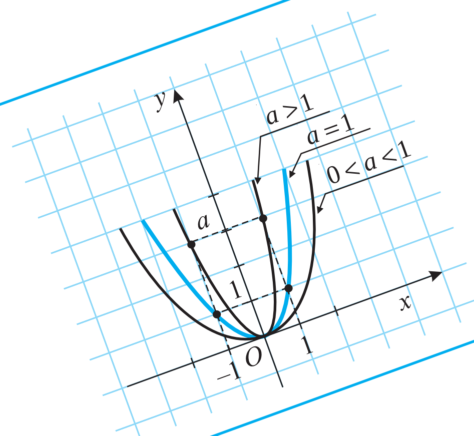
MATEMATICĂ
Manual
Clasa a IX-a

Pagina tehnică

A L G E B R Ă



$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$

Capitolul
1
Mulțimea numerelor reale. Recapitulare și completări

Învățătura e lumina ce-ți face viața mai senină.
Proverb

§ 1. Mulțimea numerelor reale

1.1. Noțiunea de număr real

Lucrați în perechi! **1** Examinați schema, apoi substituiți fiecare casetă cu un element sau cu o submulțime a mulțimii $A=\{-5;\ -21;\ -\sqrt{3};\ 0;\ 2;\ 3\frac{1}{4};\ \sqrt{7};\ 5{,}8;\ 9\}$.

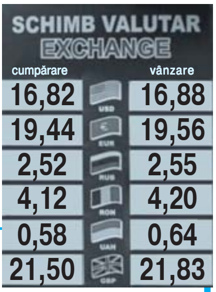
$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\boxed{\mathbb{N}} \arrow[r, "\substack{+\text{ rezultatele}\\ \text{tuturor scăderilor}}"] \arrow[d, "\substack{+\text{ rezultatele tuturor}\\ \text{împărțirilor}}"] & \boxed{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\substack{+\text{ rezultatele tuturor}\\ \text{împărțirilor}}"] & \boxed{\mathbb{I}} \arrow[d, "\substack{+\text{ toate numerele}\\ \text{raționale}}"] \\
\boxed{\mathbb{Q}_+} \arrow[r, "\substack{+\text{ rezultatele}\\ \text{tuturor scăderilor}}"'] & \boxed{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\substack{+\text{ toți radicalii și}\\ \text{celelalte numere}}"'] & \boxed{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

Model: $\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\{2;\ 9\}\subset\mathbb{N}$

$\square\in\mathbb{Z}$ $\square\subset\mathbb{Z}$ $\square\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ $\square\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$\square\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ $\square\subset\mathbb{Q}$ $\square\in\mathbb{Q}_+$ $\square\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

2 Substituiți fiecare casetă cu un element sau cu o submulțime a mulțimii numerelor din tabelul „Schimb valutar”.



$\square\in\mathbb{R}$ $\square\in\mathbb{Q}$ $\square\subset\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$

$\square\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ $\square\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ $\square\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$

Ne amintim

Notații: $\mathbb{N}=\{0, 1, 3, 4, \ldots\}$ – mulțimea numerelor naturale.
$\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ – mulțimea numerelor naturale nenule.
$\mathbb{Z}=\{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ – mulțimea numerelor întregi.
$\mathbb{Q}=\{x \mid x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ – mulțimea numerelor raționale.
$\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x \mid x$ – număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale$\}$ – mulțimea numerelor iraționale.
$\mathbb{R}=\{x \mid x$ – număr rațional sau irațional$\}$ – mulțimea numerelor reale.
Sunt adevărate relațiile: $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{I}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$.
$\mathbb{R}^*$ – mulțimea numerelor reale nenule;
$\mathbb{R}^*_+$ – mulțimea numerelor reale pozitive;
$\mathbb{R}^*_-$ – mulțimea numerelor reale negative.

• Scrieți sub formă de număr zecimal fracția $\frac{33}{18}$.

Rezolvare:

Efectuăm împărțirea și obținem: $\frac{33}{18}=1{,}8(3)$.

$1{,}8(3)$ este un număr zecimal periodic mixt.

Definiții

- Numerele zecimale periodice a căror perioadă urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice simple**.
- Numerele zecimale periodice a căror perioadă nu urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice mixte**.

Aplicăm

• Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal: a) 0,(26); b) 25,2(43).

Rezolvare:

a) Fie $x=0,(26)$.

Atunci $100x=26,(26)=26+x \Leftrightarrow 100x-x=26 \Leftrightarrow x=\frac{26}{99}$.

Răspuns: $0,(26)=\frac{26}{99}$.

În general, $0,(\overline{a_1a_2...a_n})=\frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n\text{ cifre}}}$, unde a_1, a_2, ..., a_n sunt cifre.

b) ***Metoda I***. Fie $x=25{,}2(43)$.

Atunci $10x=252,(43)=252+0,(43)=252+\frac{43}{99}=\frac{24\,991}{99} \Leftrightarrow x=\frac{24\,991}{990}=25\frac{241}{990}$.

Metoda II. $25{,}2(43)=25+\frac{243-2}{990}=25\frac{241}{990}$.

Răspuns: $25{,}2(43)=25\frac{241}{990}$.

În general, $0,\overline{a_1a_2...a_n(b_1b_2...b_m)}=\frac{\overline{a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m}-\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{m\text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{n\text{ cifre}}}$.

Rețineți

Un număr real poate fi scris sub forma:

a) unui număr zecimal cu un număr finit de zecimale;

b) unui număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale;

c) unui număr zecimal periodic cu perioada diferită de 9.

1.2. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

• Reprezentați numărul $\sqrt{2}$ pe axa numerelor:

a) folosind aproximațiile lui zecimale; b) geometric (cu ajutorul riglei și compasului).

Rezolvare:

Cum $\sqrt{2}\approx 1{,}414$, rezultă că $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Obținem următoarea reprezentare aproximativă a numărului $\sqrt{2}$ pe axa numerelor (fig. 1):

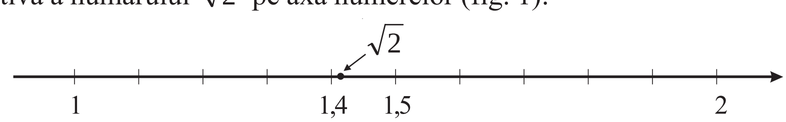


Fig. 1

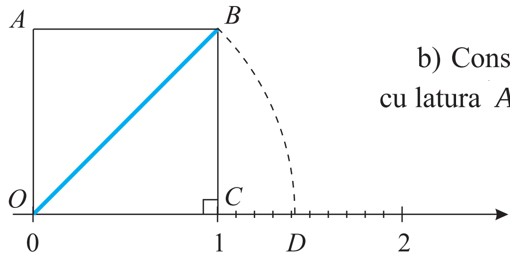


Fig. 2

b) Construim pe axa numerelor pătratul $OABC$ cu latura $AB=1$ (fig. 2).

Aplicând teorema lui Pitagora triunghiului OCB ($m(\angle C)=90°$), obținem $OB=\sqrt{2}$. Construim, cu ajutorul compasului, pe axa numerelor segmentul OD, astfel încât $OD=OB=\sqrt{2}$. Atunci punctul D are coordonata $\sqrt{2}$.

Exercițiu Determinați, aplicând în continuare teorema lui Pitagora în figura 2, punctele cu coordonatele $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ ş.a.m.d.

De regulă, numerele iraționale se reprezintă pe axa numerelor folosind aproximările lor zecimale.

Rețineți

Fiecărui număr real a îi corespunde un punct A al axei numerelor şi, reciproc, fiecărui punct A al axei numerelor îi corespunde un număr real a. De aceea vorbim despre punctele axei numerelor ca despre numere reale, şi invers.
Numărul a se numeşte ***coordonata*** punctului A; se notează $A(a)$.

Folosind reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, pot fi rezolvate diverse probleme. Una dintre ele este compararea numerelor reale. (O altă modalitate de comparare a numerelor reale va fi examinată în secvența 2.2.)

De exemplu, dacă numerele reale a şi b sunt respectiv coordonatele punctelor A şi B ale axei numerelor şi $\overrightarrow{AB}$ are sensul axei, atunci $a<b$ (fig. 3).

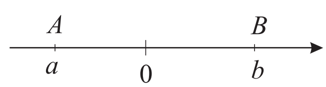


Fig. 3

Rețineți

Dintre două numere reale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este numărul situat în dreapta celuilalt.

Aplicăm

- Comparați numerele:

a) $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}$ şi $-\sqrt{2}$.

Rezolvare:

a) Deoarece $\sqrt{2}\approx 1{,}4$ şi $\sqrt{3}\approx 1{,}7$, iar $1{,}4<1{,}7$, obținem $\sqrt{2}<\sqrt{3}$.

Răspuns: $\sqrt{2}<\sqrt{3}$.

b) Cum $\sqrt{2}>0$, iar $-\sqrt{2}<0$, obținem $\sqrt{2}>-\sqrt{2}$.

Răspuns: $-\sqrt{2}<\sqrt{2}$.

Observație Numerele $\sqrt{2}$ şi $-\sqrt{2}$ sunt numere reale opuse, adică punctele $D(\sqrt{2})$ şi $D'(-\sqrt{2})$ ale axei numerelor sunt simetrice față de originea ei, şi invers, coordonatele punctelor $D(\sqrt{2})$ şi $D'(-\sqrt{2})$, simetrice față de originea O, sunt numere reale opuse (fig. 4).

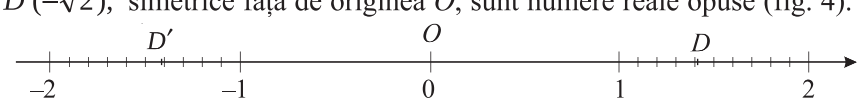


Fig. 4

Rețineți

Numere reale opuse sunt numerele reale situate pe axa numerelor de părți diferite față de origine şi la distanțe egale de ea.
Numere reale opuse sunt numerele reale de forma a şi $-a$.

1.3. Modulul numărului real

Lucrați în perechi!

- Explicitați modulul:

a) $|3-\sqrt{2}|$; b) $|1-\sqrt{3}|$; c) $\{x\in\mathbb{R} \,\big|\, |x|\le 3\}$; d) $\left\{x\in\mathbb{R} \,\Big|\, |x|>\frac{1}{3}\right\}$.

Rezolvare:

a) $|3-\sqrt{2}|=3-\sqrt{2}$, deoarece $3>\sqrt{2}$;

b) $|1-\sqrt{3}|=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$, deoarece $1<\sqrt{3}$;

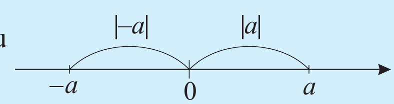
c) $\{x\in\mathbb{R} \,\big|\, |x|\le 3\}=\{x\in\mathbb{R} \,|\, x\in[-3, 3]\}$;

d) $\left\{x\in\mathbb{R} \,\Big|\, |x|>\frac{1}{3}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,\Big|\, x\in\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)\right\}$.

Rețineți

Modulul sau ***valoarea absolută*** a unui număr real a este:

$|a|=\begin{cases} a, & \text{dacă } a\ge 0 \\ -a, & \text{dacă } a<0 \end{cases}$ sau $|a|=\max\{-a, a\}$, sau



distanța de la a la 0 pe axă.

Proprietăți ale modulului unui număr real

1° $|a|\ge 0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, şi $|a|=0$ dacă şi numai dacă $a=0$.

2° $|a|\ge a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

3° $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$, oricare ar fi $a, b\in\mathbb{R}$.

4° $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$.

5° $|a|^2=|a^2|=|-a|^2=a^2$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

Aplicăm

- Explicitați modulul utilizând proprietățile lui şi aduceți la forma cea mai simplă:

a) $|3-\sqrt{2}|\cdot|3+\sqrt{2}|$;

b) $|1-\sqrt{7}|\cdot(1+\sqrt{7})$;

c) $|x+y|:(x+y)^2$.

Rezolvare:

a) $|3-\sqrt{2}|\cdot|3+\sqrt{2}|=|(3-\sqrt{2})\cdot(3+\sqrt{2})|=|9-2|=7$;

b) $|1-\sqrt{7}|\cdot(1+\sqrt{7})=-(1-\sqrt{7})\cdot(1+\sqrt{7})=-(1-7)=6$;

c) $|x+y|:(x+y)^2=|x+y|\cdot\frac{1}{|x+y|^2}=\frac{1}{|x+y|}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie mulțimile:

1) $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; 2) $\mathbb{Q}_+\setminus\mathbb{N}$; 3) $\mathbb{Q}_-\setminus\mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}$;
5) $\mathbb{R}^*_-\setminus\mathbb{Q}$; 6) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_+$; 7) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{I}$.

a) Aflați elementele mulțimii $\{-1{,}4;\ \sqrt{5};\ 7{,}(2);\ -21\frac{1}{4};\ 0{,}18;\ 2010;\ \sqrt{21}\}$ care aparțin fiecăreia din mulțimile 1) – 7).

b) Aflați cardinalele mulțimilor 1) – 7), obținute după rezolvarea sarcinii a).

2. Fie numerele 12; $\sqrt{16}$; $3,(7)$; $-38\frac{1}{2}$; 2011; $-\sqrt{13}$; 0; $6\sqrt{5}$; π. Determinați care dintre aceste numere sunt raționale și care – iraționale.

3. *Lucrați în perechi!*

1) Scrieți ca număr zecimal fracția:

a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{51}{15}$; c) $\frac{131}{27}$; d) $\frac{210}{198}$.

2) Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut.

4. *Investigați!* Fie numerele:

a) 0,(3); b) 2,1(6); c) 5,(738);
d) 17,0(18); e) 83,(685); f) 70,13(18).

Determinați care dintre numerele zecimale periodice date sunt numere zecimale periodice simple și care – numere zecimale periodice mixte.

5. Reprezentați pe axa numerelor punctele:

$$A(-7),\ B\left(\frac{1}{2}\right),\ C(-1{,}25),\ D\left(3\frac{1}{4}\right),\ E(7).$$

6. Completați fiecare casetă cu un număr din mulțimea $\left\{\frac{1}{4};\ 0{,}75;\ 0{,}(3);\ 5{,}5\right\}$, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

$\frac{3}{4}=$ ▢; $\frac{1}{3}=$ ▢; $0{,}25=$ ▢; $5\frac{1}{2}=$ ▢.

7. *Lucrați în perechi!* Bunicul le spune nepoților: „Am pentru voi 130 de nuci. Împărțiți-le în două părți, astfel încât partea mai mică, fiind mărită de 4 ori, să fie egală cu partea mai mare micșorată de 3 ori.” Cum să procedeze nepoții?

Formăm abilitățile și aplicăm

8. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația și determinați ce tip de numere, raționale sau iraționale, sunt soluțiile ei:

a) $3\sqrt{2}x+7=0$; b) $16x-3(x+1)=5x$;
c) $2{,}5(x-4)-6x=3-x$; d) $x^2-3x-10=0$;
e) $2x^2+7x-8=0$; f) $-x^2+10x+2=0$.

9. Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal:

a) 0,(18); b) 3,(2); c) 6,1(8);
d) 5,12(18); e) 25,1(378).

10. *Investigați!* Utilizând axa numerelor, completați cu unul dintre semnele „<”, „>”, „=”:

a) $1+\sqrt{7}$ ▢ $2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{36}$ ▢ $-6{,}123...$;
c) $3{,}78$ ▢ $\sqrt{11}$; d) $-\frac{1}{3}$ ▢ $-0{,}(33)$.

11. Explicitați modulul:

a) $|1-\sqrt{7}|$; b) $|-\sqrt{3}-\sqrt{2}|$;
c) $|8-\sqrt{49}|$; d) $|(3-\sqrt{2})^2|$.

12. *Lucrați în grup!* Explicitați modulul:

a) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|\le 7\}$; b) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|\le 0\}$;
c) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|>0\}$; d) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|\ge\sqrt{5}\}$.

13. Reprezentați pe axa numerelor mulțimile obținute la exercițiul **12** în urma explicitării modulului.

14. *Investigați!* Se dau două vase, de capacitatea 5 *l* și 7 *l*. Cum putem obține 4 *l* de apă folosind doar aceste două vase?

15. *Lucrați în perechi!* Stafidele obținute la uscarea strugurilor reprezintă 32% din cantitatea inițială a acestora. Din ce cantitate de struguri s-au obținut 8 kg de stafide?

16. (*EG, 2018). Din 3 litri de lapte se obțin 600 grame de brânză. Determinați câte kilograme de brânză se obțin din 5 litri de lapte.

*EG, 2018 – Examenul de absolvire a gimnaziului din anul 2018.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

17. *Investigați!* Cercetați dacă este rațional numărul:
a) $\sqrt{8}$; b) 7,2(15); c) $1-\sqrt{5}$;
d) $\sqrt{225}$; e) $\sqrt{13}$; f) $\sqrt{125}$.

18. Construiți pe axa numerelor, cu ajutorul riglei și compasului, punctul a cărui coordonată este numărul irațional:
a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{17}$; c) $-\sqrt{17}$; d) $-\sqrt{11}$.

