **Elaborați** o prezentare Power Point care **să includă** informațiile studiate și concluziile obținute.
- 6 **Evaluați** reciproc produsele realizate.

Test de evaluare sumativă

PROFIL REAL

1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p.** **a** Faza oscilațiilor armonice ale unui punct material depinde _____ de timp;
- 1 p.** **b** Punctele mediului pentru care diferența de drum constituie un număr par de semilungimi de undă oscilează cu amplitudine _____;
- 1 p.** **c** Vibrațiile cu frecvențe mai mici de 16 Hz sunt numite _____.

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

1 p.	Faza	W/m ²
1 p.	Elongația	rad
1 p.	Intensitatea sunetului	mm
		dB

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- 1 p.** **A** **F** **a** Perioada oscilațiilor pendulului elastic depinde de înălțimea la care pendulul se află deasupra Pământului.
- 1 p.** **A** **F** **b** Fenomenul de difracție a undelor constă în ocolirea de către ele a obstacolelor de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă.
- 1 p.** **A** **F** **c** Undele produse de sursele de oscilații cu aceeași pulsație și cu diferență de fază constantă în timp sunt unde coerente.

4 **3 p.** În figura 5.23 este reprezentat graficul dependenței elongației unui oscilator de timp. Determinați cu ajutorul acestui grafic perioada oscilațiilor și valorile maxime ale vitezei și accelerației de oscilație.

5 **2 p.** Determinați raportul lungimilor a două pendule gravitaționale, dacă raportul perioadelor oscilațiilor acestora este egal cu 2.

6 **2 p.** La propagarea unei unde, distanța dintre două puncte vecine, care oscilează în aceeași fază, este egală cu 1,5 m. Determinați frecvența oscilațiilor, dacă viteza de propagare a undei este egală cu 300 m/s.

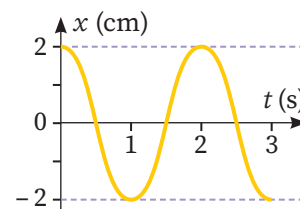


Fig. 5.23

7 Un pendul elastic format dintr-un corp de masă $m = 16 \text{ g}$ și un resort efectuează oscilații sub acțiunea forței elastice a resortului în conformitate cu ecuația $x = 10 \sin\left(\frac{\pi}{8}t + \frac{\pi}{8}\right)$ (cm). Determinați:

- 2 p.** **a** valoarea maximă a forței care acționează asupra corpului suspendat de resort;
- 6 p.** **b** relațiile care exprimă dependența de timp a energiilor cinetică, potențială și totală ale corpului;
- 2 p.** **c** momentul de timp în care corpul se află la jumătatea amplitudinii.

8 **6 p.** Distanța dintre crestele valurilor din mare este $\lambda = 5 \text{ m}$. Când o barcă aflată pe mare se deplasează în întâmpinarea valurilor, acestea lovesc barca în timpul $t = 1 \text{ s}$ de 4 ori, iar atunci când barca se deplasează în același sens cu valurile – de 2 ori. Determinați viteza bărcii, precum și viteza valurilor mării.

1 Completați spațiile punctate astfel încât următoarele afirmații să fie adevărate:

- 1 p.** **a** Mărimea egală numeric cu numărul de oscilații complete efectuate într-o unitate de timp este numită _____;
- 1 p.** **b** Oscilațiile a căror amplitudine se micșorează în timpul mișcării oscilatorii se numesc oscilații _____;
- 1 p.** **c** Unda în care perturbația particulelor mediului se realizează perpendicular pe direcția de propagare a ei este o undă _____.

2 Stabiliți (prin săgeți) corespondența dintre următoarele mărimi fizice și unitățile ce le exprimă:

1 p.	Frecvența	s
1 p.	Amplitudinea	dB
1 p.	Nivelul sonor	cm
		Hz

3 Determinați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații, marcând „A”, dacă afirmația este adevărată, și „F”, dacă afirmația este falsă.

- 1 p.** **A** **F** **a** Energia totală a unui sistem oscilator este direct proporțională cu pătratul amplitudinii oscilațiilor.
- 1 p.** **A** **F** **b** Unda care se propagă de la o sursă punctiformă într-un mediu omogen și izotrop este o undă plană.
- 1 p.** **A** **F** **c** Prin aer se pot propaga doar unde transversale.

4 **3 p.** În figura 5.24 este reprezentat graficul dependenței elongației unui oscilator de timp. Determinați cu ajutorul acestui grafic valorile amplitudinii, perioadei și pulsației oscilațiilor.

5 **2 p.** De câte ori trebuie să mărim lungimea unui pendul gravitațional, pentru ca perioada oscilațiilor acestuia să crească de 3 ori?

6 **2 p.** O luntre oscilează pe valurile mării cu perioada de 2 s. Determinați lungimea de undă, dacă valurile mării se mișcă cu viteza de 5 m/s.

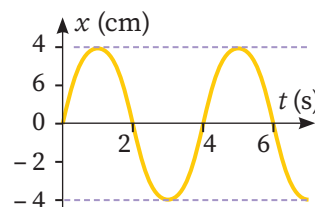


Fig. 5.24

7 Un corp cu masa de 200 g suspendat de un resort elastic efectuează oscilații armonice în conformitate cu ecuația $x = 10 \sin \left(2 \pi t - \frac{\pi}{3} \right)$ (cm). Determinați:

- 2 p.** **a** amplitudinea, pulsația, frecvența, perioada și faza inițială a oscilațiilor;
- 4 p.** **b** valorile elongației, vitezei și accelerației de oscilație la momentul $t = 1$ s;
- 2 p.** **c** constanta de elasticitate a resortului;
- 2 p.** **d** energia totală a oscilatorului.