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|3x-7|=8$; b) $|2x^2+17x+658|=-2\sqrt{19}$;
c) $|x|\cdot|x-3|=4$; d) $|2x(x-0,5)|=3$.

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|3x-1|=|1-x|$; b) $|2+x|=|5x-3|$;
c) $2|x|=|x-3|+2$; d) $|2x-1|=|x+5|-2$.

§ 2. Operații cu numere reale

2.1. Proprietăți ale operațiilor cu numere reale

Ne amintim

Proprietăți ale adunării și înmulțirii numerelor reale

1° ***Asociativitatea***: $a+(b+c)=(a+b)+c$ pentru orice $a, b, c\in\mathbb{R}$.	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ pentru orice $a, b, c\in\mathbb{R}$.
2° ***Comutativitatea***: $a+b=b+a$ pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.	$a\cdot b=b\cdot a$ pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.
3° 0 ***este element neutru pentru adunare***: $a+0=0+a=0$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.	1 ***este element neutru pentru înmulțire***: $1\cdot a=a\cdot 1=a$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.
4° Pentru orice număr real a există ***opusul*** său, numărul $-a$, astfel încât $a+(-a)=0$.	Pentru orice număr real nenul a există ***inversul*** său, numărul $\frac{1}{a}$, astfel încât $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$.
5° —	$a\cdot 0=0\cdot a=0$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$.

6° ***Distributivitatea înmulțirii față de adunare*** (***scădere***):
$$a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c \text{ pentru orice } a, b, c\in\mathbb{R}.$$

Observații

1. $a-b=a+(-b)$ pentru orice $a, b\in\mathbb{R}$.
2. $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$ pentru orice $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$.

Rețineți

Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor în mulțimea $\mathbb{R}$

I. Într-o expresie fără paranteze, cu operații de diferite ordine, se efectuează (în ordinea în care sunt scrise) întâi extragerea rădăcinii pătrate și ridicarea la putere, apoi înmulțirea și împărțirea și, la sfârșit, adunarea și scăderea.

II. Într-o expresie cu paranteze se efectuează întâi operațiile din paranteze, respectându-se regulile precedente.

2.2. Compararea numerelor reale

- Comparați numerele:

a) $\frac{2}{3}$ și $\frac{3}{4}$; b) $\sqrt{2}$ și 1,3; c) $4-\sqrt{5}$ și -3.

Rezolvare:

a) $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ → deoarece $\frac{2}{3}=0,(6)$, $\frac{3}{4}=0,75$ și $0,(6)<0,75$;

b) $\sqrt{2}>1,3$ → deoarece $\sqrt{2}\approx 1,4$ și $1,4>1,3$;

c) $4-\sqrt{5}>-3$ → deoarece $\sqrt{5}\approx 2,2$; deci, $4-\sqrt{5}>0$, iar $-3<0$.

Atenție!

Oricare două numere reale pot fi comparate, adică oricare ar fi $a, b\in\mathbb{R}$, avem $a<b$ sau $a=b$.
Dacă $a=b$ sau $a<b$ (sau $a>b$), scriem $a\le b$ (sau $a\ge b$).

Aplicăm

- Scrieți în ordine crescătoare numerele $\sqrt{7}$, 5, $2\sqrt{2}$, -3.

Rezolvare:

Avem $\sqrt{7}\approx 2,6$, $2\sqrt{2}\approx 2,8$.

Deci, $2\sqrt{2}>\sqrt{7}$.

Cum $-3<\sqrt{7}<2\sqrt{2}<5$, obținem ordonarea cerută: -3, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{2}$, 5.

Rețineți

Legătura dintre relația de ordine „$\le$” și operațiile de adunare și înmulțire în mulțimea $\mathbb{R}$ se exprimă prin următoarele ***proprietăți***:

1° Dacă $a\le b$ și $c\in\mathbb{R}$, atunci $a+c\le b+c$ pentru orice $a, b, c\in\mathbb{R}$.

2° Dacă $a\le b$ și $c\le d$, atunci $a+c\le b+d$ pentru orice $a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

3° Dacă $a\le b$ și $c>0$, atunci $ac\le bc$ pentru orice $a, b, c\in\mathbb{R}$.

4° Dacă $a\le b$ și $c<0$, atunci $ac\ge bc$ pentru orice $a, b, c\in\mathbb{R}$.

5° Dacă $a\le b, c\le d$ și $a, b, c, d\in\mathbb{R}_+^*$, atunci $ac\le bd$ și $\frac{a}{d}\le\frac{b}{c}$.

Observație

Proprietăți similare pot fi obținute înlocuind semnul „$\le$” cu oricare dintre semnele „$<$”, „$\ge$”, „$>$”.

Rețineți

Numerele reale pot fi comparate folosind aproximările lor zecimale sau reprezentările lor pe axa numerelor.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. *Lucrați în perechi!* Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $3\sqrt{2}(2+\sqrt{2})-5(3{,}5-\sqrt{6})+11:(7-1{,}5)$;

b) $\frac{2}{5}\cdot 0{,}25+78:4-8\sqrt{5}:\sqrt{5}-3\cdot 7\sqrt{2}$.

2. Rotunjiți, utilizând calculatorul de buzunar, până la miimi:

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{2}$; d) $3\sqrt{5}$.

3. Comparați numerele:

a) $\frac{5}{7}$ și $\frac{3}{4}$; b) $\sqrt{7}$ și 2,65;

c) $3-\sqrt{2}$ și 1,7; d) $1+\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{2}$.

4. Scrieți în ordine crescătoare:

$3\sqrt{2}$; $-3,(56)$; $2\sqrt{3}$; $1+\sqrt{2}$; $2,(15)$; $-2\frac{1}{5}$; $2-\sqrt{5}$.

5. *Investigați!* Legumele crude (100 g) conțin 27 mg de acid ascorbic (vitamina C). Aceleași legume, fierte, conțin 18 mg de acid ascorbic. Calculați, în procente, pierderea vitaminei C în timpul fierberii.

6. Pentru a prepara o prăjitură de ciocolată (6 porții) se folosesc următoarele ingrediente: 250 g de unt, 200 g de zahăr, 300 g de ciocolată, 6 ouă și 3 linguri de făină. Care sunt cantitățile necesare pentru fiecare ingredient în cazul în care se prepară 4 porții?

7. a) Copiați și completați tabelul:

a	b	c	$a\cdot b$	$b\cdot a$	$a\cdot(b\cdot c)$	$(a\cdot b)\cdot c$	$a\cdot 1$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{c}\cdot c$
5	–4	2							
$\frac{1}{3}$	6	–7							
$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$5\sqrt{3}$							
0,3	$\frac{\pi}{3}$	$-\pi$							

b) Numiți proprietățile înmulțirii utilizate la completarea tabelului.

8. a) Copiați și completați tabelul:

x	y	z	$x+y$	$y+x$	$x\cdot(y-z)$	$xy-xz$	$x^{-2}\cdot y^{-2}\cdot z^{-2}$	$(xyz)^{-2}$
$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$						
10	–0,25	$\frac{1}{4}$						
$\sqrt{8}$	$-\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$						
2,5	–9	$\sqrt{3}$						

b) Numiți proprietățile operațiilor cu numere reale utilizate la completarea tabelului.

9. Pe eticheta unei sticluțe cu mixtură este scris: 40 ± 3 ml. Ce puteți spune despre cantitatea de mixtură din sticluță?

10. Scrieți ca sumă, diferență, produs și cât de două numere reale, diferite de 0 și 1, numărul:
a) $3\sqrt{7}$; b) $8+\sqrt{5}$; c) $-2\sqrt{3}$; d) $-7{,}5$; e) 18; f) $\sqrt{6}-\sqrt{11}$.

Formăm abilitățile și aplicăm

11. De câte ori la cel mai mare număr de o cifră trebuie adăugat cel mai mare număr de două cifre pentru a obține cel mai mare număr de trei cifre?

12. Suma, produsul și câtul căror numere reale sunt egale între ele?

13. Completați șirul 12; 18; 27; 40,5; ▢; ▢.

14. Costul biletului pentru o călătorie cu vaporul este de 8,25 € pentru maturi și de 2,75 € pentru copii. Utilizând datele din imagine calculați câți lei s-au plătit pentru călătorie, dacă în cursul valutar 1 € = 19,4 lei.

15. Efectuați:
a) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$; b) $(2\sqrt{7}+1)^2$; c) $(3-\sqrt{7})^2$; d) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})^2$.

16. Efectuați:
a) $(2-\sqrt{3})^3$; b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3$; c) $(3\sqrt{5}+1)^3$; d) $(2+\sqrt{3})^3$.

17. Calculați, utilizând calculatorul de buzunar, prin rotunjire până la sutimi:
a) $3\sqrt{7}+2\sqrt{5}$; b) $7\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; c) $-3\sqrt{2}-5$; d) $3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

18. ***Investigați!*** Stabiliți legitatea și aflați numărul omis:

$\sqrt{3}-2\sqrt{2}$	2	$11-4\sqrt{6}$
$1+\sqrt{5}$	3	?

19. Prețul unui televizor s-a majorat cu 20%, apoi, peste o lună, cu încă 20%. Cu câte procente s-a majorat prețul inițial al televizorului?

20. ***Lucrați în perechi!*** La copierea exercițiului $20:5\cdot 2+6^2$ un elev a uitat să pună paranteze. Restabiliți parantezele, dacă se știe că răspunsul trebuie să fie numărul:
a) 38; b) 196; c) 152.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

21. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:
a) $\sqrt{(2-3\sqrt{3})^2}+2|3-\sqrt{13}|-7{,}5(4-\sqrt{8})^2+6{,}4:(5-1{,}8)$;
b) $|7-2\sqrt{3}|+|1-3\sqrt{3}|^2-6(\sqrt{3}+8)-\sqrt{(2-7\sqrt{3})^2}$.

22. Efectuați:
a) $(a-b+c)^2$; b) $(a-b-c)^2$; c) $(a+b+c)^2$.

23. Calculați:
a) $7,(15)+2,(18)-5,(23)+11,(20)$; b) $-5{,}2(7)+6{,}1(3)-3{,}5(3)+2{,}2(2)$.

24. Scrieți numărul 34 000 ca diferența pătratelor a două numere naturale.

§ 3. Puteri și radicali

3.1. Rădăcina pătrată a unui număr real și proprietățile ei. Recapitulare și completări

Ne amintim • Calculați: a) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; b) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Rezolvare:

a) $\sqrt{6\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ $\longrightarrow$ deoarece $\frac{5}{2}\geq 0$ și $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$;

b) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{7}+3^2}=\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}=$

$=|\sqrt{7}-3|=3-\sqrt{7}$ $\longrightarrow$ deoarece $(3-\sqrt{7})\geq 0$ și $(3-\sqrt{7})^2=16-6\sqrt{7}$.

Definiție

Rădăcină pătrată a unui număr real nenegativ *a* (sau **radical de ordinul doi din *a***) se numeşte numărul real nenegativ b al cărui pătrat este a.

Rădăcina pătrată a numărului real nenegativ a se notează $\sqrt{a}$.

Rețineți

Proprietăți ale rădăcinii pătrate

1° Dacă a este un număr real, atunci $\sqrt{a^2}=|a|$.

2° Dacă a și b sunt numere reale nenegative, atunci $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

3° Dacă a este un număr real nenegativ, iar b – un număr real pozitiv, atunci $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

4° Dacă a este un număr real, iar b – un număr real nenegativ, atunci $\sqrt{a^2b}=|a|\cdot\sqrt{b}$.

Aplicăm

• Calculați $\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}$.

Rezolvare:

$\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{3,6}{3}}\cdot\sqrt{\frac{48}{10}}=$ $\longrightarrow$ aplicăm proprietatea 3°

$=\sqrt{\frac{3,6\cdot 48}{10\cdot 3}}=\sqrt{0,36}\cdot\sqrt{16}=$ $\longrightarrow$ aplicăm proprietatea 2°

$=0,6\cdot 4=2,4.$

• Completați casetele. Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}$, dacă $a<0$, $b>0$.

Rezolvare:

$\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}=\frac{3b^2}{5a}\cdot\frac{\sqrt{50a^2}}{\sqrt{81b^2}}=$ $\longrightarrow$ aplicăm proprietatea $\boxed{}$

$=\frac{3b^2\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{a^2}}{5a\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt{b^2}}=$ $\longrightarrow$ aplicăm proprietatea $\boxed{}$

$=\frac{3b^2\cdot 5\sqrt{2}\cdot|a|}{5a\cdot 9\cdot|b|}=$ $\longrightarrow$ aplicăm proprietatea $\boxed{}$

$=\frac{b^2\cdot(-a)\cdot\sqrt{2}}{a\cdot 3b}=-\frac{b\sqrt{2}}{3}$ $\longrightarrow$ deoarece $a<0$, $b>0$.

Investigăm

- Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{14}{3\sqrt{7}}$; b) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}$.

Rezolvare:

a) $\frac{14}{3\sqrt{7}}=\frac{14\cdot\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=$ → amplificăm raportul cu $\sqrt{7}$

$=\frac{14\sqrt{7}}{3\cdot 7}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$;

b) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})}=$ → amplificăm raportul cu expresia conjugată numitorului: $4+\sqrt{10}$

$=\frac{3(4+\sqrt{10})}{16-10}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{6}=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$.

Definiție

Expresiile $a+\sqrt{b}$ și $a-\sqrt{b}$, $a, b\in\mathbb{R}$, $b>0$, se numesc **expresii conjugate**.

Rețineți

Raționalizare a numitorului unui raport se numeşte transformarea care elimină radicalii de la numitorul acestuia.

Generalizăm

- Fie E o expresie. Raționalizarea numitorului unui raport poate fi efectuată amplificând raportul de tipul:

1. $\frac{E}{a\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}_+^*$, cu $\sqrt{b}$;
2. $\frac{E}{a\pm\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}_+^*$, cu expresia conjugată numitorului raportului dat.

3.2. Puteri cu exponent întreg. Proprietăți

- Calculați: a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; b) $(1{,}2)^0$; c) 5^{-3}.

Rezolvare:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}$; → $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ factori}}$

b) $(1{,}2)^0=1$; → $a^0=1,\ a\in\mathbb{R}^*$

c) $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$. → $a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\in\mathbb{R}^*,\ n\in\mathbb{Z}^*$

Definiția puterilor cu exponent întreg

Pentru $a\in\mathbb{R}^*$ și $n\in\mathbb{N}^*$, $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n \text{ factori}}$.

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a\in\mathbb{R}^*$, $n\in\mathbb{Z}^*$. $a^0=1$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Pentru $a=0$ și $n\in\mathbb{N}^*$, $0^n=0$.

Observație

Expresia 0^0 nu are sens.

Rețineți

Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg

Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{Z}$:

1° $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$; 2° $\dfrac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$; 3° $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;

4° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; 5° $(a^k)^m = a^{k \cdot m}$.

Aplicăm

- Calculați $\dfrac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4}$.

Rezolvare:

$$\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4} = 3^{-3+2-4} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$$

- Aduceți la forma cea mai simplă $\left(\dfrac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2a^2}{5b^3}\right)^3$.

Rezolvare:

$$\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3 = \frac{2^{-2} \cdot a^{-4}}{5^{-2} \cdot b^{-10}} \cdot \frac{2^3 \cdot a^6}{5^3 \cdot b^9} = \frac{2^{-2+3} \cdot a^{-4+6}}{5^{-2+3} \cdot b^{-10+9}} = \frac{2a^2}{5b^{-1}} = \frac{2a^2 b}{5}.$$

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Calculați:

a) $\sqrt{10 \cdot 40}$; b) $\sqrt{\dfrac{2}{32}}$; c) $\sqrt{0{,}16 \cdot 25 \cdot 1{,}69}$;

d) $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$; e) $\sqrt{3^4}$; f) $\sqrt{\dfrac{2^6}{5^4}}$.

2. *Investigați!* Aflați valorile numărului real a pentru care este adevărată egalitatea:

a) $\sqrt{(a-2)^2} = a-2$; b) $\sqrt{\dfrac{a^2}{4}} = -\dfrac{a}{2}$;

c) $\sqrt{\dfrac{3}{a^2+2a+1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{a+1}$.

3. *Lucrați în perechi!* Introduceți factorul sub radical:

a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{27}$; b) $a\sqrt{3},\ a<0$; c) $(b-1)\sqrt{b},\ b \ge 1$.

4. *Lucrați în perechi!* Scoateți factorul de sub radical:

a) $\sqrt{48}$; b) $\sqrt{98}$;

c) $\sqrt{5a^4}$; d) $\sqrt{7(2-a)^2},\ a<2$.

5. Scrieți ca putere cu baza 10: 1000; 100; 10; 1; $\dfrac{1}{10}$; $\dfrac{1}{100}$; 0,0001.

6. Calculați: a) $\dfrac{3^{-4}}{3^{-7}}$; b) $5^{-11} \cdot 5^9$;

c) $\left(\dfrac{3}{11}\right)^4 \cdot \left(\dfrac{1}{11}\right)^{-3}$; d) $6^2 \cdot 24^{-2}$.

7. Efectuați: a) $2a^{-3} \cdot 5a^5$; b) $\dfrac{7x^{-3}}{28x^{-4}}$;

c) $\left(\dfrac{1}{2}b^{-3}\right)^{-2}$; d) $\left(\dfrac{1}{10}y^2\right)^{-3}$.

Formăm abilitățile și aplicăm

8. Calculați:

a) $10\sqrt{1{,}44} + \sqrt{48} - \sqrt{12} - \dfrac{6}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{0{,}16}$; b) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2} - \dfrac{1}{\sqrt{7}+2}$.

9. *Lucrați în grup!* Raționalizați numitorul raportului:

a) $\dfrac{7}{3\sqrt{21}}$; b) $\dfrac{6}{5\sqrt{10}}$; c) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$; d) $\dfrac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$; e) $\dfrac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$.

10. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\sqrt{3}(\sqrt{12}-2\sqrt{27})$;

b) $\sqrt{48}-2\sqrt{3}(2-5\sqrt{12})$;

c) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$;

d) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}$.

11. Simplificați raportul:

a) $\dfrac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$; b) $\dfrac{3+\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+a}$;

c) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}$; d) $\dfrac{2\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}}$.

12. Calculați:

a) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 32^{-2}}$; b) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-25}\cdot 25^{-6}\cdot 125^{-4}$;

c) $\dfrac{20^{-4}\cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$; d) $\dfrac{(-3)^{-4}\cdot 27^{10}}{81^{9}\cdot 9^{-6}}$;

e) $(10^{-2}-1)(10^{-2}+1)$; f) $\dfrac{(2^3)^5\cdot(2^{-6})^2}{4^2}$.

13. ***Lucrați în perechi!*** Calculați:

a) $(2{,}5\cdot 10^{-3})\cdot(8{,}4\cdot 10^{4})$;

b) $(4{,}5\cdot 10^{-2}):(1{,}5\cdot 10^{-3})$;

c) $(3{,}6\cdot 10^{5})\cdot[(2{,}4)^{-1}\cdot 10^{-2}]$;

d) $(6{,}4\cdot 10^{-4}):(1{,}6\cdot 10^{-3})$.

14. Masa Soarelui este de aproximativ $0{,}2\cdot 10^{31}$ kg. De câte ori este mai mare masa Soarelui decât masa Pământului, dacă se ştie că masa Pământului este de aproximativ $0{,}5974\cdot 10^{25}$ kg?

15. Distanța medie de la Pământ la Soare este de $0{,}1496\cdot 10^{9}$ km. În cât timp o rază de lumină parcurge această distanță, dacă viteza luminii este de aproximativ $0{,}3\cdot 10^{9}$ m/s?

16. Calculați aria pătratului latera căruia este egală cu:

a) $2\sqrt{5}$ cm; b) 12 dm; c) $(1+\sqrt{3})$ mm; d) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ mm.

17. Calculați aria dreptunghiului cu dimensiunile:

a) $(5-\sqrt{2})$ cm şi $(5+\sqrt{2})$ cm; b) $(\sqrt{7}+1)$ cm şi $(\sqrt{7}-1)$ cm.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

18. Calculați:

a) $\sqrt{2{,}5\cdot 10^{5}}$; b) $\sqrt{4{,}9\cdot 10^{-3}}$;

c) $\sqrt{1{,}6\cdot 10^{7}}$; d) $\sqrt{8{,}1\cdot 10^{-5}}$.

19. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}+\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2$;

b) $\left(\sqrt{2\sqrt{5}+4}-\sqrt{2\sqrt{5}-4}\right)^2$.

20. ***Investigați!***

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}=3$;

b) $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$;

d) $1-2\sqrt{7}=\sqrt{29-4\sqrt{7}}$.

21. Simplificați raportul $(n\in\mathbb{N})$:

a) $\dfrac{2^{n+1}\cdot 3^{n-1}}{6^n}$; b) $\dfrac{14^n}{2^{n-2}\cdot 7^{n+2}}$;

c) $\dfrac{12^n}{3^{n-1}\cdot 2^{2n+1}}$; d) $\dfrac{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-1}}{100^n}$.

22. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{8-\sqrt{15}}$;

b) $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

c) $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

Indicație. Aplicați formulele radicalilor compuşi:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

$a,\ b,\ (a^2-b)\in\mathbb{R}_+$.

23. ***Lucrați individual!*** **Investigație.** *Puterile în diverse domenii.*

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Efectuați:

a) $6{,}5\cdot(1{,}2-4{,}(3))-9{,}9:3+7{,}4\cdot5-450$;

b) $(7-\sqrt{2})(5+\sqrt{3})-3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+10(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

2. *Lucrați în perechi!*

1) Scrieți ca număr zecimal fracția:

a) $\frac{16}{23}$; b) $\frac{28}{105}$; c) $\frac{65}{302}$; d) $\frac{178}{6\,004}$.

2) Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut.

3. Comparați:

a) $\sqrt{7}$ și $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{63}$ și $\sqrt{54}$;

c) $\sqrt{23}$ și $\sqrt{103}$; d) $\sqrt{17}$ și 4,5;

e) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ și $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$; f) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ și $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$.

4. Explicitați modulul:

a) $|7{,}(5)|$; b) $|-3\sqrt{7}|$;

c) $|2-3\sqrt{2}|$; d) $|8-\sqrt{66}|$.

5. Scrieți în ordine crescătoare:

a) $7{,}2(3)$; $\sqrt{7}$; $-3\sqrt{5}$; $7{,}1$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{25}$.

b) $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{10}$; $5\sqrt{2}$; 7.

6. Utilizând calculatorul de buzunar, calculați rotunjind până la miimi:

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{11}$; c) $\sqrt{29}$; d) $\sqrt{37}$.

7. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $a^8\cdot(a^{-4})^3$, $a\in\mathbb{R}^*$; b) $(c^{-3}\cdot c^8)^{-2}$, $c\in\mathbb{R}^*$;

c) $\left(\frac{m^3}{m^{-5}}\right)^{-2}\cdot m^{-4}$, $m\in\mathbb{R}^*$; d) $\left(\frac{3x^3}{x^{-2}}\right)^{-1}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

8. *Lucrați în perechi!* Dintr-un număr de două cifre, înmulțit cu un număr de o cifră, se scade un număr de o cifră și se obține 1. Care sunt aceste numere?

9. Alina avea o bancnotă de 50 lei, una de 10 lei, două de 1 leu și 3 monede de 50 bani. După ce a făcut cumpărături, i-au rămas 20% din întreaga sumă. Cât a cheltuit Alina?

Formăm abilitățile și aplicăm

10. *Lucrați în perechi!* Scrieți ca sumă, diferență, produs și cât de două numere reale, diferite de 0 și 1, numărul:

a) $-2\sqrt{11}$; b) $2-\sqrt{3}$;

c) $1+3\sqrt{7}$; d) $7\sqrt{13}$.

11. Efectuați:

a) $(3-2\sqrt{5})^2$; b) $(2+\sqrt{7})^2$;

c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$; d) $(5+\sqrt{5})^3$.

12. Calculați rotunjind până la zecimi soluțiile ecuației:

a) $3x^2-x-1=0$; b) $-x^2+5x-1=0$;

c) $4x^2-x-2=0$; d) $x^2-3x-8=0$.

13. Explicitați modulul:

a) $|1-3\sqrt{3}|$; b) $|-7+\sqrt{16}|$;

c) $|-(3-\sqrt{5})|^2$; d) $|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|$.

14. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|x^2-3x+1|=5$; b) $|2x^2-x+2|=2$;

c) $|4x^2-7|=9$; d) $|x-2x^2|=3$.

15. Comparați numerele:

a) $5-2\sqrt{3}\ \square\ 2+\sqrt{2}$; b) $6+\sqrt{7}\ \square\ 4\sqrt{7}$.

16. Reprezentați pe axa numerelor mulțimea:

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\le\sqrt{5}\}$;

b) $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x+1|<\sqrt{3}\}$;

c) $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x-3|\ge1{,}5\}$.

17. Scrieți ca fracție numărul zecimal:

a) 6,(7); b) 15,(25); c) 3,2(17); d) 0,123(7).

18. *Lucrați în perechi!* Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\sqrt{16x^2}$, dacă $x<0$;

b) $\sqrt{0{,}81a^2b^2}$, dacă $a>0$, $b<0$;

c) $\sqrt{24m^3n^2}$, dacă $n>0$;

d) $\sqrt{8x^4y^6}$, dacă $y<0$.

19. Calculați:

a) $\frac{6{,}6\cdot10^5}{1{,}1\cdot10^{-7}}$; b) $\frac{5{,}6\cdot10^{-2}}{7\cdot10^{-3}}$; c) $\frac{1{,}9\cdot10^{-5}}{3{,}8\cdot10^{-4}}$.

20. *Investigați!* Dintr-o foaie de tablă de formă pătrată s-a tăiat o fâșie cu lățimea de 25 cm. Aflați dimensiunile inițiale ale foii de tablă, dacă se știe că aria părții rămase după tăiere este de $4\,400\ \text{cm}^2$.

21. Tatăl îi spune fiului: „10 ani în urmă eu eram de 10 ori mai în vârstă decât tine, iar peste 22 de ani voi fi numai de două ori mai în vârstă.” Câți ani are acum tatăl și câți fiul?

22. Calculați valoarea expresiei:

a) (EG, 2015) $\dfrac{2^{23}}{4^3 \cdot 8^5}$; b) (EG, 2017) $\dfrac{2^3 \cdot 4^{-2}}{8^{-1}}$; c) (EG, 2019) $\dfrac{6^4 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 3^2}$;

d) (EG, 2021) $\dfrac{4^8 + 25^0 - 1}{84}$; e) (EG, 2023) $\dfrac{9^{-3} \cdot 27}{3^{-4}}$.

23. ***Investigați!*** O cărămidă are masa de 1,5 kg și încă a unei jumătăți de aceeași cărămidă. Care este masa cărămizii?

24. Un pepene verde are masa de 3,5 kg și încă a unei jumătăți de același pepene. Care este masa pepenelui?

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716), matematician german

25. „Triunghiul de numere” al lui Leibniz.
Se construiește astfel:

1) Laturile laterale sunt formate din inversele numerelor naturale nenule $\dfrac{1}{1}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots$

2) Fiecare număr al unei linii este suma numerelor de pe linia următoare situate imediat sub el.

De exemplu: $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{12} + x$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{1}{1} & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & \\
\frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & x & & \frac{1}{4} \\
\cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot
\end{array}$$

a) Completați triunghiul până la linia care începe cu $\dfrac{1}{10}$.

b) Investigați și găsiți proprietăți interesante în cadrul „triunghiului de numere” al lui Leibniz. Navigați prin internet!

26. Calculați:

a) (EG, 2016) $\dfrac{2}{\sqrt{7} - 3} + \sqrt{7} + 4$; b) (EG, 2022) $\dfrac{2\sqrt{3} + 9}{\sqrt{3}} - \sqrt{27}$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

27. Reprezentați geometric pe axa numerelor punctele: $A(\sqrt{5}+1)$, $B(2+\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $D(\sqrt{7}-4)$.

28. Efectuați:

a) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$; b) $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

29. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|x|(|x|-3) = 5$;

b) $x^2 - |x| - 2 = 0$;

c) $\sqrt{(3-x)^2} = 3 - |3-x|^2$;

d) $(|x|-3)(|x|+5) - 1 = 0$;

e) $\sqrt{(x+4)^2} = 5 - |4+x|^2$.

30. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1})$, $x, y \in \mathbb{R}^*$;

b) $(a+b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

31. Cu ce este egală:

a) diferența $|a| - a$, $a \in \mathbb{R}$;

b) suma $|a| + a$, $a \in \mathbb{R}$?

32. Demonstrați că:

a) produsul oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 6;

b) produsul a două numere pare consecutive este multiplu al lui 8.

33. ***Lucrați individual!*** **Proiect.** *Numerele reale în viața mea.*

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta I

1. Fie $A=\{-5;\ 0;\ 3;\ 2,(3);\ |\pi-1|;\ 8;\ \sqrt{9};\ \sqrt{7}\}$.

a) Completați caseta: card $A = \square$.

b) Aflați: $A\cap\mathbb{N}$; $A\cap\mathbb{Z}$; $A\cap\mathbb{Q}$.

c) Ordonați crescător elementele mulțimii A.

d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$[18:(-3)^3-7^{-2}\cdot 5,(4)]\cdot(x-1)=\sqrt{9}-2x.$$

2. Fie expresia

$$E=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{4})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{4})^2}-2(\sqrt{5}-2).$$

a) Aflați valoarea expresiei E.

b) Aflați inversul numărului obținut în a).

3. Alisia are o bancnotă de 100 lei, două bancnote de 50 lei, una de 20 lei, trei de 10 lei şi patru de 1 leu. După ce a achitat cumpărătura, Alisiei i-au rămas 12% din suma inițială.

a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată:

Suma inițială $\square$ *210 lei.*

b) Calculați cât a cheltuit Alisia.

c) Aflați ce sumă ar trebui să cheltuiască Alisia, astfel încât să-i rămână 20% din suma inițială.

Varianta II

1. Fie $B=\{-\sqrt{3};\ |5-\pi|;\ 0;\ \sqrt{16};\ 3,(6);\ -\pi;\ 8\}$.

a) Completați caseta: card $B = \square$.

b) Aflați: $B\cap\mathbb{N}$; $B\cap\mathbb{Z}$; $B\cap\mathbb{Q}$.

c) Ordonați descrescător elementele mulțimii B.

d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$[(-5)^2:8,(3)-6^{-2}\cdot 18]\cdot(x-1)=\sqrt{4}+3x.$$

2. Fie expresia

$$E=\sqrt{(\sqrt{4}+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2}-2(\sqrt{5}-1).$$

a) Aflați valoarea expresiei E.

b) Aflați inversul numărului obținut în a).

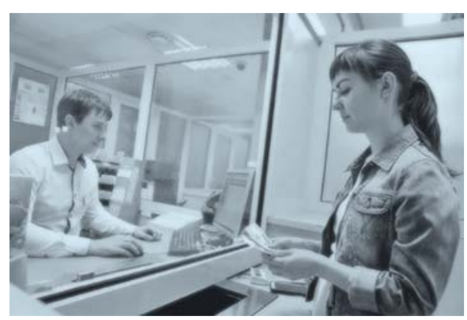
3. Amelia are o bancnotă de 200 lei, două bancnote de 100 lei, una de 50 lei, patru de 5 lei şi trei de 1 leu. După ce a achitat facturile de întreținere şi utilități, Ameliei i-au rămas 20% din suma inițială.

a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată:

Suma inițială $\square$ *620 lei.*

b) Calculați cât a achitat Amelia pentru întreținere şi utilități.

c) Aflați ce sumă ar trebui să plătească Amelia pentru întreținere şi utilități, astfel încât să-i rămână 15% din suma inițială.



Capitolul **2**

Rapoarte algebrice

Esența matematicii nu este să facă lucrurile simple complicate, ci să facă lucrurile complicate simple.
Stan Gudder

§ 1. Noțiunea de raport algebric

Investigăm **1** Observați, selectați şi completați.

$\frac{5}{3}$ $-\frac{2}{5}$ $\frac{9{,}5}{6}$ $\frac{0{,}4}{2}$ $\frac{1}{5}$ $-\frac{4}{3}$ $\frac{4{,}2}{7}$ $\frac{2{,}6}{3{,}8}$ $\frac{2}{5}$ $-\frac{0{,}3}{0{,}4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{6}{9{,}5}$

- Următoarele rapoarte nu sunt fracții: $\frac{9{,}5}{6}, \frac{0{,}4}{2}, \frac{4{,}2}{7}, \frac{2{,}6}{3{,}8}, \square, \square$.
- Numărătorul raportului $\frac{4{,}2}{7}$ este $\square$. Numitorul raportului $-\frac{0{,}3}{0{,}4}$ este $\square$.
- Valoarea raportului $\frac{3}{4}$ este 0,75, iar a raportului $\frac{0{,}4}{2}$ — $\square$.
- Rapoartele $\frac{0{,}4}{2}$ şi $\frac{\square}{5}$ sunt egale.

2 Examinați şi completați:

a) Dacă $\frac{a}{b}=0{,}9$, atunci $\frac{2a+3b}{3b}=?$

$\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{3b}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}+\square=\frac{2}{3}\cdot\square+\square=\square$.

Dacă $\frac{a}{b}=0{,}9$, atunci numărul $\square$ este valoarea raportului $\frac{2a+3b}{3b}$.

b) Dacă $a=2,\ b=-1,\ c=3$, atunci valoarea expresiei a^2+5b+c este

$2^2+5\cdot\square+\square=\square$.

Rețineți

- **Expresiile algebrice** sunt formate din numere şi litere (numite **variabile**) legate prin operațiile de adunare, scădere, înmulțire, ridicare la putere, extragere a rădăcinii pătrate.
- **Expresiile algebrice raționale** nu conțin variabile sub radical.

Definiție

Raportul a două expresii algebrice raționale se numeşte **raport algebric** (sau **fracție algebrică**).