8 **6 p.** Pe malul unui lac se produce un sunet puternic de scurtă durată. În apropierea malului opus un înotător aflându-se complet în apă, auzind acest sunet, imediat scoate capul din apă și aude din nou sunetul după 5 s. Determinați lățimea lacului, dacă viteza sunetului în apă este de 1 430 m/s, iar în aer – de 330 m/s.

Compunerea oscilațiilor coliniare

Deseori în practică se întâlnesc situații când un corp este supus acțiunii concomitente a mai multor forțe, care, acționând separat, ar provoca fiecare o mișcare oscilatorie individuală. În asemenea situații mișcarea oscilatorie rezultantă a corpului va fi mult mai complicată și, de regulă, nearmonică. În cele ce urmează vom analiza o situație mai simplă, când este valabil **principiul suprapunerii oscilațiilor mici**.

Elongația oscilației unui corp supus mai multor mișcări oscilatorii este egală cu suma algebrică a elongațiilor mișcărilor componente.

Considerăm un caz particular, când mișcărilor oscilatorii componente au loc pe aceeași direcție, adică sunt paralele, iar pulsațiile sunt egale. Fie două oscilații descrise de ecuațiile

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_{01}), \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_{02}), \end{aligned} \quad (5.37)$$

unde x_1, x_2, A_1, A_2 și $\varphi_{01}, \varphi_{02}$ sunt, respectiv, elongațiile, amplitudinile și fazele inițiale ale celor două oscilații componente. Dacă corpul participă simultan în cele două mișcări oscilatorii (5.37), atunci, conform principiului oscilațiilor mici, oscilația rezultantă are elongația

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (5.38)$$

unde A și φ sunt amplitudinea și faza inițială ale oscilației rezultante, care trebuie determinate. Pentru aceasta vom aplica reprezentarea oscilațiilor prin fazori. Fazorul este un vector rotitor $\vec{A}$, modulul căruia este egal cu amplitudinea oscilației A și este orientat astfel încât unghiul format cu o direcție aleasă arbitrar (de exemplu, axa Ox) să fie egal cu faza oscilației.

Pe planul xOy se construiesc fazorii $\vec{A}_1$ și $\vec{A}_2$ cu originea comună în O , având modulele A_1, A_2 și fiind orientați față de axa Ox , respectiv, sub unghiurile φ_{01} și φ_{02} (fig. 5.25). Atunci compunerea celor două oscilații este echivalentă cu adunarea vectorilor $\vec{A}_1$ și $\vec{A}_2$ care se poate face aplicând regula paralelogramului (vezi paragraful 1.4, a). Diagonala paralelogramului construit pe vectorii $\vec{A}_1$ și $\vec{A}_2$ este vectorul sumă $\vec{A}$, care pornește din aceeași origine comună O . El reprezintă, totodată, și amplitudinea A , ce descrie oscilația rezultantă, iar unghiul φ dintre vectorul $\vec{A}$ și axa orizontală – faza

inițială a acesteia. Reprezentarea grafică obținută (fig. 5.25) este numită **diagramă fazorială**. Se observă că unghiul dintre fazori nu se modifică în timp, întrucât vitezele unghiulare ale fazorilor sunt egale.

Amplitudinea oscilației rezultante se obține folosind teorema cosinusurilor în triunghiul OPF . Într-adevăr, conform acestei teoreme, $A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos \alpha$. Din figura 5.25 se observă că $\alpha = \pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})$, iar folosind formulele de reducere, avem $\cos[\pi - (\varphi_{02} - \varphi_{01})] = -\cos(\varphi_{02} - \varphi_{01})$. Așadar,

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}). \quad (5.39)$$

Faza inițială a oscilației rezultante se obține simplu din triunghiul dreptunghic ONF : $\tan \varphi = NF/ON = (NQ + QF)/(OM + MN)$. Din $\triangle OMP$ și $\triangle PQF$ avem $OM = A_1 \cos \varphi_{01}$, $NQ \equiv MP = A_1 \sin \varphi_{01}$, $MN \equiv PQ = A_2 \cos \varphi_{02}$, $QF = A_2 \sin \varphi_{02}$.

Astfel,

$$\tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_{01} + A_2 \sin \varphi_{02}}{A_1 \cos \varphi_{01} + A_2 \cos \varphi_{02}}. \quad (5.40)$$

De menționat că fazorul care reprezintă oscilația rezultantă se rotește împreună cu fazorii asociați oscilațiilor componente, cu una și aceeași viteză unghiulară ω . Amplitudinea oscilației rezultante depinde la fiecare moment de timp de unghiul dintre fazorii celor două oscilații, care este egal cu defazajul $\Delta\varphi$ dintre acestea:

$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_{02}) - (\omega t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}.$$

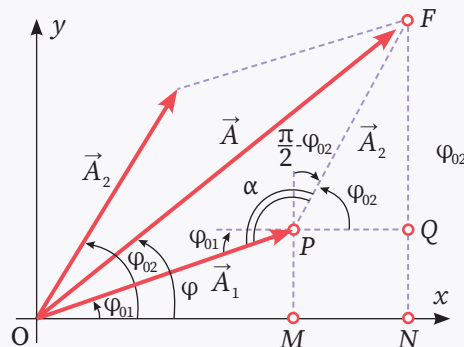


Fig. 5.25

Dacă oscilațiile componente sunt în concordanță de fază, atunci $\Delta\varphi = 2k\pi$, unde $k \in \mathbb{N}$ și $\cos(\pm 2k\pi) = \cos(2k\pi) = 1$ și din (5.39) reiese că amplitudinea

oscilației rezultante $A = A_1 + A_2$ este maximă. Dacă oscilațiile componente se vor produce în opoziție de fază ($\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$, $\cos[\pm(2k+1)\pi] = -1$), amplitudinea $A = |A_1 - A_2|$ va fi minimă.