De exemplu, expresiile $\frac{4}{x-2}$, $\frac{x+y}{x^2+y}$, $\frac{ab}{a-b}$, $\frac{t-2}{t+4}$, $\frac{z^2t}{z+5t}$ sunt rapoarte algebrice.

3 Completați:

a) Pentru $x=1$ și $y=2$, valoarea raportului algebric $\frac{2x+y}{3x-y}$ este $\frac{2\cdot 1+2}{3\cdot 1-\square}=\frac{5}{\square}=\square$.

b) Pentru $a=0$, valoarea raportului algebric $\frac{a^2-2}{2-a}$ este $\frac{0^2-2}{2-\square}=\frac{\square}{\square}=\square$.

Valoarea raportului algebric $\frac{a^2-2}{2-a}$ nu poate fi calculată pentru $2-a=0$, adică pentru $a=\square$.

Valoarea raportului algebric $\frac{a^2-2}{2-a}$ poate fi calculată pentru orice $a\in\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

Rețineți

- **Domeniul valorilor admisibile** (se notează DVA), în mulțimea dată M, al unui raport algebric cu o variabilă este submulțimea lui M, în care nu se anulează numitorul raportului algebric, adică raportul algebric are sens.
- DVA în $\mathbb{R}$ al raportului algebric $\frac{a^2-2}{2-a}$ este $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Notăm cu $F(x)$ un raport algebric cu variabila x. Dacă $a\in$ DVA al raportului $F(x)$, atunci $F(a)$ este valoarea raportului $F(x)$ pentru $x=a$.

4 Observați și completați:

Valoarea variabilei	Valoarea raportului algebric $\frac{1-x}{x+5}$	Valoarea raportului algebric $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$
1	$\frac{1-1}{1+5}=\frac{0}{6}=0$	$\frac{1-1^2}{1^2+5\cdot 1}=0$
–2	$\frac{1-(-2)}{\square+5}=\square$	$\frac{-2-(-2)^2}{(-2)^2+5\cdot\square}=\square$
3	$\frac{1-\square}{3+5}=\square$	$\frac{3-\square}{\square^2+5\cdot\square}=-0{,}25$

DVA în $\mathbb{R}$ al raportului $\frac{1-x}{x+5}$ este $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$, iar al raportului $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$ este $\mathbb{R}\setminus\{0, \square\}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Calculați valoarea expresiei algebrice $2x^2-3x$ pentru:
a) $x=0$; b) $x=-2$; c) $x=0{,}5$; d) $x=\frac{1}{6}$.

2. Calculați valoarea expresiei algebrice $4ab-b^2+a$ pentru:
a) $a=b=2$; b) $a=3,\ b=-2$; c) $a=-4,\ b=1{,}5$; d) $a=\frac{3}{4},\ b=\frac{4}{3}$.

3. Scrieți ca raport algebric:
a) $3x:(2x+5)$; b) $(ax^2+bx):(a-b)$; c) $(2x+4):(x-3a)$; d) $12x^5:(7b-x^3)$.

4. *Investigați!* Selectați rapoartele algebrice:

a) $\frac{2x-1}{3x}$; $\frac{0,4x^2-\sqrt{x}}{x+1}$; $\frac{3}{ax+2}$; $\frac{5x}{-9y}$; $\frac{7x}{4}$; $\frac{\sqrt{2x-1}}{2x+1}$; $\frac{y^2+5}{y^2-5}$;

b) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5x+3}}$; $\frac{0,99a}{ax+4}$; $\frac{y}{x}$; $\frac{4}{\sqrt{x}}$; $\frac{\sqrt{y}}{-x^2-9}$.

5. Numiți numărătorul și numitorul raportului algebric:

a) $\frac{0,9a^2+1}{2a-\sqrt{3}}$; b) $\frac{8}{-5x-3}$; c) $\frac{\sqrt{7}+x^2}{a^2x+8a}$; d) $\frac{8,(7)xy}{-7,(4)y^2-x}$.

6. Aflați valoarea raportului algebric $\frac{x^2+1}{x+1}$ pentru:

a) $x=1$; b) $x=0$; c) $x=0,5$; d) $x=1\frac{1}{2}$.

7. Aflați valoarea raportului algebric $\frac{3x+2y}{2x-y}$ pentru:

a) $x=y=1$; b) $x=4,\ y=2$; c) $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{2}$; d) $x=-0,8;\ y=0,4$.

8. *Lucrați în perechi!* Aflați domeniul valorilor admisibile al raportului algebric:

a) $\frac{3a}{a-4}$; b) $\frac{x^2+2x}{3+x}$; c) $\frac{a+b}{2b+6}$; d) $\frac{a-b^2}{-8+0,6a}$; e) $\frac{5ax+3}{2x^2-18}$; f) $\frac{a^2+2ax+1}{0,36-a^2}$.

Formăm abilitățile și aplicăm

9. Aflați valoarea raportului algebric $\frac{0,8x+1,2y}{x-y}$ pentru:

a) $x=2y$; b) $y=2x$; c) $\frac{x}{y}=1,3$; d) $\frac{y}{x}=-0,4$.

10. Fie raportul algebric $F(x)=\frac{2x+1}{8-4x}$. Comparați numerele:

a) $F(0)$ și $F(1)$; b) $F(-2)$ și $F(-1)$; c) $F(0,5)$ și $F(-0,5)$; d) $F(10)$ și $F(-10)$.

11. Fie raportul algebric $F(x)=\frac{10-x^2}{x}$.

a) Ordonați crescător numerele $F(-3)$, $F(-2)$, $F(-1)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$.

b) Ordonați descrescător numerele $F(-4)$, $F(4)$, $F(-0,5)$, $F(0,5)$.

12. *Lucrați în grup!* Pentru care valori ale variabilei valoarea raportului algebric este număr întreg:

a) $\frac{7}{x-2}$; b) $\frac{-5}{3-x}$; c) $\frac{9}{2+x}$; d) $\frac{-4}{x+10}$?

13. Aflați domeniul valorilor admiribile al raportului algebric:

a) $\frac{x^2}{x^2-3}$; b) $\frac{t-1}{t^2+2t+1}$; c) $\frac{a+b^3}{b-\sqrt{2}}$; d) $\frac{xy}{x-y}$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

14. Utilizând proprietățile rapoartelor, determinați pentru care valori ale variabilei sunt egale valorile rapoartelor algebrice:

a) $\frac{8}{3-x}$ și $\frac{4}{2+x}$; b) $\frac{5}{2x-1}$ și $\frac{-10}{x+1}$; c) $\frac{\sqrt{12}}{3-3x}$ și $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}x}$; d) $\frac{-\sqrt{5}}{x}$ și $\frac{\sqrt{10}}{x+1}$.

15. Sunt oare egale în $\mathbb{R}$ rapoartele:

a) $\frac{x}{x^2+4}$ și $\frac{x(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}$; b) $\frac{1}{x-1}$ și $\frac{x+1}{x^2-1}$; c) $\frac{1}{x^2}$ și $\frac{x}{x^3}$?

§ 2. Amplificarea și simplificarea rapoartelor algebrice

2.1. Amplificarea rapoartelor algebrice

Investigăm • Observați şi completați:

$$\frac{2{,}4}{1{,}6}=2{,}4:1{,}6=\bigcirc$$

$\times 2$ $\downarrow$ Amplificăm cu 2.

$$\frac{4{,}8}{3{,}2}=4{,}8:3{,}2=\bigcirc$$

$$\frac{x+3}{x} \longleftarrow \text{DVA: } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$\times(x-3)$ $\downarrow$ Amplificăm cu $x-3$.

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)}=\frac{\square^2-9}{x^2-\square} \longleftarrow \text{DVA: } \mathbb{R}\setminus\{0;\ 3\}$$

a) Înmulțiți numărătorul şi numitorul raportului algebric $\frac{x+3}{x}$ cu expresia $x+3$.

b) Comparați DVA al raportului obținut cu DVA al raportului $\frac{x+3}{x}$.

c) Calculați valorile celor două rapoarte algebrice pentru: $x=1$; $x=-2$; $x=5$.
Ce observați?

Rețineți

- **A amplifica un raport algebric** cu o expresie algebrică rațională nenulă înseamnă a înmulți numărătorul şi numitorul raportului cu expresia dată.
- Prin amplificarea unui raport algebric se obține un raport algebric egal cu cel dat în domeniul valorilor admisibile comun celor două rapoarte.

2.2. Simplificarea rapoartelor algebrice

Investigăm • Observați şi completați:

$$\frac{0{,}9}{1{,}5}=0{,}9:1{,}5=\bigcirc$$

$:3$ $\downarrow$ Simplificăm cu 3.

$$\frac{\square}{0{,}5}=\square:0{,}5=\bigcirc$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}=\frac{(x+1)^2}{x(x+1)} \longleftarrow \text{DVA: } \mathbb{R}\setminus\{0;\ -1\}$$

$:(x+1)$ $\downarrow$ Simplificăm cu $x+1$.

$$\frac{\square}{x} \longleftarrow \text{DVA: } \mathbb{R}\setminus\{\square\}$$

a) Împărțiți numărătorul şi numitorul raportului algebric $\frac{3x^2-x}{x^2-1}$ la expresia $x-1$.
(Considerăm $x-1\neq 0$.)

b) Comparați DVA al raportului obținut cu DVA al fracției $\frac{3x^2-x}{x^2-1}$.

c) Calculați valorile celor două rapoarte algebrice pentru: $x=0$; $x=2$; $x=-3$.
Ce observați?

Rețineți

- **A simplifica un raport algebric** cu o expresie algebrică rațională nenulă înseamnă a împărți numărătorul şi numitorul raportului la expresia dată.
- Prin simplificarea unui raport algebric se obține un raport algebric egal cu cel dat în domeniul valorilor admisibile comun celor două rapoarte.
- DVA al raportului algebric obținut în urma simplificării unui raport algebric poate fi diferit de DVA al raportului dat.

Definiții

- Raportul algebric se numeşte **reductibil** dacă el poate fi simplificat.
- Raportul algebric se numeşte **ireductibil** dacă el nu poate fi simplificat.

Exemplu Raportul algebric $\frac{x(x-2)}{x^2-4}$ este reductibil (argumentați!), iar raportul $\frac{x}{x+2}$ – ireductibil.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Amplificați fracția:

a) $\frac{2}{5}$ cu 3; b) $\frac{4}{9}$ cu 5;

c) $-\frac{3}{7}$ cu 4; d) $-\frac{5}{6}$ cu 6.

2. Amplificați raportul:

a) $\frac{1,8}{3}$ cu 2,5; b) $-\frac{2,1}{4,4}$ cu 3;

c) $-\frac{3,5}{6,8}$ cu 1,6; d) $\frac{0,7}{1,9}$ cu 8.

3. Amplificați raportul algebric:

a) $\frac{x}{y}$ cu x; b) $\frac{y}{x-1}$ cu y;

c) $\frac{ab}{2+a}$ cu b; d) $\frac{x-1}{x+1}$ cu $x-1$.

4. Simplificați fracția:

a) $\frac{24}{36}$; b) $\frac{96}{216}$; c) $\frac{81}{189}$; d) $\frac{180}{216}$.

5. Simplificați raportul:

a) $\frac{2,8}{3,6}$ cu 4; b) $\frac{3,25}{5,5}$ cu 2,5;

c) $\frac{-10,08}{11,34}$ cu 1,8; d) $\frac{15,68}{25,56}$ cu 3,2.

6. *Lucrați în perechi!* Simplificați raportul algebric:

a) $\frac{5x^3y}{10xy^2}$ cu $5xy$; b) $\frac{-3x^5y^6}{9x^3y^8}$ cu $3x^3y^6$;

c) $\frac{2x^3-x^2y}{4x^2-y^2}$ cu $2x-y$; d) $\frac{9x^2+12xy+4y^2}{21xy+14y^2}$ cu $2y+3x$.

Formăm abilitățile și aplicăm

7. Restabiliți șirul de rapoarte egale:

a) $\frac{3}{4}=\frac{\square}{12}=\frac{0,3}{\square}=\frac{\square}{11,2}=\frac{-16,8}{\square}$; b) $\frac{5}{8}=\frac{11}{\square}=\frac{\square}{12,8}=\frac{-32}{\square}=\frac{\square}{-28}$.

8. Restabiliți șirul de rapoarte algebrice egale:

a) $\frac{x-1}{xy}=\frac{\square}{x^2y}=\frac{xy-y}{\square}=\frac{\square}{0,5x^3y+xy}$; b) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{\square}=\frac{\square}{7y-7x}=\frac{3y^2-3x^2}{\square}$.

9. *Lucrați în grup!* Utilizând proprietățile rapoartelor, determinați valorile variabilei pentru care sunt egale rapoartele algebrice:

a) $\frac{x+1}{x-1}$ și $\frac{x^2+x}{x^2-x}$; b) $\frac{2+x}{4-x^2}$ și $\frac{-1}{x-2}$; c) $\frac{2x+3}{2x-3}$ și $\frac{-4x^2-12x-9}{9-4x^2}$; d) $\frac{x}{x-1}$ și $\frac{x^3+x}{x^3-x^2+x-1}$.

10. Simplificați raportul algebric, astfel încât să obțineți un raport algebric ireductibil:

a) $\frac{3(x+2)}{x^2+4x+4}$; b) $\frac{4a^2-4b^2}{2(b+a)^2}$; c) $\frac{y^2-x^2}{x^2-yx}$; d) $\frac{4x^2-4bx+b^2}{0,25b^2-x^2}$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

11. Se știe că $\frac{x+y}{y}=10$. Aflați $\frac{x^2-y^2}{y^2}$.

Matematică distractivă

12. Care este prima cifră a celui mai mic număr natural care are proprietatea: suma cifrelor lui este egală cu 2007?

§ 3. Operații aritmetice cu rapoarte algebrice. Puterea cu exponent natural a unui raport algebric

3.1. Adunarea și scăderea rapoartelor algebrice

Investigăm • Observați și completați adecvat:

$$\frac{3}{14}+\frac{^{2)}4}{7}=\frac{3+4\cdot\square}{14}=\frac{\square}{14}.$$

$$\frac{^{2)}2}{9}-\frac{^{3)}5}{6}=\frac{2\cdot2-5\cdot3}{18}=-\frac{\square}{18}.$$

$$3-\frac{8}{9}=\frac{^{\square)}3}{1}-\frac{8}{9}=$$

$$=\frac{3\cdot9-8}{\square}=\frac{\square}{9}=\square\frac{\square}{9}.$$

$$\frac{a}{2b^2}+\frac{b-a}{2b^2}=\frac{a+b-a}{2b^2}=\frac{\square}{\square}.$$

$$\frac{^{x)}x-1}{3x}+\frac{^{3)}2}{x^2}=\frac{x(x-1)+2\cdot\square}{3x^2}=\frac{\square}{3x^2}.$$

$$\frac{^{y-1)}y-1}{y+1}-\frac{^{y+1)}y+1}{y-1}=\frac{(y-1)^2-(y+1)^2}{(y+1)(y-1)}=$$

$$=\frac{y^2-2y+1-(y^2+\square+1)}{\square^2-1}=\frac{\square}{\square^2-1}.$$

Reguli de adunare și scădere a rapoartelor algebrice

1. **Suma a două rapoarte algebrice cu același numitor** este un raport algebric cu numărătorul egal cu suma numărătorilor, iar numitorul coincide cu numitorii rapoartelor date.
2. Pentru **a aduna două rapoarte algebrice cu numitori diferiți**, se aduc rapoartele la același numitor, apoi se aplică regula 1.
3. Pentru **a scădea două rapoarte algebrice**, se adună descăzutul cu opusul scăzătorului.

Rețineți

Adunarea rapoartelor algebrice posedă aceleași proprietăți ca și adunarea numerelor reale (asociativitatea, comutativitatea etc.).

3.2. Înmulțirea și împărțirea rapoartelor algebrice

Investigăm • Observați și completați adecvat:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{5\cdot2}{7\cdot11}=\frac{\square}{\square}.$$

$$-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12}=-\frac{3\cdot5}{8\cdot12}^{(3}=-\frac{5}{8\cdot\square}=-\frac{\square}{\square}.$$

$$\frac{21}{16}:\frac{7}{8}=\frac{21}{16}\cdot\frac{\square}{7}=$$

$$=\frac{21\cdot\square}{16\cdot7}^{(7\cdot8}=\frac{3\cdot\square}{\square\cdot1}=\frac{\square}{\square}.$$

$$1\frac{2}{3}:\frac{5}{6}=\frac{5}{3}:\frac{5}{6}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{\square\cdot\square}{3\cdot\square}^{(\square\cdot\square}=\square.$$

$$\frac{2y-1}{y+3}\cdot\frac{(y+3)^2}{2y}=\frac{(y+3)^2(2y-1)}{(y+3)\cdot2y}^{(y+3}=$$

$$=\frac{\square(y+3)}{2y}=\frac{2y^2+\square y-3}{2y}.$$

$$\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{(a^2-ab)\cdot b^2}{ba}^{(b}=$$

$$\frac{(a^2-ab)\cdot\square}{a}=\frac{\square(a-b)\square}{a}^{(a}=(a-b)\square.$$

$$\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}:\frac{x+y}{xy}=\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}\cdot\frac{\square}{x+y}=$$

$$=\frac{(x+y)(\square)\cdot\square}{3(\square)^2\cdot(x+y)}^{(\square\cdot(x+y)}=\frac{\square}{3\square}.$$

2 Observați și completați adecvat:

- Inversa fracției $\frac{3}{7}$ este fracția $\frac{7}{3}$.
- Inversa fracției $4\frac{1}{5}$ este fracția $\frac{5}{\square}$.
- Inversul raportului algebric $\frac{x-1}{x}$ este $\frac{x}{x-1}$.
- Inversul raportului algebric $\frac{8}{x^2-y}$ este $\frac{\square}{\square}$.

Reguli de înmulțire și împărțire a rapoartelor algebrice

1. Pentru **a înmulți două rapoarte algebrice**, se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.
2. Pentru **a împărți două rapoarte algebrice**, se înmulțește deîmpărțitul cu inversul împărțitorului.
3. Dacă raportul algebric obținut este reductibil, atunci el se simplifică până se obține un raport ireductibil.

Rețineți

Înmulțirea rapoartelor algebrice posedă aceleași proprietăți ca și înmulțirea numerelor reale (asociativitatea, comutativitatea, distributivitatea înmulțirii față de adunare).

3.3. Puterea cu exponent natural a unui raport algebric

Investigăm • Observați și completați adecvat:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{3^2}{8^2}=\frac{\square}{64}$$

$$\left(\frac{5^2\cdot 2^3}{0{,}1}\right)^2=\frac{5^{2\cdot\square}\cdot 2^{3\cdot 2}}{0{,}1^{\square}}=$$

$$=\frac{5^{\square}\cdot 2^{\square}}{\square}=\square$$

$$\left(\frac{x^3y}{x-1}\right)^2=\frac{x^{3\cdot\square}\cdot y^{\square}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{a^2}{2b^3}\cdot\frac{a^3}{b^4}=\frac{a^2\cdot a^3}{2b^3\cdot b^4}=\frac{a^{\square}}{2b^{\square}}$$

$$\left(\frac{2x^3-5y+1}{3x-8y^2}\right)^0=\square$$

Regula de ridicare a unui raport algebric la o putere cu exponent natural

Pentru **a ridica un raport algebric la o putere cu exponent natural**, se ridică la această putere numărătorul și numitorul raportului.

Rețineți

În calculul cu puteri cu exponent natural ale rapoartelor algebrice se aplică aceleași proprietăți ca și în calculul cu puteri cu exponent natural ale numerelor reale.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Calculați:

a) $\frac{7}{12}+\frac{5}{12}$; b) $\frac{21}{14}-\frac{9}{14}$; c) $\frac{29}{47}+\left(-\frac{31}{47}\right)$; d) $-\frac{25}{39}-\left(-\frac{18}{39}\right)$.

2. Calculați:

a) $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$; b) $-\frac{11}{12}+\frac{11}{20}$; c) $\frac{8}{9}-\frac{8}{15}$; d) $\frac{7}{16}-\left(-\frac{11}{12}\right)$; e) $-\frac{14}{21}+\left(-\frac{15}{28}\right)$.

3. Efectuați:

a) $\frac{3}{xy}+\frac{10}{xy}$; b) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}$; c) $\frac{12x}{x^2+1}-\frac{8x}{x^2+1}$; d) $\frac{4y^3}{x-y^2}+\frac{3xy+y^3}{y^2-x}$.

4. Efectuați:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; b) $\frac{6}{xy}+\frac{2}{x}$; c) $\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}-\frac{x-a}{x+a}$; d) $\frac{5}{2x^3+2x}-\frac{1}{2x}$.

5. Calculați:

a) $\frac{12}{17}\cdot\frac{3}{5}$; b) $\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$; c) $-\frac{15}{22}\cdot\frac{2}{5}$; d) $-\frac{8}{27}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)$.

6. Efectuați:

a) $\frac{x}{y}\cdot\frac{3x}{y^2}$; b) $\frac{5x^2y}{y-1}\cdot\frac{2xy}{y+1}$; c) $\frac{4(x+1)}{x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$; d) $\frac{8y}{7xy+7x}\cdot\frac{y+1}{y}$.

7. Calculați:

a) $\frac{33}{40}:\frac{3}{10}$; b) $-\frac{25}{32}:\frac{5}{8}$; c) $\frac{27}{60}:\left(-\frac{9}{15}\right)$; d) $-\frac{84}{287}:\left(-\frac{21}{41}\right)$.

8. Precizați inversul raportului algebric:

a) $\frac{3x}{4y}$; b) $\frac{ax-b}{b+ay}$; c) $\frac{7x-5}{3x^2}$; d) $\frac{4y}{25-x^2}$.

9. *Lucrați în perechi!* Efectuați:

a) $\frac{ab^2}{xy}:\frac{b}{x}$; b) $-\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}:\frac{x+1}{x+2}$; c) $\frac{x^2+2x}{xy+2x}:\left(-\frac{x+2}{2+y}\right)$; d) $\frac{4x-16}{x+3}:\frac{4xy-16y}{8x^2+24x}$.

10. Efectuați ridicarea la putere:

a) $\left(\frac{6}{7}\right)^2$; b) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$; c) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$; d) $\left(\frac{3^4\cdot 5^3}{2^5}\right)^2$.

11. Efectuați:

a) $\left(\frac{xy}{3a}\right)^3$; b) $\left[\frac{x(x+y)}{x-y)}\right]^2$; c) $\left(\frac{x^2a}{y^5b^3}\right)^3$; d) $\left[\frac{2(x-1)}{3a+b}\right]^2$.

Formăm abilitățile și aplicăm

12. *Lucrați în grup!* Efectuați:

a) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$; b) $\frac{3x+2}{x^2+2x+1}-\frac{4}{x+1}$; c) $\frac{-3(x+a)}{ax+ay}+\frac{3x}{x^2+xy}$.

13. Scrieți sub formă de raport algebric: a) $\frac{x-y}{x+y}+1$; b) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

14. Aflați valoarea raportului algebric $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2+1}$ pentru:

a) $x=1+\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}-1$; b) $x=\sqrt{5}-2,\ y=\sqrt{5}+2$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

15. Demonstrați că:

a) $\left(\frac{2a}{a^2-4}-\frac{2}{a-2}+\frac{1}{a+2}\right):\frac{a-6}{4(a+2)}=\frac{4}{a-2}$; b) $\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right):\frac{a^2+2a+1}{1-a^2}=\frac{1-a}{a+1}$.

16. Compuneți un raport algebric cu variabilele x și y, al cărei valoare este egală cu:

a) $-\frac{2}{5}$ pentru $x=y=1$; b) 0,8 pentru $x=y=-1$;

c) $\sqrt{5}$ pentru $x=1$ și $y=-1$; d) 0 pentru $x=2$ și $y=3$.

§ 4. Transformări identice ale expresiilor algebrice

Ne amintim

- Determinați dacă egalitatea este o identitate $(x-1)^2-(x+1)^2-4=x^2-(x+2)^2$.

Rezolvare:

Transformăm partea stângă a egalității:

$$(x-1)^2-(x+1)^2-4=x^2-2x+1-x^2-2x-1-4=-4(x+1).$$

Transformăm partea dreaptă a egalității:

$$x^2-(x+2)^2=x^2-x^2-4x-4=-4(x+1).$$

Obținem $-4(x+1)=-4(x+1)$, adică egalitatea este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
Deci, egalitatea este o identitate în mulțimea $\mathbb{R}$.

- Fie rapoartele algebrice $\frac{1-x}{x+5}$ și $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$.

a) Aflați DVA al rapoartelor.

b) Determinați dacă egalitatea $\frac{1-x}{x+5}=\frac{x-x^2}{x^2+5x}$ este o identitate în DVA al rapoartelor.

Rezolvare:

a) În §1 am determinat că DVA al rapoartelor $\frac{1-x}{x+5}$ și $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$ este mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{0,\ -5\}$.

b) Transformăm în DVA partea dreaptă a egalității:

$$\frac{x-x^2}{x^2+5x}=\frac{x(1-x)}{x(x+5)}=\frac{1-x}{x+5}.$$

Deci, rapoartele $\frac{1-x}{x+5}$ și $\frac{x-x^2}{x^2+5x}$ sunt egale pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\ -5\}$.

Adică, egalitatea $\frac{1-x}{x+5}=\frac{x-x^2}{x^2+5x}$ este o identitate în mulțimea $\mathbb{R}\setminus\{0,\ -5\}$.

Definiții

- Două rapoarte algebrice cu aceleași variabilă se numesc **egale** în mulțimea M, dacă:
  – mulțimea M aparține fiecărui DVA al rapoartelor;
  – ele au valori egale pentru orice valoare a variabilei din M.
- Dacă E_1 și E_2 sunt două expresii algebrice cu aceleași variabile și dacă valorile lor sunt egale pentru orice valori ale variabilelor lor din domeniul valorilor admisibile ale celor două expresii, atunci expresiile E_1 și E_2 se numesc **identic egale** în acest domeniu, iar scrierea $E_1=E_2$ se numește **identitate**.
- Transformarea expresiei într-o expresie identică cu ea se numește **transformare identică**.

Rețineți

Identitățile se demonstrează utilizând următoarele modalități:

1) se efectuează transformări identice cu partea stângă a egalității. Dacă în rezultat obținem partea dreaptă, atunci identitatea este demonstrată.

2) se efectuează transformări identice cu partea dreaptă a egalității. Dacă în rezultat obținem partea stângă, atunci identitatea este demonstrată.

3) se efectuează transformări identice atât cu partea stângă, cât și cu partea dreaptă. Dacă se obține același rezultat, atunci identitatea este demonstrată.

4) se scade partea stângă din partea dreaptă, sau partea dreaptă din partea stângă. Dacă în rezultat se obține zero, atunci identitatea este demonstrată.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie expresia $\left(2-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{5x+5}$. Indicați litera care corespunde expresiei identic egale cu expresia dată.

A. $\frac{5}{2x-3}$; **B.** $\frac{2x-3}{5}$; **C.** $\frac{2x+3}{5}$; **D.** $\frac{5}{2x+3}$.

2. Efectuați în DVA transformările identice și aduceți expresia la forma cea mai simplă:

a) $\frac{x}{x-3}:\frac{1}{x^2-9}$; b) $\left(\frac{t}{n}-\frac{n}{t}\right)\cdot\frac{2nt}{t^2-n^2}$; c) $\frac{m+1}{m}\cdot\frac{m^2}{(m+1)^2}$.

3. ***Investigați!*** *Adevărat* sau *fals*!

a) Egalitatea $(x-y)^2=(y-x)^2$ este o identitate.

b) Egalitatea $\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ este o identitate.

c) $1-\frac{x}{x+y}=\frac{2y}{x+y}$, pentru $x\neq -y$.

4. ***Lucrați în perechi!*** Efectuați în DVA transformările identice:

a) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}$; b) $1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$; c) $\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\frac{1}{(x-2)^2}$.

5. Fie egalitatea $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$.

a) Determinați dacă egalitatea este o identitate în DVA.

b) Pentru care valori ale lui x egalitatea este adevărată?

Formăm abilitățile și aplicăm

6. Determinați dacă sunt identic egale expresiile $\frac{3m}{m-4}-\frac{m+2}{2m+8}\cdot\frac{m^2-16}{m+2}$ și $\frac{3m}{2(m-4)}$.

7. Efectuați în DVA transformările identice și aduceți expresia la forma cea mai simplă.

a) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right):\left(1+\frac{1}{x^3-1}\right)$; b) $\frac{a^3-b^3}{2a^2b^2}\cdot\frac{8ab}{a^2+ab+b^2}-\frac{a-b}{ab}$.

8. Demonstrați identitatea:

a) $(t-1)(t+1)(t^2+1)(t^4+1)=t^8-1$; b) $\left(\frac{a}{a+3}+\frac{a}{a-3}+\frac{a^2}{9-a^2}\right):\frac{a-5}{a^2-9}=\frac{a^2}{a+5}$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{4t^2-8t+3}{4t^2-1}$; b) $\frac{a^2+3a}{a^2-3a-18}$; c) $\frac{9a^2+6ab+b^2}{9a^2-b^2}$; d) $\left(\frac{t+2}{3t}-\frac{2}{t-2}-\frac{t-14}{3t^2-6t}\right):\frac{t+2}{6t}\cdot\frac{1}{t-5}$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

10. Fie expresia: 1) $\frac{5}{x^2+16}-\frac{x^3}{16-4|x|}$; 2) $\frac{3}{x^2-25}+\frac{x}{20+4|x|}$.

a) Aflați DVA al expresiei.

b) Aduceți la forma cea mai simplă expresia în DVA.

11. Rezolvați în DVA ecuația $\frac{2|x|+1}{x^2+|x|+1}-\frac{4(x^2+|x|+1)}{1+2|x|}+3=0$.

12. Fie expresia $E(x)=\frac{x^2+3x-5}{x+4}$.

a) Scrieți expresia în forma $E(x)=ax+b+\frac{c}{x+4}$, unde $a, b, c\in\mathbb{R}$.

b) Aflați coeficienții a, b, c.

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. *Investigați!* Selectați rapoartele algebrice:

a) $\frac{3x-\sqrt{x}}{2x}$, $\frac{9x+\sqrt{8}}{2x+y}$, $\frac{\sqrt{3}x}{5}$, $\frac{9x^2+bx+c}{a-b}$, $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$, $\frac{ax+y}{2\sqrt{3}+x^2}$;

b) $\frac{x}{y}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5-x^2}{\sqrt{y+x}}$, $\frac{\sqrt{20}-x^2}{\sqrt{5}-x}$, $\frac{0{,}7xy}{0{,}2ab}$, $\frac{(1+xy)^2}{(1-xy)^2}$.

2. Aflați valoarea raportului algebric $\frac{5-4xy}{x^2+1}$ pentru:

a) $x=y=0$; b) $x=-1,\ y=1$; c) $x=0,\ y=-1$; d) $x=2,\ y=-1$.

3. *Lucrați în perechi!* Aflați domeniul valorilor admisibile al raportului algebric:

a) $\frac{y-1}{-3-0{,}3x}$; b) $\frac{5x-9}{-4x^2+16}$; c) $\frac{x-y}{x^2+x}$; d) $\frac{15y}{2x^3-x^2}$.

4. Amplificați raportul algebric:

a) $\frac{x+3}{2x-1}$ cu $2x+1$; b) $\frac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}}$ cu $x+\sqrt{7}$; c) $\frac{x-y}{3x-y}$ cu $3x+y$; d) $\frac{4x-y}{y+4x}$ cu $y+4x$.

5. Simplificați raportul algebric până la un raport ireductibil:

a) $\frac{3x+9}{x^2+6x+9}$; b) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$; c) $\frac{a^2-ax}{x^2-a^2}$; d) $\frac{x^2-4}{2x-x^2}$.

6. Efectuați:

a) $\frac{1}{x^2y}+\frac{2}{xy^2}$; b) $\frac{5}{x-2y}-\frac{3}{x+2y}$; c) $\frac{x-1}{2x-6}+\frac{1}{3-x}$; d) $\frac{5}{x^2-16}-\frac{7}{x-4}$.

7. Efectuați:

a) $\frac{(x+1)^3}{(x-2)^4}\cdot\frac{(x-2)^3}{x+1}$; b) $\frac{xy^2}{x+y}\cdot\frac{(x+y)^2}{xy}$; c) $\frac{3ab}{25yx^4}\cdot\frac{15x^2y^2}{18a^2b^3}$; d) $\frac{\sqrt{3a^2x}}{1{,}2yz^2}\cdot\frac{\sqrt{12y^2}}{5a}$.

8. Efectuați:

a) $\frac{3x-6}{3x-1}:\frac{xy-2y}{9x^2-1}$; b) $\frac{2-x}{3x+12}:\frac{x^2-4}{4x+x^2}$; c) $\frac{ab^3}{6-6x}:\frac{x^2-2x+1}{a^3b^3}$; d) $\frac{3ab}{ax+3x}:\frac{6ba^2}{9+6a+a^2}$.

9. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\frac{ax+ay-bx-by}{xy+x^2}$; b) $\frac{x^2-2x+1}{y-xy+z-zx}$; c) $\frac{y^2+x^2-2xy}{xz-yz+ty-xt}$; d) $\frac{xy-xz-y^2+yz}{x^2-xy}$.

10. Desfaceți parantezele drepte:

a) $\left[\frac{a(x+1)^2}{b(x-1)}\right]^3$; b) $\left[\frac{x^2(x-1)}{y^3(x+1)^2}\right]^4$; c) $\left[\frac{ab^2x^3}{(a-b^2)^2y^4}\right]^2$; d) $\left[\frac{\sqrt{5}(a^2-x)^2}{\sqrt{3}y^2x}\right]^4$.

11. *Lucrați în grup!* Scrieți ca raport algebric:

a) $\left(x-\frac{b}{a}\right)^2$; b) $\left(\frac{x}{y}-3\right)^2$; c) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$; d) $\frac{2}{2a+3}-\frac{1}{3-2a}$.