AUTOEVALUARE

- 1 Care este esența principiului superpoziției oscilațiilor mici?
- 2 Cum se construiește o diagramă fazorială?
- 3 Cum depinde amplitudinea oscilației rezultante de defazajul oscilațiilor componente?
- 4 Un punct material execută o mișcare oscilatorie armonică, compusă din două oscilații ce se produc pe aceeași direcție, fiind descrise de ecuațiile: $x_1 = 5 \sin(2\pi t + \pi/3)$ (cm) și $x_2 = 3 \sin(2\pi t + 2\pi/3)$ (cm). Scrieți ecuația oscilației rezultante.
- 5 Un punct material participă la o mișcare oscilatorie, obținută prin suprapunerea a două oscilații de aceeași direcție: $x_1 = \sin 2t$ (cm) și $x_2 = 2 \cos 2t$ (cm). Determinați amplitudinea și faza inițială a oscilației rezultante.

5.14 (e)

Ecuația undei plane

Să stabilim dependența dintre elongația y a particulelor unui mediu omogen și nedisipativ care participă într-un proces ondulatoriu și distanța x de la sursa de oscilații pentru orice moment de timp t . Pentru aceasta considerăm o sursă de oscilații armonice situată în punctul O , de la care se propagă pe direcția Ox o undă plană. La momentul inițial punctul cu coordonata $x = 0$ oscilează după legea (5.14, a) în care, pentru simplitate, s-a luat faza inițială $\varphi_0 = 0$ [menționăm că spre deosebire de (5.14, a), aici elongația este notată prin litera y]:

$$y_0 = A \sin \omega t. \quad (5.41)$$

Atunci toate particulele mediului vor fi antrenate tot într-o mișcare oscilatorie armonică (sinusoidală) cu aceeași pulsație ω și amplitudine A , dar cu faze diferite. Așadar, în acest caz unda plană are aspectul funcției sinusoidale prezentate în figura 5.26.

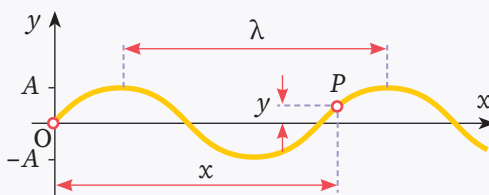


Fig. 5.26

Analizăm starea de oscilație a unei particule P ce se află la distanța x de la sursa O . Dacă particula din O (sursa de oscilații) este în stare de oscilație timp de t secunde, atunci punctul P se află în această stare numai în decursul a $(t - \Delta t)$ secunde, unde Δt este timpul după care punctul P va fi antrenat în mișcarea oscilatorie, adică timpul în care unda a parcurs distanța x (fig. 5.26). Elongația punctului P este dată tot de ecuația (5.41), dar cu altă fază:

$$y_p = A \sin \omega (t - \Delta t).$$

Deoarece mediul în care se propagă unda este omogen și nedisipativ, viteza ei rămâne constantă și $\Delta t = x/v$.

Astfel, obținem

$$y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (5.42, a)$$

Având în vedere relațiile $\omega = 2\pi/T$ și $\lambda = vT$, ecuația (5.42, a) se mai scrie sub forma

$$y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right). \quad (5.42, b)$$

Ecuațiile (5.42, a) și (5.42, b) descriu procesul de propagare a undei plane și poartă numele de **ecuația undei plane** sau **ecuația undei progresive**.

Deseori această ecuație se mai scrie sub o altă formă, mult mai simplă:

$$y = A \sin (\omega t - kx), \quad (5.42, c)$$

unde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5.43)$$

este numit **număr de undă** și arată de câte ori se cuprinde lungimea de undă λ pe o distanță de (2π) metri.

$$\varphi = \omega t - kx \quad (5.44)$$

sau cele corespunzătoare din (5.42, a) și (5.42, b) constituie faza unei plane. Ea descrie starea de oscilație a oricărei particule a mediului la orice moment de timp.

Ecuația unei plane demonstrează periodicitatea mișcării ondulatorii atât temporală, cât și spațială. Într-adevăr, pentru un punct dat al mediului (x fixat), după un timp $\Delta t = mT$ (m este un număr întreg) argumentul funcției (5.42, b) se modifică cu $2\pi m$:

$$2\pi \left(\frac{t + mT}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + 2\pi m, \text{ însă funcția rămâne}$$

aceeași. Adică, **după intervale de timp egale cu un număr întreg de perioade un punct oarecare al mediului va oscila în concordanță de fază cu sursa.**

La un moment de timp dat, funcția (5.42, b) rămâne aceeași pentru toate punctele situate la distanța $\Delta x = m\lambda$, deoarece și în acest caz argumentul ei se modifică tot cu $2\pi m$:

$$2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + m\lambda}{\lambda} \right) = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + 2\pi m.$$

Rezultă că la un moment arbitrar de timp punctele mediului, situate la distanțe multiple cu lungimea de undă λ , oscilează în concordanță de fază.

Problemă REZOLVATĂ

Oscilațiile cu perioada $T = 1$ s se propagă de-a lungul unei drepte cu viteza de 40 m/s. La distanța de 25 m de la punctul inițial, unde cu 5 s mai devreme a început mișcarea oscilatorie, elongația oscilațiilor este de 0,02 m. Care este elongația și faza oscilației la același moment de timp, dar pentru un punct situat la distanța de 30 m față de cel inițial?

Rezolvare

Se dă:

$$\begin{aligned} T &= 1 \text{ s,} \\ v &= 40 \text{ m/s,} \\ t &= 5 \text{ s,} \\ x_1 &= 25 \text{ m,} \\ x_2 &= 30 \text{ m,} \\ y_1 &= 0,02 \text{ m} \end{aligned}$$

$$y_2 = ?, \varphi_2 = ?$$

Conform ecuației unei plane (5.42a), pentru cele două distanțe avem

$$y_1 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x_1}{v} \right) \text{ și } y_2 = A \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x_2}{v} \right).$$

Pentru determinarea elongației oscilațiilor în punctul situat la distanța x_2 , este necesar să cunoaștem amplitudinea și faza unei în acel loc.

$$A = y_1 / \sin[(2\pi/T)(t - x_1/v)] = 0,02 / \sin(35\pi/4) = 0,02\sqrt{2} \approx 0,03 \text{ m.}$$

Faza unei la distanța x_2 de la sursa de oscilații la momentul de timp t reprezintă argumentul funcției „sinus” din ecuația pentru y_2 , adică $\varphi_2 = \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x_2}{v} \right) = \frac{17\pi}{2} \text{ rad}$

$$\text{și pentru elongația căutată avem } y_2 = A \sin \varphi_2 = 0,03 \sin \frac{17\pi}{2} = 0,03 \text{ m.}$$

AUTOEVALUARE

- 1 Care este aspectul ecuației unei plane și legătura căror parametri o descrie ea?
- 2 Ce se numește număr de undă și ce arată el?
- 3 Prin ce se manifestă periodicitatea temporală și cea spațială a mișcării ondulatorii?
- 4 Două puncte situate pe direcția de propagare a unei unde plane se află la distanțele de 5 și 10 m de la sursa de oscilații. Care este diferența de fază a oscilațiilor din aceste puncte, dacă ele au perioada de 0,05 s și se propagă pe această direcție cu viteza de 200 m/s?
- 5 Un punct material efectuează oscilații armonice după legea $y_0 = 2 \sin 40\pi t$ (cm). Care este ecuația unei plane ce se propagă de la sursa de oscilații cu viteza de 240 m/s? Determinați faza și elongația unui punct situat la distanța $x_1 = 5$ m de la sursa de oscilații la momentul de timp $t = 0,2$ s.
- 6 De la o sursă de oscilații cu amplitudinea de 4 cm și pulsația de $(0,5\pi)\text{s}^{-1}$ se propagă o undă care la momentul de timp $t = 1$ s antrenează în mișcare oscilatorie un punct situat la distanța $x = 10$ m de la aceasta. Determinați numărul de undă, dacă elongația acestui punct este de 2 cm.

Studiul reflexiei și refracției cu ajutorul principiului lui Huygens

Considerăm suprafața S de separație dintre două medii omogene și izotrope diferite 1 și 2, în care o undă plană se propagă cu vitezele v_1 și, respectiv, v_2 (fig. 5.27). La un moment dat t_1 , frontul de undă incident AB ajunge în poziția A_1B' , când primul punct al acestuia A_1 se află pe suprafața de separație S . Din acest moment, în intervalul de timp de la t_1 până la t_2 , toate punctele frontului de undă vor atinge pe rând suprafața de separație între punctele A_1 și B_1 .

Pentru a clarifica cum influențează această suprafață asupra propagării unei incidente, vom folosi principiul lui Huygens. Astfel, punctele de pe intervalul $[A_1, B_1]$ se consideră surse de unde sferice secundare, ce se propagă în ambele medii, dar cu viteze diferite. La momentul de timp t_2 , când ultimul punct al frontului de undă incident atinge suprafața de separație S , unda sferică secundară cu centrul în punctul A_1 reprezintă deja o emisferă de rază $A_1B'' = v_1\Delta t = B'B_1$, situată în mediul 1 și altă emisferă de rază

$$A_1A' = v_2\Delta t = B'B_1 \cdot \frac{v_2}{v_1} \quad (5.45)$$

în mediul 2 (fig. 5.27).

Dacă din punctul B_1 trasăm tangente la emisferele menționate, atunci B_1B'' este frontul de undă al undei reflectate, iar B_1A' – al undei refractate.

Analiza razelor incidente și reflectate ne permite să demonstrăm legile reflexiei, iar a celor incidente și refractate – legile refracției. Într-adevăr, deoarece $\Delta A_1B'B_1 = \Delta A_1B''B_1$ sunt dreptunghice, au ipotenuza A_1B_1 comună și catetele $A_1B'' = B'B_1 = v_1\Delta t$, rezultă că $\sphericalangle B'A_1B_1 = \sphericalangle B''B_1A_1$. Însă $\sphericalangle B'A_1B_1 = \sphericalangle i$, iar $\sphericalangle B''B_1A_1 = \sphericalangle i'$ ca unghiuri cu laturile respectiv perpendiculare, astfel demonstrându-se legea reflexiei (5.32).