Formăm abilitățile și aplicăm

12. Aflați valoarea expresiei $\left(\frac{t^2+2t-3}{t^2-1}+\frac{t^2+t-2}{t^2-t-6}\right):\frac{t^2-5}{t^2-2t-3}\cdot(2t-4)$, pentru $t=2-\sqrt{5}$.

13. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\frac{a^2-4a+4}{a^2+ab^2-2a-2b^2}$; b) $\frac{x^2+2x+2y^2-y^4}{x^2-xy^2+2y^2-4}$;

c) $\left(\frac{x-y}{x^2-xy}-\frac{1}{x^2-y^2}:\frac{x+y}{(y-x)^2}\right):\frac{y^2}{(x+y)^2}$; d) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{ab}{a^2-b^2}\right):\frac{4a^2}{a^2-2ab+b^2}$.

14. *Lucrați în grup!* Aduceți la o formă mai simplă și calculați valoarea expresiei pentru $x=-1{,}8$ și $y=0{,}6$.

a) $\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+y^2+2xy}\right):\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$; b) $\dfrac{x+y}{x+2y}:\left(\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{y^2}{x^2-4y^2}\right)$;

c) $\dfrac{x^2}{x^2-2xy}:\left(\dfrac{2xy}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{x+2y}\right)$; d) $\left(\dfrac{2xy}{x^2-9y^2}-\dfrac{y}{x-3y}\right):\dfrac{y^2}{x^2+3xy}$.

15. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\dfrac{8x-4x^2-4}{(x^2-1)(1-x)}+\dfrac{(1+x)(x-1)}{1-x}\cdot\dfrac{x}{(x+1)(x^2-2x+1)}+\dfrac{x}{x^2+1-2x}$;

b) $\dfrac{8x^2-24x+18}{9+6x}\cdot\dfrac{4x^2+12x+9}{15-10x}\cdot\dfrac{15x}{4x^2-9}$.

16. (EG, 2015) Aflați valorile reale ale lui x, pentru care suma rapoartelor algebrice $\dfrac{2}{x-3}$ și $\dfrac{2x}{x+3}$ este egală cu produsul acestor rapoarte.

17. (EG, 2019) Determinați valorile lui $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$, pentru care suma rapoartelor algebrice $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ și $\dfrac{4x-5}{x-3}$ este egală cu 1.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

18. Demonstrați că:

a) $\dfrac{x}{x^2-6x+9}:\left(\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{3x}{x^2-9}\right)=\dfrac{3+x}{3-x}$; b) $\left(1+\dfrac{7}{a-3}\right)\cdot\left(\dfrac{a+5}{a^2+a-12}+\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{4}{a-3}\right)(3-a)^2=a^2-6a-11$.

19. Demonstrați că:

a) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{16}+y^{16})=\dfrac{x^{32}-y^{32}}{x-y}$; b) $\dfrac{x^{2^{10}}-y^{2^{10}}}{x-y}=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{2^9}-y^{2^9})$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Completați caseta:

DVA al raportului algebric $\dfrac{7x-\sqrt{2}}{-2x-9}$ este $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

2. a) Scrieți sub formă de raport algebric ireductibil:

$$\frac{a^2-4a+4}{b+b^3}:\frac{2-a}{b^2+1}.$$

b) Aflați valoarea raportului obținut la a) pentru $a=1-\sqrt{5}$, $b=1+\sqrt{5}$.

3. Amplificați raportul algebric $\dfrac{\sqrt{3}x-4}{\sqrt{3}x+4}$ cu $4-\sqrt{3}x$.

4. Simplificați raportul algebric:

$$\frac{100a^2-9}{100a^2-60a+9}.$$

5. Demonstrați în DVA identitatea:

$$\left(\frac{40a}{a^2-25}+\frac{4a}{a+5}-\frac{4a}{15-3a}\right):\frac{4a}{3a-15}=4.$$

Varianta II

1. Completați caseta:

DVA al raportului algebric $\dfrac{5x+\sqrt{8}}{-3x+7}$ este $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

2. a) Scrieți sub formă de raport algebric ireductibil:

$$\frac{b^2-6b+9}{a-\sqrt{3}}:\frac{3-b}{5a^2-15}.$$

b) Aflați valoarea raportului obținut la a) pentru $a=\sqrt{2}-1$, $b=\sqrt{2}+1$.

3. Amplificați raportul algebric $\dfrac{\sqrt{5}x-1}{1+\sqrt{5}x}$ cu $\sqrt{5}x+1$.

4. Simplificați raportul algebric:

$$\frac{9x^2-4}{18x^2+24x+8}.$$

5. Demonstrați în DVA identitatea:

$$\left(\frac{1}{a+2}-\frac{a}{a^2-4}+\frac{2}{5a-10}\right):\frac{a-3}{a^2-4}=0{,}4.$$

Capitolul

3 Funcţii

Nu există decât un singur fel de a învăţa. Prin acţiune.
P. C. Coelho

§ 1. Noţiunea de funcţie. Recapitulare şi completări

1.1. Noţiunea de funcţie. Moduri de definire a funcţiei

Noţiunea de **funcţie** este una dintre cele mai importante noţiuni în cursul de matematică. Întâlnim aplicaţii ale funcţiilor în diverse domenii – în economie, în tehnică, în sociologie, în cotidian, în fizică, în chimie, în biologie etc.

Ne amintim

• Identificaţi elementele funcţiei:

a) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\underbrace{f(x) = -3x + 1}$.

$D(f)$ – domeniul de definiţie al funcţiei f

Domeniul de valori sau codomeniul funcţiei f

Legea de corespondenţă

$E(f) = \{y \mid y = f(x) = -3x + 1\}$ – mulţimea valorilor funcţiei f

b) $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\underbrace{f(x) = 8{,}5x - 3}$.

$E(g) =$

Definiţie

Fie mulţimile nevide A şi B. Se spune că este definită **o funcţie** pe mulţimea A cu valori în mulţimea B dacă este stabilită o lege de corespondenţă, o regulă, un procedeu care asociază *fiecărui* element x din A un *singur* element y din B.

Reţineţi

Funcţia definită pe mulţimea A cu valori în mulţimea B se notează $f\colon A \to B$ (sau $A \xrightarrow{f} B$).

Mulţimea A se numeşte ***domeniul de definiţie*** al funcţiei f şi se notează $D(f)$.

Mulţimea B se numeşte ***domeniul de valori*** sau ***codomeniul*** funcţiei f.

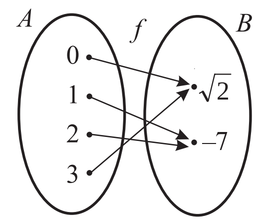
Valoarea funcţiei f în x se notează $y = f(x)$; x se numeşte ***variabilă independentă*** sau ***argument*** al funcţiei f, iar y – ***variabilă dependentă***.

Mulţimea valorilor funcţiei f se notează $E(f) = \{y \mid y = f(x)\}$.

Evident, $E(f) \subseteq B$.

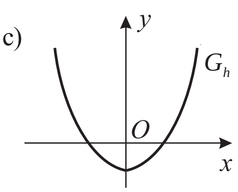
Lucrați în perechi!

- Fie funcțiile f, g, h, p (fig. 1). Identificați modul de definire a fiecărei funcții.

a)


b)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = g(x)$	–6	–4	–2	0	2	4	6

c)


d) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^2 + 2$.

Fig. 1

Generalizăm ***Moduri de definire a funcției***

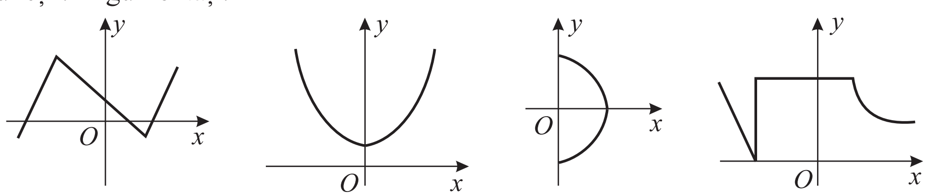
I. Modul analitic: prin formule.

II. Modul sintetic: printr-o diagramă, printr-un tabel de valori, printr-un grafic.

Rețineți Rezolvarea problemelor referitoare la funcții începe cu determinarea domeniului de definiție al funcției respective.

1.2. Graficul unei funcții

- Examinați desenele din figura 2 și identificați care dintre ele reprezintă graficul unei funcții. Argumentați.



a) b) c) d)

Fig. 2

Definiție Se numește **graficul funcției** $f: A \to B$ mulțimea $G_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y = f(x)\}$ sau reprezentarea acestei mulțimi într-un sistem de axe ortogonale.

Așadar, graficul funcției f este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$ sau reprezentarea acestei submulțimi într-un sistem de axe ortogonale.

Rețineți Ecuația $y = f(x)$, verificată de toate elementele $(x, y) \in G_f$, se mai numește ***ecuația graficului*** funcției f.

1.3. Transformări ale graficilor funcției

Lucrați în perechi!

1 Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 1$, $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = x - 3$.

Ce observați?

Rezolvare:

f:

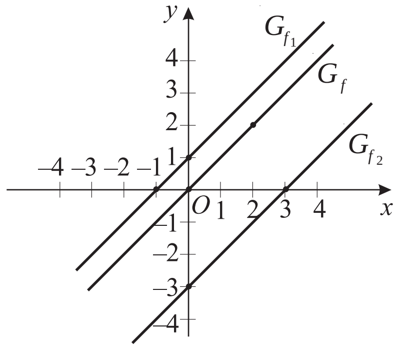
x	0	2
y	0	2

f_1:

x	0	–1
y	1	0

f_2:

x	0	3
y	–3	0



Observăm

a) Graficul G_{f_1} este obținut prin translația paralelă a graficului G_f cu o unitate liniară de-a lungul axei Oy, în sensul acesteia.

b) Graficul G_{f_2} este obținut prin translația paralelă a graficului G_f cu 3 unități liniară de-a lungul axei Oy, în sensul opus acesteia.

Aplicăm

2 Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor: $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = -2(x-1)$ și $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = -2(x+3)$, fiind dat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x$. Ce observați?

Rezolvare:

f:

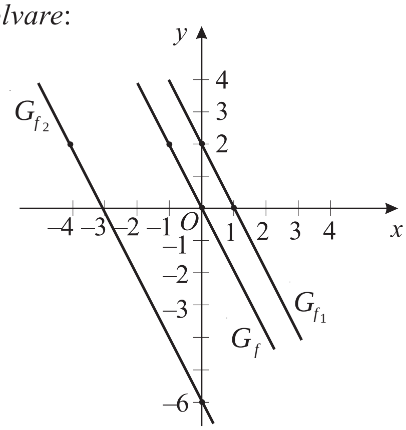
x	0	–1
y	0	2

f_1:

x	0	1
y	2	0

f_2:

x	0	–4
y	–6	2



Observăm

a) Graficul G_{f_1} este obținut prin translația paralelă a graficului G_f cu o unitate liniară de-a lungul axei Ox, în sensul acesteia.

b) Graficul G_{f_2} este obținut prin translația paralelă a graficului G_f cu 3 unități liniare de-a lungul axei Ox, în sensul opus acesteia.

Atenție! Alte transformări ale graficelor funcțiilor le vom studia în §3.

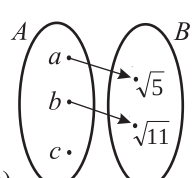
Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

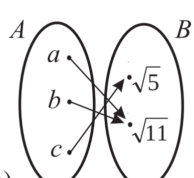
1. Citiți:

a) $f: \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$; b) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$; c) $h: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$; d) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.

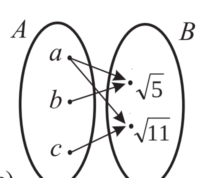
2. *Investigați!* Precizați care dintre diagrame definește o funcție.



a)



b)

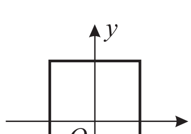


c)

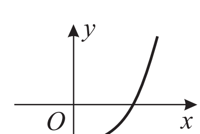
3. Determinați elementele funcției:

a) $f: \{-1, 0, 2, 3\} \to \{-3, -2, 0, 1\},\ f(x) = -x$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 5x + 12$.

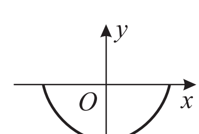
4. *Investigați!* Determinați care dintre desene nu reprezintă graficul unei funcții. Argumentați.



a)



b)



c)

Formăm abilitățile și aplicăm

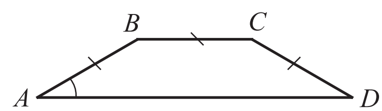
5. *Lucrați în grup!*
Fie mulțimile $A=\{-\sqrt{5}, -3, 0, 2\}$ și $B=\{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.
a) Reprezentați prin diagrame patru funcții definite pe A cu valori în B.
b) Trasați graficele funcțiilor obținute la a), completând tabelele de valori respective.

6. *Investigați!* Determinați dacă este corect definită funcția:
a) $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ f(x)=2x^2-1$;
b) $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\dfrac{5}{x}$;
c) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Q},\ f(x)=\dfrac{2}{3}x+4$;
d) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z},\ f(x)=\dfrac{1}{2}x-3$.

7. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x, \text{ dacă } x\le -1\\ 5-3x, \text{ dacă } x>-1.\end{cases}$
Calculați $f(-\sqrt{2}),\ f(-0{,}1),\ f(0),\ f(2\sqrt{5})$.

8. Exprimați printr-o formulă funcția:
$f\colon \{1, 2, 3, 4, 5\}\to\mathbb{N},\ f(1)=4,\ f(2)=7,\ f(3)=10,\ f(4)=13,\ f(5)=16$.

9. Una din bazele unui trapez isoscel este congruentă cu latura laterală, iar măsura unghiului alăturat bazei este de $30°$.
Exprimați printr-o formulă perimetrul trapezului ca funcție de înălțime.



10. Aflați domeniul de definiție al funcției:
a) $f\colon D(f)\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+1$;
b) $g\colon D(g)\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{1}{x}+5$;
c) $h\colon D(h)\to\mathbb{R},\ h(x)=\sqrt{x}-3$;
d) $f_1\colon D(f_1)\to\mathbb{R},\ f_1(t)=t^2-2t$.

11. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1,\ f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=2x+3,\ f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=2x-2$.
b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x,\ f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=-3(x+2),\ f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=-3(x-2)$. Ce observați?
c) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x,\ g_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_1(x)=-x-1{,}5,\ g_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_2(x)=-x+3$.
d) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2}x,\ f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=\dfrac{1}{2}(x-2),\ f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}(x+4)$.

12. *Lucrați în perechi!* Dați exemple de funcții din diverse domenii (viața de zi cu zi, fizică, chimie, economie, medicină, geometrie, istorie etc.).

13. *Lucrați în perechi!* Aflați valoarea funcției $f\colon D(f)\to\mathbb{R}$ pentru valoarea dată a argumentului:
a) $f(x)=3x^2-2,\ x\in\{-1, 2, \sqrt{3}\}$;
b) $f(t)=-4t+1,\ t\in\{-\sqrt{5}, 0, 7\}$;
c) $f(z)=\dfrac{1}{z}+z,\ z\in\{-2; 0{,}3; 100\}$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

14. Fie funcția $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N},\ f(n)=$ restul împărțirii numărului n la 5.
a) Calculați $f(0),\ f(2),\ f(3),\ f(5),\ f(7)$.
b) Arătați că $f(n+5)=f(n)$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

15. Între variabilele $x, y\in\mathbb{R}$ există relația:
a) $3x-y=7$;
b) $x^2+3y^2=8$.
Se poate exprima y ca funcție de x? Dar x ca funcție de y?

16. Reprezentați grafic funcția $f\colon D(f)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{9-x^2}{x-3}$.

§ 2. Funcții numerice. Recapitulare și completări

2.1. Proprietăți ale funcțiilor numerice

2.1.1. Monotonia funcțiilor numerice

Definiție

Funcția $f: A \to B$ se numește **funcție numerică** sau **funcție reală de variabilă reală** dacă A şi B sunt submulțimi ale mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$.

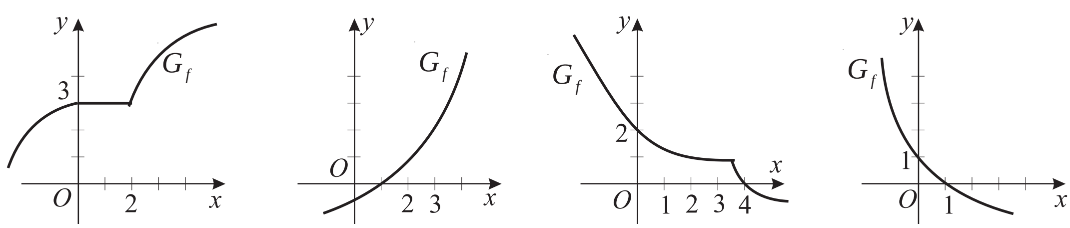
$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 0{,}5x - 1$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$; $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -\sqrt{2}x^3$, sunt funcții numerice.