Observăm că în $\Delta A_1B'B_1$ și $\Delta A_1A'B_1$, $\sphericalangle B'A_1B_1 = \sphericalangle i$ și $\sphericalangle A_1B_1A' = \sphericalangle r$ ca unghiuri cu laturile, respectiv, perpendiculare, iar $A_1A' = A_1B_1 \sin r$ și $B'B_1 = A_1B_1 \sin i$ (fig. 5.27). Introducând aceste relații în (5.45), obținem legea refracției (5.33).

Dacă un mediu oarecare este caracterizat de o viteză de propagare a undelor mai mică decât prin altul, atunci se spune că primul mediu este **mai dens**, iar al doilea (în care viteza de propagare este mai

mare) – **mai puțin dens**. Vom analiza comportamentul undei reflectate în aceste două situații.

Considerăm o undă care se propagă de-a lungul unei corzi întinse, fixate la unul dintre capete de un suport perfect rigid, astfel modelând situația reflexiei pe un mediu mai dens. La momentul când perturbația undei (cu bucla în sus) ajunge la capătul fixat (fig. 5.28, a), ea începe să acționeze asupra suportului rigid cu o forță F_c orientată în sus, încercând să-l ridice. Conform legii a treia a lui Newton, suportul acționează și el asupra corzii cu o forță F_s egală în modul cu F_c , dar de sens opus. Această forță orientată în jos generează unda reflectată, a cărei perturbație se propagă înapoi de-a lungul corzii, având sensul opus (cu bucla în jos) sensului perturbației

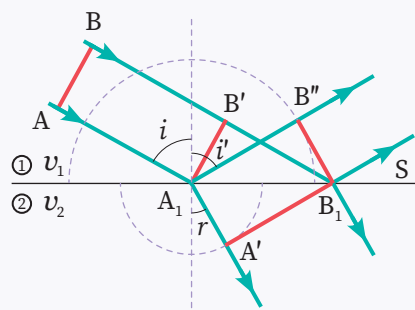


Fig. 5.27

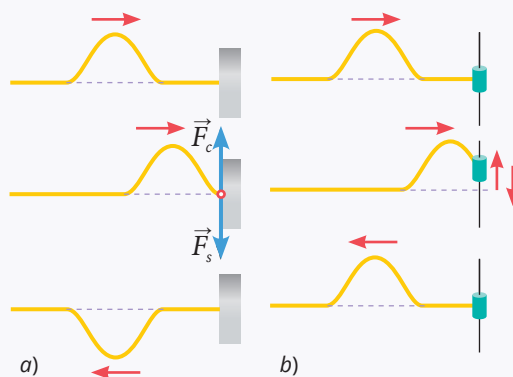


Fig. 5.28

incidente. Cu alte cuvinte, perturbația reflectată își modifică faza cu 180° (π radiani). În consecință,

la reflexia pe un mediu mai dens, unda reflectată este defazată cu π radiani față de unda incidentă.

Pentru modelarea unui mediu mai puțin dens, se prinde capătul corzii de o culisă care poate aluneca fără frecări pe o tijă (fig. 5.28, b). În acest caz,

aceeași perturbație (cu bucla în sus), ajungând la culisă, acționează cu forța F_c și o ridică fără restricții, imprimându-i o mișcare oscilatorie. Aceasta, la rândul său, generează unda reflectată care începe cu o perturbație, având același sens (tot cu bucla în sus) cu sensul perturbației incidente. Așadar,

la reflexia pe un mediu mai puțin dens, unda reflectată este în concordanță de fază cu unda incidentă.

AUTOEVALUARE

- 1 Demonstrați legile reflexiei și refracției cu ajutorul principiului lui Huygens.
- 2 Care este defazajul dintre undele reflectată și incidentă la reflexia pe un mediu mai dens? Explicați cum apare acest defazaj.
- 3 De ce la reflexia pe un mediu mai puțin dens undele reflectată și incidentă sunt în concordanță de fază?

5.16 (e)

Studiul cantitativ al interferenței undelor

Considerăm sursele coerente S_1 și S_2 de la care se propagă două unde plane descrise de ecuații de forma (5.42, c)

și

$$y_1 = A_1 \sin(\omega t - kx_1)$$

$$y_2 = A_2 \sin(\omega t - kx_2),$$

unde x_1 și x_2 sunt distanțele de la un punct oarecare P din câmpul de interferență până la sursele respective (fig. 5.29), iar k este numărul de undă (5.43).

Punctul P este antrenat în mișcare oscilatorie de fiecare undă în parte și, întrucât oscilațiile ajunse la acesta sunt coliniare, mișcarea lui prezintă rezultatul compunerii acestor oscilații. Amplitudinea oscilației rezultante este dată de relația (5.39) din care avem

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}, \quad (5.46)$$

unde $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \omega t - kx_2 - \omega t + kx_1 = k(x_1 - x_2) = k\Delta x$ este diferența de fază a undelor, iar distanța Δx este numită

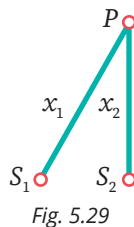


Fig. 5.29

diferență de drum. Luând în considerare (5.43), se obține relația de interdependență dintre diferența de fază și diferența de drum a undelor coerente:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x. \quad (5.47)$$

De la compunerea oscilațiilor cunoașteți că amplitudinea oscilației rezultante este maximă atunci când diferența de fază este un număr par de π radiani, adică

$$\Delta\varphi_{\max} = \pm 2m\pi \quad (5.48, a)$$

și minimă când diferența de fază este un număr impar de π radiani, adică

$$\Delta\varphi_{\min} = \pm(2m+1)\pi. \quad (5.49, a)$$

Este evident că (5.48, a) și (5.49, a) sunt și condițiile pentru maxim și, respectiv, minim de interferență, exprimate prin diferența de fază. Dacă însă utilizăm relația (5.47), atunci se obțin aceleași condiții, dar exprimate prin diferența de drum

$$\Delta x_{\max} = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad (5.48, b)$$

și, respectiv:

$$\Delta x_{\min} = \pm (2m+1) \frac{\lambda}{2}. \quad (5.49, b)$$

Observăm că aceste condiții confirmă rezultatele (5.34) și (5.35), obținute din analiza calitativă a fenomenului cercetat. În relațiile (5.48)–(5.49) $m \in \mathbb{N}$

este, totodată, și ordinul maximului sau minimului de interferență.

Zonele în care toate punctele sunt caracterizate de același rezultat al interferenței (maxim sau minim) se numesc **franje de interferență**. Astfel, un tablou de interferență reprezintă o succesiune de **franje de amplitudine maximă** și **franje de amplitudine minimă**.

Așadar, condițiile maximelor și minimelor de interferență pot fi formulate în modul următor:

Punctele câmpului de interferență pentru care diferența de drum (diferența de fază) constituie un număr par de semilungimi de undă (de π radiani), reprezintă maxime de interferență, iar pentru care ea constituie un număr impar de semilungimi de undă (de π radiani) – minime de interferență.

Un caz particular al interferenței are loc la suprapunerea a două unde progresive care se propagă pe aceeași direcție, dar în sensuri opuse. Asemenea situație se realizează întotdeauna când există reflexia totală sau parțială a undelor de la un mediu oarecare. În urma acestei suprapunerii este posibilă formarea așa-numitei **unde staționare**.

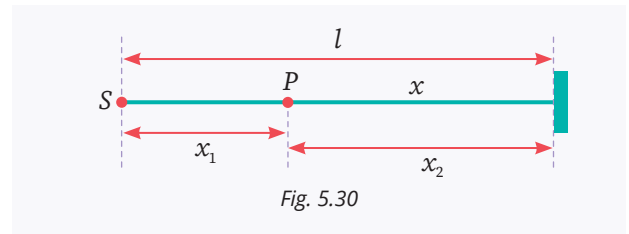
Să analizăm procesul de formare a unei unde staționare într-o coardă fixată la unul din capete. Dacă la capătul liber se excită oscilații cu perioada T , atunci prin coardă se propagă o undă progresivă cu lungimea de undă λ descrisă de ecuația $y_1 = A_0 \sin(\omega t - kx_1)$. Ajungând la capătul fixat, unda se reflectă, propagându-se prin coardă în sens opus fiind defazată cu π radiani față de unda incidentă. Întrucât cele două unde (incidentă și reflectată) provin de la aceeași sursă, ele au aceeași amplitudine și pulsație, iar diferența de fază este constantă în timp, adică sunt coerente

și întrunesc condițiile necesare pentru realizarea interferenței. Luând în considerare că ecuația unei reflectate are aspectul $y_2 = A_0 \sin(\omega t + kx_2 - \pi)$, din (5.46) pentru amplitudinea unei staționare obținem

$$A = \sqrt{2A_0^2(1 + \cos \Delta\varphi)} = \sqrt{4A_0^2 \cdot \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}} = \left| 2A_0 \cos \frac{k\Delta x - \pi}{2} \right|. \quad (5.50)$$

Notăm cu x distanța de la un punct oarecare P al coardei până la capătul ei fixat (fig. 5.30). Atunci distanțele parcurse de fiecare undă de la sursa de oscilații S până la punctul P sunt, respectiv, $x_1 = l - x$ și $x_2 = l + x$, unde l este lungimea coardei. Diferența de drum pentru aceste două unde $\Delta x = x_2 - x_1 = 2x$. Așadar, pentru amplitudinea unei staționare (5.50) avem

$$A = \left| 2A_0 \cos \left(kx - \frac{\pi}{2} \right) \right| = 2A_0 |\sin kx|. \quad (5.51)$$



Din (5.51) se obțin ușor pozițiile minimelor de interferență numite în acest caz **noduri** (amplitudinea unei staționare este nulă) și ale maximelor de interferență numite și **ventre** (amplitudinea este maximă). Luând în considerare că numărul de undă $k = 2\pi/\lambda$, pentru pozițiile ventrelor, din condiția că $|\sin kx| = 1$, avem $\frac{2\pi}{\lambda} x_{\text{ventru}} = (2m+1) \frac{\pi}{2}$ sau $x_{\text{ventru}} = (2m+1) \cdot \frac{\lambda}{4}$, iar pentru pozițiile nodurilor, din condiția că $|\sin kx| = 0$, avem $\frac{2\pi}{\lambda} x_{\text{nod}} = m\pi$ sau $x_{\text{nod}} = 2m \cdot \frac{\lambda}{4}$, unde $m = 0, 1, 2, \dots$

AUTOEVALUARE

- 1 Care sunt condițiile pentru maximele și minimele de interferență formulate prin: a) diferența de drum; b) diferența de fază?
- 2 Două surse coerente oscilează cu frecvența $\nu = 1$ Hz, iar undele generate de ele se propagă pe suprafața apei cu viteza de 1,5 m/s. Determinați pentru ce valoare minimă a diferenței de drum pe suprafața apei se va observa: a) amplificarea undelor; b) atenuarea undelor.
- 3 De la două surse coerente care oscilează cu perioada $T = 0,5$ s se propagă printr-un mediu oarecare două unde cu vitezele de 1 km/s. Determinați pentru ce valori ale diferenței de drum, în regiunea de suprapunere a undelor, se vor observa maximul și minimul de interferență de ordinul doi.
- 4 De la două surse coerente aflate la distanța $d = 2$ m una de alta se propagă într-un mediu elastic unde cu viteza de 340 m/s. La distanța $L = 200$ m de la mijlocul dintre surse perpendicular pe segmentul care le unește a fost înregistrat un maxim de interferență, iar următorul – la distanța $\Delta L = 1,7$ m de la acesta pe linia paralelă cu cea pe care se află sursele. Care este frecvența de oscilație a surselor?