Fie funcția numerică $f: A \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$ şi $x_1, x_2 \in A$.

Definiții

- Funcția f se numeşte **crescătoare** (**strict crescătoare**) pe mulțimea A, dacă pentru orice $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ avem $f(x_1) \le f(x_2)$ $((f(x_1) < f(x_2))$.
- Funcția f se numeşte **descrescătoare** (**strict descrescătoare**) pe mulțimea A, dacă pentru orice $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ avem $f(x_1) \ge f(x_2)$ $((f(x_1) > f(x_2))$.
- Funcția f se numeşte **monotonă** (**strict monotonă**) pe domeniul ei de definiție $D(f)$ sau pe un interval $I \subseteq D(f)$, dacă ea este crescătoare sau descrescătoare (strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe $D(f)$ sau pe I (fig. 3).

Exemple



a) funcție crescătoare
b) funcție strict crescătoare
c) funcție descrescătoare
d) funcție strict descrescătoare

Fig. 3

Lucrați în perechi!

Aplicăm

- Examinați graficul G_f al funcției f şi precizați intervalele ei de monotonie (fig. 4).

  Rezolvare:

  Funcția f este ____ pe $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ şi ____ pe $[1, 3]$.

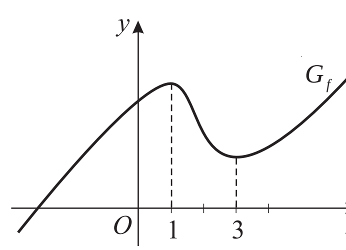


Fig. 4

2.1.2. Zeroul funcției

Investigăm

- Examinați graficul G_f al funcției f şi determinați zerourile acestei funcții (fig. 5).

  Rezolvare:

  Deoarece graficul G_f intersectează axa Ox în punctul $A(-3, 0)$, rezultă că $x_1 = -3$ este zeroul funcției f. Deoarece $B(2, 0)$ este punct comun al graficului G_f cu axa Ox, adică $f(2) = 0$, rezultă că $x_2 = 2$ este zeroul funcției f.

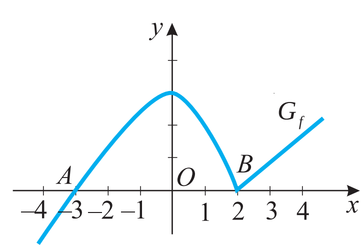


Fig. 5

Răspuns: Funcția f are două zerouri: ____ şi ____.

Definiție

Numărul real a se numeşte **zeroul funcției** f dacă $f(a)=0$.

Rețineți

Numărul real a este zerou al funcției f dacă şi numai dacă punctul $(a, 0)$ este situat pe graficul G_f.

2.1.3. Semnul funcției

Investigăm

- Examinați graficul G_f al funcției f (fig. 6) şi precizați intervalele în care:
  a) $f(x)>0$; b) $f(x)\geq 0$; c) $f(x)<0$; d) $f(x)\leq 0$.

Rezolvare:

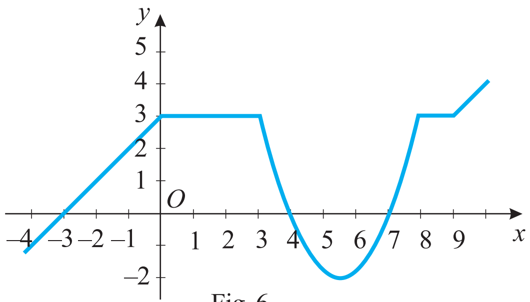


Fig. 6

a) $f(x)>0$, pentru $x\in(-3, 4)\cup(7, +\infty)$;

b) $f(x)\geq 0$, pentru $x\in$ ____ $\cup$ ____;

c) $f(x)<0$, pentru $x\in(-\infty, -3)\cup(4, 7)$;

d) $f(x)\leq 0$, pentru $x\in$ ____ $\cup$ ____.

2.2. Funcția numerică $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$

Definiții

- Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, se numeşte **funcție de gradul I**.
- Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, se numeşte **proporționalitate directă** sau **funcție liniară**.
- Numărul real a se numeşte **coeficient de proporționalitate**.
- Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=b$, $b\in\mathbb{R}$, se numeşte **funcție constantă**.

Observație

Proporționalitatea directă dintre mărimi este funcția de forma
$f\colon (0, +\infty)\to(0, +\infty)$, $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}_+^*$.

2.2.1. Graficul funcției de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$

Graficul funcției de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$, reprezintă o dreaptă:

- care nu trece prin origine şi nu este paralelă cu axa Ox, dacă $a\neq 0$, $b\neq 0$ (fig. 7 a));
- care trece prin originea $O(0, 0)$, dacă $a\neq 0$, $b=0$ (fig. 7 b));
- paralelă cu axa Ox, dacă $a=0$, $b\neq 0$, sau axa Ox, dacă $a=0$, $b=0$ (fig. 7 c)).

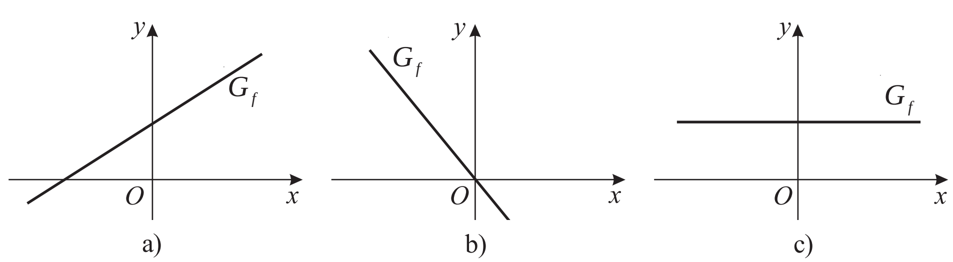


Fig. 7

Rețineți

Numărul a se numește ***panta*** (***coeficientul unghiular*** al) dreptei – graficul funcției de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$.

Pentru a construi dreapta – graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$, este suficient să se construiască dreapta determinată de două puncte ale graficului funcției f. De regulă, acestea sunt punctele de intersecție a graficului G_f cu axele Ox şi Oy.

Pentru funcția liniară $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, se determină convenabil un punct şi se construieşte dreapta ce trece prin originea $O(0, 0)$ şi acest punct.

2.2.2. Proprietăți ale funcției de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$

Lucrați în perechi!

- Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+2$ (fig. 8).
  1) Precizați monotonia funcției f.
  2) Aflați zeroul funcției f.
  3) Determinați semnul funcției f.

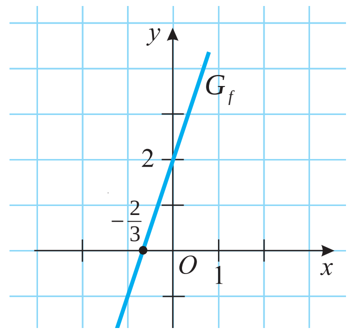


Fig. 8

Rezolvare:

Fie $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ şi $x_1<x_2$.

1) $x_1<x_2 \Leftrightarrow 3x_1<3x_2 \Leftrightarrow 3x_1+2<3x_2+2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ pentru orice $x_1, x_2\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Constatăm că $a=3>0$.

2) $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$. Aşadar, $x=-\frac{2}{3}$ este zeroul funcției f.

3) $f(x)>0 \Leftrightarrow 3x+2>0 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{3}$; $f(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}$. Prin urmare, funcția f ia valori negative pentru $x\in\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ şi valori pozitive pentru $x\in\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

Generalizăm

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$.

- Dacă $a=0$, funcția f este constantă pe $\mathbb{R}$.
- Dacă $a>0$, funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Dacă $a<0$, funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Zeroul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, este $x=-\frac{b}{a}$.
- Intervalul pe care funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, ia valori pozitive este mulțimea soluțiilor inecuației $ax+b>0$, iar intervalul pe care funcția f ia valori negative este mulțimea soluțiilor inecuației $ax+b<0$.

2.3. Funcția numerică $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}^*$

Dependența dintre două mărimi x şi y, astfel încât, odată cu majorarea (micşorarea) mărimii x, mărimea y se micşorează (majorează) tot de atâtea ori, se numeşte ***proporționalitate inversă***.

Proporționalitatea inversă dintre mărimile x şi y este exprimată prin relația $x\cdot y=k$, unde $k\in\mathbb{R}_+^*$ şi $x\in(0, +\infty)$.

Definiție

Funcția de forma $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\frac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}^*$, se numeşte **proporționalitate inversă**.

Graficul proporționalității inverse este o hiperbolă cu două ramuri:
a) pentru $k>0$ ramurile ei sunt situate în cadranele I şi III (fig. 9);
b) pentru $k<0$ ramurile ei sunt situate în cadranele II şi IV (fig. 10).

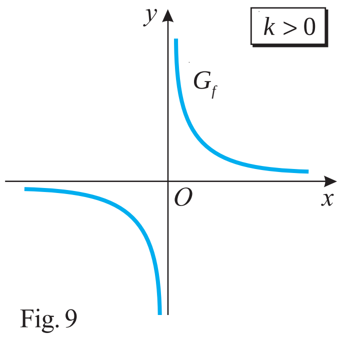


Fig. 9

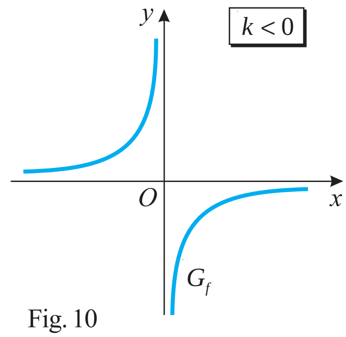


Fig. 10

Rețineți

Proprietăți ale funcției de forma $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}^*$

1° Funcția f nu are zerouri; graficul G_f nu intersectează nici axa Ox, nici axa Oy.

2° a) Pentru $k>0$ funcția f ia valori pozitive, dacă $x\in(0,+\infty)$, şi valori negative, dacă $x\in(-\infty, 0)$.
b) Pentru $k<0$ funcția f ia valori pozitive, dacă $x\in$ ____, şi valori negative, dacă $x\in$ ____.

3° a) Pentru $k>0$ funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.
b) Pentru $k<0$ funcția f este strict crescătoare pe ____, ____.

4° Pentru $k>0$ $(k<0)$ observăm: pentru valori ale lui x, pozitive sau negative, din ce în ce mai mari, funcția f ia valori din ce în ce mai mici (mari); pentru valori negative ale lui x din ce în ce mai mici, funcția f ia valori din ce în ce mai mari (mici); pentru valori pozitive ale lui x din ce în ce mai mici, funcția f ia valori din ce în ce mai mari (mici).

5° Observăm că $f(-x)=-f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

Într-adevăr, $f(-x)=\dfrac{k}{-x}=-\dfrac{k}{x}=-f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$.

Cum $f(-x)=-f(x)$, rezultă că dacă punctul $A(x_0, y_0)\in G_f$, atunci şi punctul $A'(-x_0,\ -y_0)\in G_f$. Deci, graficul G_f este simetric față de originea $O(0, 0)$ (fig. 9, fig. 10).

2.4. Funcția radical $f\colon \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

Definiție

Funcția $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, se numeşte **funcție radical**.

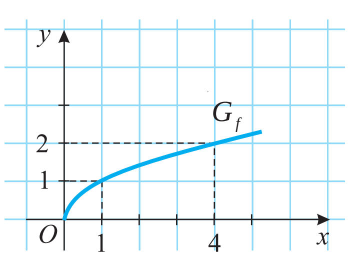


Fig. 11

Graficul funcției radical este o curbă situată în cadranul I (fig. 11).

Proprietăți ale funcției radical

1° Funcția f are un singur zerou, $x=0$, deoarece $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.
Graficul G_f intersectează axele Ox şi Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.

2° Funcția f ia numai valori pozitive pentru $x\in\mathbb{R}_+^*$.

3° Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+$.

2.5. Funcția modul (opțional)

Definiție

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, se numeşte **funcție modul**.

Investigăm

- Fie funcția modul $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.
  a) Trasați graficul G_f.
  b) Determinați proprietățile funcției f.

Rezolvare:

a) Explicitând modulul, obținem: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ dacă } x \in [0, +\infty) \\ -x, \text{ dacă } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$

Prin urmare, pentru $x \in [0, +\infty)$ trasăm graficul funcției $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, iar pentru $x \in (-\infty, 0)$ – graficul funcției $f: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

Graficul funcției $f(x) = |x|$ este un unghi de $90°$ cu vârful în originea sistemului de axe ortogonale, astfel încât $[Oy$ este bisectoarea acestuia (fig. 12).

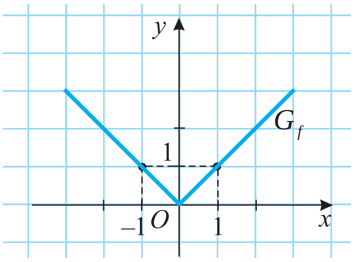


Fig. 12

b) ***Proprietăți ale funcției modul***

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, funcția f are un singur zerou: $x = 0$.

2° Deoarece $|x| \geq 0$, rezultă că pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ funcția f ia valori pozitive.

3° Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, +\infty)$. (Demonstrați!)

Aplicăm

- Trasați graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -|3 - x|$.

Rezolvare:

Explicitând modulul, obținem:

$$h(x) = -|3 - x| = \begin{cases} x - 3, \text{ dacă } x \in (-\infty, 3] \\ 3 - x, \text{ dacă } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Graficul funcției h este reprezentat în figura 13.

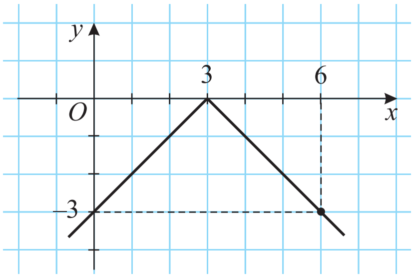


Fig. 13

Exerciții și probleme

Fixăm cunoştințele

1. Fie punctele: $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(-2, -11)$; $(-2, 10)$; $(-3, 16)$. Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: a) $f(x) = 4x - 3$;
b) $f(x) = -3x + 4$;
c) $f(x) = -5x + 1$.

2. *Lucrați în perechi!*
Fie funcția: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x - 4$;
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 5$.
a) Reprezentați grafic funcția f.
c) Precizați semnul funcției f.
b) Aflați zeroul funcției f.
d) Precizați monotonia funcției f.

3. Fie funcția: 1) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -0{,}25x$;
2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 7x$.
a) Reprezentați grafic funcția g.
b) Aflați zeroul funcției g.
c) Precizați semnul funcției g.
d) Precizați monotonia funcției g.

4. Determinați, fără a reprezenta grafic funcția, dacă este crescătoare sau descrescătoare funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin formula:
a) $f(x) = \sqrt{15}x + 3$; b) $f(x) = -\sqrt{3}x - 5$;
c) $f(x) = -x$; d) $f(x) = 7{,}(8)x$.

5. Determinați, fără a reprezenta graficul funcției, în care cadrane sunt situate ramurile hiperbolei – graficul funcției $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = -\frac{2}{3x}$;

c) $f(x) = -\frac{\sqrt{7}}{x}$; d) $f(x) = -\frac{1+\sqrt{19}}{x}$.

6. Fie funcția radical $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$, și $x \in \{4, 7, 9, 25, -36, 0, -49\}$.

Aflați valorile respective ale funcției f.

7. Completați formula cu un număr real, astfel încât funcția obținută $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \square\, x - 1$; b) $f(x) = -\square\, x + 3$;

c) $f(x) = \frac{\square}{x}$; d) $f(x) = -\frac{\square}{x}$

să fie: 1) strict crescătoare pe mulțimea D;

2) strict descrescătoare pe mulțimea D.

8. *Investigați!* *Adevărat* sau *fals*.

a) Dacă $f(\sqrt{2}) = -3$, atunci $-3 \in D(f)$, iar $\sqrt{2} \in E(f)$.

b) Dacă $D(f) = [-2, \sqrt{5})$, atunci $f(\sqrt{5})$ nu există.

c) Dacă $E(f) = (-1, 10)$, atunci există valoarea x_0 a argumentului astfel încât $f(x_0) = 5$.

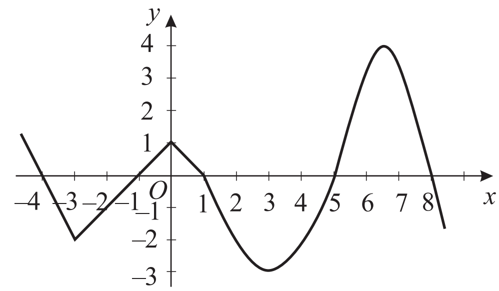
d) Domeniul de definiție al funcției definită prin formula $f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{3-x}}$ este mulțimea vidă.

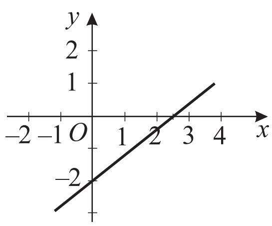
9. Examinați graficul G_f din figura alăturată. Aflați:

a) zerourile funcției f;

b) intervalele de semn constant ale funcției f;

c) intervalele de monotonie ale funcției f.