RĂSPUNSURI LA PROBLEME

Unitatea I. Cinematica

- 1.2** 6. 3 m, 17 m; 7. 2,0 km, 0,8 km; 8. 3,5 m, 5,8 m; 9. 1,0 m, 1,6 m; 10. 118,6 m.
- 1.3** 5. 0; 6. 4 unități, 30° cu axa Ox și 60° cu axa Oy ; 7. $2\sqrt{5}$ unități, 10 unități; 8. 5 unități.
- 1.4** 9. $2 \cdot 10^{-6}$, 0,005 s; 10. 10 m^2 , 13 m, 0,09, 0,05, 0,9 m^2 , 0,65 m.
- 1.5** 4. 12,5 m/s; 5. 90 s; 6. $x = 8 - 1,5t$; 7. -1,2 m/s, -6 m, 6 m, $x = 5,2 - 1,2t$; 8. 4 s, 8 m și 12 m.
- 1.6** 3. 16 m/s; 4. 5,4 m/s; 5. 80 s; 6. 45 s; 7. 0,5 m/s; 8. a) 3,2 m/s, b) 20 m, c) 63,2 m.
- 1.7** 8. 27 m/s; 9. 4 m/s; 10. 0,5 h; 11. $-0,2 \text{ m/s}^2$, în sens contrar vitezei; 12. 12 m/s; 13. 5 m, 5 m, 13 m; 14. 10 s; 15. 45 m; 16. $12,5 \text{ m/s}^2$, 0,5 m/s; 17. 2 m/s, 8 m/s; 18. 6,2 m/s; 19. 176,4 m, 58,8 m/s; 20. 1200 m/s^2 , 2,9 ms, 588 m/s^2 , 5,8 ms; 21. De două ori, după 3 s (la urcare) și după 7 s (la coborâre); 22. 53,9 m, 44,1 m; 23. 6 s, 53,9 m/s; 24. 2,5 s.
- 1.8** 7. 18,8 m/s; 8. 0,6 s; 9. 465,2 m/s; 10. 0,25 m; 11. $v_{\text{sec}}/v_{\text{min}} = 20$; 12. $2,4 \text{ m/s}^2$; 13. $1,6 \text{ m/s}^2$; 14. 8 rad/s, 0,4 m; 15. 4,0 rad/s; 16. 3 rad/s; 17. 140 m/s.
- 1.9** ^(e) 5. 80 m; 6. a) 24 m/s, b) 2,1 s, c) 22 m, d) 25,2 m; 7. 20 m/s; 8. 6 m/s; 9. a) 14,1 m/s, 14,1 m/s, $v(t) = 10\sqrt{t^2 - 2,82t + 4}$ (m/s), b) $\beta(t) = \arctg(1 - 0,71t)$, c) $x(t) = 14,1t$ (m), $y(t) = (14,1t - 5t^2)$ m, d) $y = x - 0,025x^2$, e) 10 m, 40 m, 2,82 s; 10. 12. 14,6 m, 10,4 m/s, $\approx 15^\circ$ sub orizontală; 13. a) 35 m, b) 4,6 s, c) 175 m; 14. a) 34,6 m, 5 m, b) 20 kg.

Unitatea II.

Dinamica

- 2.2** 6. a) 66 N, b) blocurile de start; **7.** 0,6 kg; **8.** 7 kg; **9.** 1,125 kg; **10.** 4,8 m/s²; **11.** 160 kN; **12.** 5,1 m/s²; **13.** 6,7 m/s²; **14.** 1,2 kg; **15.** 2 m/s². **16.** 0,6 N.
- 2.3** 3. 25 N; **4.** Nu, forța de întindere a firului este egală cu 10 N.
- 2.4** 10. $5,97 \cdot 10^{24}$ kg; **11.** $2 \cdot 10^{30}$ kg; **12.** $3,8 \cdot 10^8$ m; **13.** 0,03 m/s².
- 2.5** 4. 500 N/m, 4 kg; **5.** 1000 N/m; **6.** a) 120 N/m, b) 500 N/m; **7.** 45 N/m, 2,7 N; **8.** 2,7 m/s²; **9.** 1 m/s.
- 2.6** 9. Da; **10.** 0,6; **11.** 5 m/s; **12.** 0,02 m; **13.** 0,5; **14.** 240,2 N; **15.** De 3 ori; **16.** 0,77.
- 2.7** * 1. 2 m/s²; **2.** 100 N; **3.** 1 m/s²; **4.** 0,9 m/s²; **5.** 30°, 0,23; **6.** 0,5 N; **7.** 15 kN, 18 kN, 10,5 kN, 12 kN, 161 km/h; **8.** 280 N, 1120 N.
- 2.8** ^(e) 3. 7,3 km/h, 1,8 h; **4.** 3,6 km/s; **5.** 8.
- 2.9** ^(e) 1. 0,75 m/s²; **2.** 3,7 m/s², 2,52 N; **3.** 1,9 m/s²; **4.** 40,5 N, 1,1 m.
- 2.10** ^(e) 7. a) 19,3°, b) 2,1 N; **8.** 10 rad/s.

Unitatea III.

Impulsul mecanic. Lucrul și energia mecanică

- 3.1** 5. Impulsul primului cărucior este mai mare de 1,5 ori; **6.** 2,7 m/s; **7.** 0,6 kg · m/s, a) 0, b) 1,2 kg · m/s, c) 0,8 kg · m/s, d) 0,6 kg · m/s; **8.** 9 m/s; **9.** 9000 kg · m/s; **10.** 2,5 s; **9.** a) $2,6 \cdot 10^4$ kg · m/s, b) $1,7 \cdot 10^5$ N.
- 3.2** 5. 0,8 m/s; **6.** 4,5 m/s; **7.** 0,05 m/s; **8.** 8 m/s, 53°; **9.** 57,7 m/s, 19,2 m/s; **10.** 0,9 m/s; **11.** $2,77 \cdot 10^5$ kg.
- 3.3** 6. 28 N; **7.** 727,5 J; **8.** 30°; **9.** 2,5 m/s²; **10.** 0,4; **11.** 150 W; **12.** 40 m/s; **13.** $1,3 \cdot 10^5$ J, 1,5 W; **14.** 30°.
- 3.4** 6. 0,08 kg; **7.** 1,25 ori; **8.** 40 J; **9.** 0,3 kg; **10.** 1 kW, 1,6 kW; **11.** 14 N; **12.** a) 60 kJ, b) 100 kJ; **13.** în scândura a treia; **14.** se micșorează cu 5,4 J.
- 3.5** 6. Energia potențială a bilei de oțel este mai mare de 2,89 ori decât a celei din aluminiu; **7.** 196,0 J, mușchii contractați ai picioarelor; **8.** 1 000 J; **9.** 4,5 kJ.
- 3.6** 5. 10 J; **6.** 1,5 J; **7.** 0,32 J; **8.** 3,3 J.

- 3.7** 4. $L_{1231} = -F_f (l_1 + l_2 + \sqrt{l_1^2 + l_2^2})$, $L_{12341} = -2F_f (l_1 + l_2)$; 5. La viteză mai mare lucrul mecanic al forței de rezistență (pe același traseu) este mai mare în modul decât la viteză mai mică. Ținând seama că lucrurile forței de rezistență sunt negative, lucrul ei la viteză mare este mai mic decât la o viteză mică.
- 3.8** 5. 20 m; 6. 15 m/s; 7. a) 5,2 m/s, b) 1,9 m/s; 8. 1,1 m/s; 9. 0,5 m; 10. $\frac{m_2 v_2^2}{2m_1} (m_1 + m_2)$.
- 3.9** ^(e) 3. 4 m/s, 8 m/s, 6,25; 4. a) 2 kg · m/s, 8 kg · m/s, b) -8 kg · m/s, c) (1/3) J, 8 J, d) -8 J; 5. de 1,5 ori; 6. 0,36; 7. 45 J, 5 J; 8. a) 3,5 m/s, 2 m/s, b) 60°.

Unitatea IV. Elemente de statică

- 4.1** 6. 30°, 1018,4 N; 7. 983 N; 8. 24,0 N, 4,8 N; 9. 2 N.
- 4.2** 6. 550 N; 7. 0,7 m; 8. 112 N; 9. 147 N; 10. 27 kN; 11. 560 N; 12. 1,8 m, 264,6 N; 13. 14°.
- 4.4** * 2. Cu 0,2 m spre capătul opus; 3. La 5,37 cm de la punctul de tangență al sferelor spre centrul sferei din cupru; 4. Luând axa x în direcția AE și axa y în direcția AB cu originea în A , coordonatele centrului de masă sunt: $x_c = 14,1$ cm, $y_c = 5,5$ cm; 5. $\approx 71^\circ 30'$.

Unitatea V. Oscilații și unde mecanice

- 5.1** 9. 8 cm; 10. 3 s; 11. 1,25 Hz; 12. 2 Hz; 13. 0,75 s, 1,3 Hz; 14. 1,2 m; 15. 1 s.
- 5.2** 12. 0,2 m, 0,628 s, $\pi/2$; $x(t) = 0,2 \sin(10t + \pi/2)$ (m); 13. 0,4 kg; 14. 0,25 m; 15. 1,57 s; 16. 0,22 N/m, 6 Hz; 17. 2 mm.
- 5.3** 5. 0,25 s; 6. 3,2 mN, 128 μ J; 7. $x = 2,5 \sin(4t + \pi/4)$ (cm); 8. a) $1/\sqrt{2}$, b) 3.
- 5.6** 7. 300 Hz; 8. 3 m; 9. 10 ms; 10. 0,7 m/s.
- 5.11** 14. a) 10^{-10} W/m², b) $3,2 \cdot 10^{-6}$ W/m², c) 1 W/m², d) 100 W/m²; 15. Diapazonul lungimilor de undă: de la 21,3 m până la 17,0 mm; 16. 13,3 mm, 56,6 mm.
- 5.13** ^(e) 4. $x = 7 \sin(2\pi t + 1,43)$ (cm); 5. 2,2 cm, 1,1 rad.
- 5.14** ^(e) 4. π (rad); 5. $y = 2 \sin(40\pi t - \frac{\pi}{6} x)$ (cm), $\frac{43\pi}{6}$ (rad), -1 cm; 6. $\pi/30$ (m⁻¹).
- 5.16** ^(e) 2. a) 1,5 m; b) 0,75 m; 3. maxim - 1 000 m, minim - 1 250 m; 4. 2 kHz.