10. (EG, 2016) În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$. Utilizând desenul, scrieți în casetă una dintre expresiile „pozitiv” sau „negativ”.

„Zeroul funcției f este un număr $\square$”.

Formăm abilitățile și aplicăm

11. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale, utilizând programul Advanced Grapher, graficele funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + b$, pentru:

a) $b = -1$; b) $b = 0$; c) $b = 2$.

Ce ați observat?

12. *Lucrați în grup!* Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x$, și $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4x$;

b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, și $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 1 - 2x$.

Ce ați observat?

13. Determinați funcția de gradul I, știind că:

a) $f(1) = 4$ și $f(0) = -3$;

b) $f(0) = 2$ și $f(-2) = 5$;

c) $f(\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{3}$ și $f(2\sqrt{6}) = 3\sqrt{3}$;

d) $f(-1) = 3$ și $f(2) = -1$.

14. Reprezentați grafic funcția $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:

a) $f(x) = -\frac{3}{x}$; b) $f(x) = \frac{3}{4x}$;

c) $f(x) = -\frac{1}{2x}$; d) $f(x) = \frac{5}{x}$.

Determinați proprietățile funcției f.

15. Reprezentați graficul funcției $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x} - 1$;

c) $f(x) = \sqrt{x} + 1$; d) $f(x) = 0{,}5\sqrt{x}$.

16. *Lucrați în perechi!* Formulați exemple de dependențe funcționale:

a) din viața cotidiană; b) din alte discipline școlare.

17. Trasați graficul funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \frac{5x-5}{x-1}$; b) $f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x}}{x+1}$;

c) $f(x) = \frac{3\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

18. Fie m un parametru real şi funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$: a) $f(x)=(m-2)x+4$; b) $f(x)=(m+4)x+m-6$.
Aflați valorile lui m pentru care funcția f este: 1) crescătoare; 2) descrescătoare.

19. *Lucrați în perechi!* Reprezentați grafic funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{|x|}$; b) $f(x)=\sqrt{|x-2|}$; c) $f(x)=\begin{cases}-x, \text{ dacă } x\le 0\\ \sqrt{x}, \text{ dacă } 0<x\le 4\\ 2, \text{ dacă } x>4.\end{cases}$

20. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x-3}$. Arătați că există $A, B\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)=A+\dfrac{B}{x-3}$.

21. (EG, 2019) Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1-a^2$. Determinați valorile reale ale lui a, pentru care graficul funcției f trece prin originea sistemului de coordonate, iar funcția f este strict descrescătoare.

Problemă pentru campioni **22.** Scrieți o funcție de argument natural, definită cu ajutorul unei formule, ale cărei valori să fie numere prime pentru orice valoare a argumentului.

23. *Lucrați individual!* **Proiect.** Observați, pe parcursul unei săptămâni, cum se schimbă zi de zi, la aceeaşi oră, temperatura aerului în localitatea voastră. Reprezentați grafic rezultatele obținute. Determinați prin formule funcțiile asociate fiecărei porțiuni de grafic.

§ 3. Funcția de gradul II

3.1. Funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Investigăm

- Fie un pătrat cu latura a (fig. 14). Scrieți o funcție care să descrie dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale.

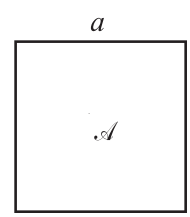


Fig. 14

Rezolvare:
Aria unui pătrat cu lungimea laturii a este $\mathscr{A}=a^2$. Prin urmare, dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale este descrisă de funcția $g\colon (0, +\infty)\to(0, +\infty)$, $g(x)=x^2$.
Funcția g ne conduce la funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

- Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.
a) Reprezentați graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.
b) Determinați proprietățile funcției f.

Rezolvare:
a) Completăm tabelul de valori al funcției f pentru valoarea zero, unele valori negative şi pozitive ale argumentului x:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele ale căror coordonate sunt valorile din tabel. Unim aceste puncte cu o curbă continuă şi obținem graficul G_f (fig. 15).

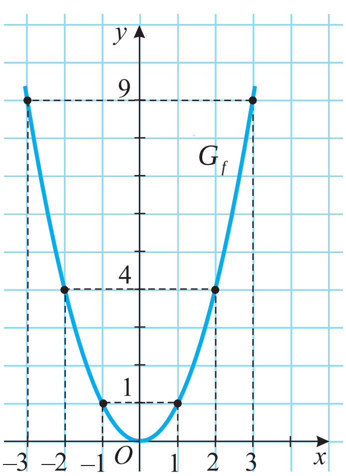


Fig. 15

Graficul G_f al funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, se numeşte ***parabolă***.
Punctul $O(0, 0)$ se numeşte ***vârful parabolei***.
Se spune că această parabolă este cu *ramurile în sus*.

Atenție! La trasarea parabolei am ținut cont de faptul că nu există trei puncte distincte coliniare situate pe parabolă.

b) ***Proprietăți ale funcției*** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, $x = 0$ este zeroul funcției f. Graficul G_f intersectează axele Ox și Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.

2° $f(x) = x^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Așadar, funcția f ia numai valori nenegative.

3° Funcția f este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ și strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

4° Remarcăm că $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Într-adevăr, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
Atunci $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f$, ceea ce înseamnă că graficul G_f este simetric față de axa Oy sau că graficul G_f admite axa Oy drept axă de simetrie (fig. 15).

Aplicăm

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Aflați valorile lui x pentru care valoarea funcției $f(x)$ este: a) 64; b) 0; c) –25.

Rezolvare:

a) $f(x) = 64 \Leftrightarrow x^2 = 64$. Așadar, $x_1 = -8$, $x_2 = 8$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$. Prin urmare, $x = 0$.

c) $f(x) = -25 \Leftrightarrow x^2 = -25$. Deci, nu există astfel de valori reale ale lui x.

3.2. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$

Investigăm

- Fie un disc de rază R (fig. 16). Scrieți o funcție care să descrie dependența ariei discului de lungimea razei lui.

Rezolvare:

Aflăm aria discului aplicând formula $\mathcal{A} = \pi R^2$.
Prin urmare, dependența ariei discului de lungimea razei acestuia este descrisă de funcția $h: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $h(x) = \pi x^2$.

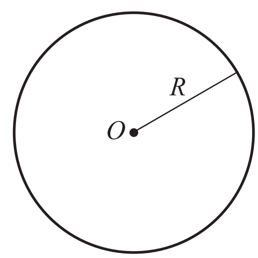
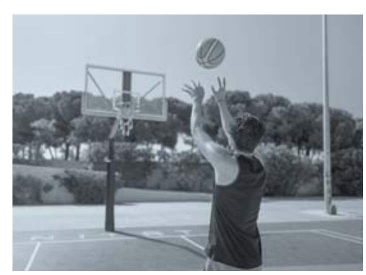


Fig. 16

Funcția h ne conduce la funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$.



- Fie funcția:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$;
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x^2$.
1) Trasați graficele funcțiilor f și g.
2) Determinați proprietățile funcțiilor f și g.

Rezolvare:

1) Completăm tabelele de valori ale funcțiilor f și g pentru valoarea zero, unele valori negative și pozitive ale argumentului x:

a)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8

b)

x	–2	–1	0	1	2
$g(x) = -2x^2$	–8	–2	0	–2	–8

Graficele G_f şi G_g, trasate „prin puncte”, sunt reprezentate în figura 17 şi respectiv 18. Graficul funcției f, precum şi graficul funcției g, se numeşte ***parabolă***.

Punctul $O(0,0)$ se numeşte ***vârful parabolei***.

Se spune că graficul funcției f este o *parabolă cu ramurile în sus*, iar graficul funcției g – o *parabolă cu ramurile în jos*.

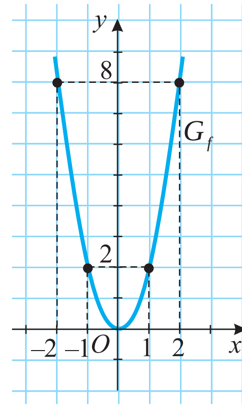


Fig. 17

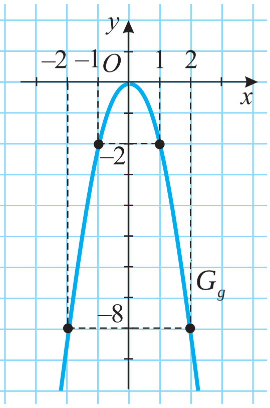


Fig. 18

2) ***Proprietăți ale funcției***

$\boxed{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2}$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
Deci, funcția f are un zerou: $x = 0$.
Prin urmare, graficul G_f intersectează axele Ox şi Oy în punctul $O(0, 0)$.

2° $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 0$. Deci, funcția f ia valori nenegative pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3° Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.

4° $D(f) = \mathbb{R}$.
Deci, din $x \in D(f)$ rezultă că şi $-x \in D(f)$.
Deoarece $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 = 2x^2 = f(x)$, rezultă că G_f este simetric față de axa Oy.

5° Punctul $x_0 = 0$ este punct de minim al funcției f şi $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$.

$\boxed{g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2}$

1° $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
Deci, funcția g are un zerou: $x = 0$.
Prin urmare, graficul G_g intersectează axele Ox şi Oy în punctul $O(0, 0)$.

2° $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0$. Deci, funcția g ia valori negative sau zero pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

3° Funcția g este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe $[0, +\infty)$.

4° $D(g) = \mathbb{R}$.
Deci, din $x \in D(g)$ rezultă că şi $-x \in D(g)$.
Deoarece $g(-x) = -2 \cdot (-x)^2 = -2x^2 = g(x)$, rezultă că G_g este simetric față de axa Oy.

5° Punctul $x_0 = 0$ este punct de maxim al funcției g şi $g(x_0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$.

Definiții

Fie $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, şi $x_0 \in A$.

- Valoarea $f(x_0)$ se numeşte **valoarea minimă** a funcției f pe mulțimea A, dacă $f(x) \geq f(x_0)$ pentru orice $x \in A$. Se notează: $f(x_0) = \min\limits_{x \in A} f(x)$. În acest caz se spune că x_0 este **punct de minim** al funcției f.
- Valoarea $f(x_0)$ se numeşte **valoarea maximă** a funcției f pe mulțimea A, dacă $f(x) \leq f(x_0)$ pentru orice $x \in A$. Se notează: $f(x_0) = \max\limits_{x \in A} f(x)$. În acest caz se spune că x_0 este **punct de maxim** al funcției f.
- Punctele de minim şi de maxim se numesc **puncte de extrem** ale funcției f, iar valorile funcției f în aceste puncte se numesc **valori extreme** ale funcției f.

Rețineți

Proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$

1° Graficul G_f este o parabolă cu vârful în originea $O(0, 0)$ şi:
a) are ramurile în sus, dacă $a > 0$;
b) are ramurile în jos, dacă $a < 0$.
Graficul G_f intersectează axele Ox şi Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.

2° Funcția f are un zerou: $x = 0$.

3° Funcția f ia valori nenegative, dacă $a > 0$, şi valori negative sau zero, dacă $a < 0$.

4° a) Pentru $a > 0$ funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.
b) Pentru $a < 0$ funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict descrescătoare pe $[0, +\infty)$.

5° a) Dacă $a > 0$, atunci $f(0) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ şi $x_0 = 0$ este punct de minim al funcției f.
b) Dacă $a < 0$, atunci $f(0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$ şi $x_0 = 0$ este punct de maxim al funcției f.

6° G_f este simetric față de axa Oy.

Aplicăm

• Reprezentați în acelaşi sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$, şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -0{,}5x^2$, şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x^2$.

Rezolvare:
Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor f şi g:

a)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8
$g(x) = x^2$	4	1	0	1	4

b)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x) = -0{,}5x^2$	–2	–0,5	0	–0,5	–2
$g(x) = -x^2$	–4	–1	0	–1	–4

Graficele funcțiilor f şi g sunt reprezentate în figura 19 şi respectiv 20.

a)

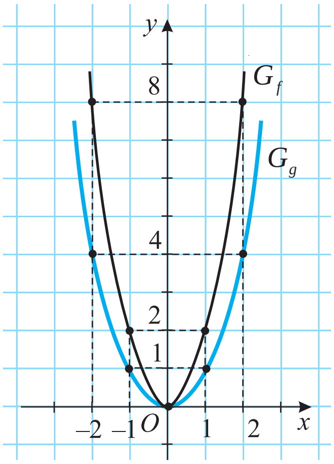


Fig. 19

b)

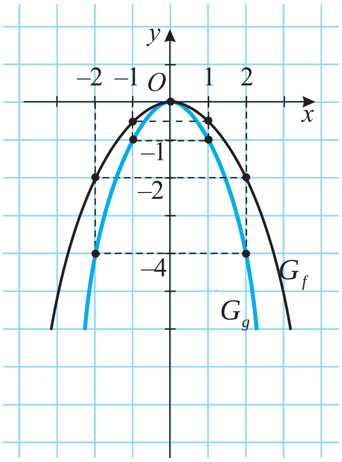


Fig. 20

Observație

Pentru funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2,\ a\in\mathbb{R}^*$, sunt posibile cazurile reprezentate în figurile 21 şi 22.

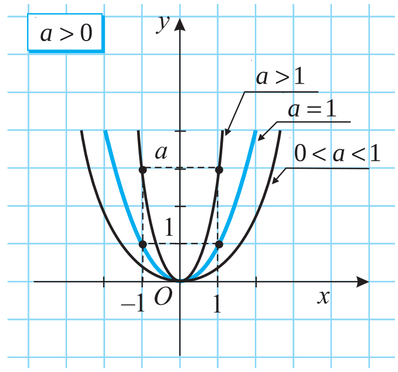


Fig. 21

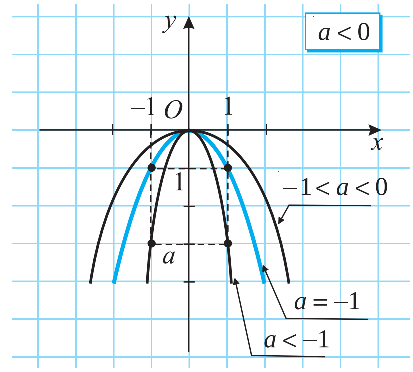


Fig. 22

3.3. Transformarea graficelor

3.3.1. Graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=ax^2+n,\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{R}^*$

Investigăm

• Fie funcția $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g şi f:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x)=\frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10

Graficele funcțiilor g şi f sunt reprezentate în figura 23.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 2 unități liniare în sus obținem punctul respectiv al graficului G_f. Astfel, graficul funcției f se obține din graficul funcției g efectuând translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei Oy, în sensul acesteia.

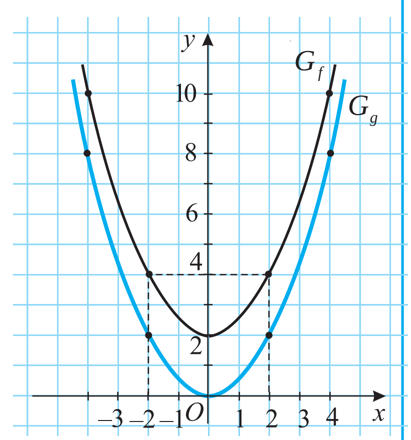


Fig. 23

Aplicăm

• Fie funcția $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{1}{2}x^2-3$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și h:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x)=\frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$h(x)=\frac{1}{2}x^2-3$	5	1,5	–1	–2,5	–3	–2,5	–1	1,5	5

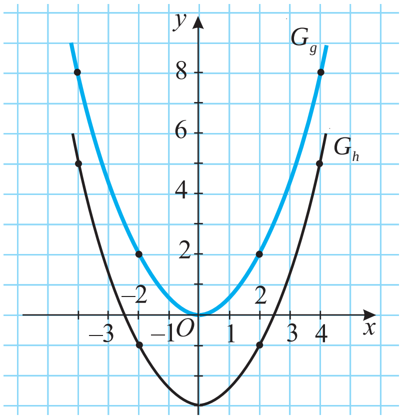


Fig. 24

Graficele funcțiilor g și h sunt reprezentate în figura 24.

Observăm că graficul funcției h se obține din graficul funcției g efectuând translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei Oy, în sensul opus acesteia.

Generalizăm Graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+n,\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{R}^*$, este o parabolă care se obține din graficul funcției $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=ax^2,\ a\neq 0$, efectuând translația de-a lungul axei Oy cu n unități liniare în sensul acesteia, dacă $n>0$, sau cu $-n$ unități liniare în sensul opus acesteia, dacă $n<0$.

3.3.2. *Graficul funcției* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a(x-m)^2,\ a\neq 0,\ m\in\mathbb{R}^*$

Investigăm

- Fie funcția $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și f:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x)=\frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5
$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5

Graficele funcțiilor g și f sunt reprezentate în figura 25.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 2 unități liniare în dreapta de-a lungul axei Ox obținem punctul respectiv al graficului G_f. Astfel, graficul funcției f se obține din graficul funcției g efectuând translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei Ox, în sensul acesteia.

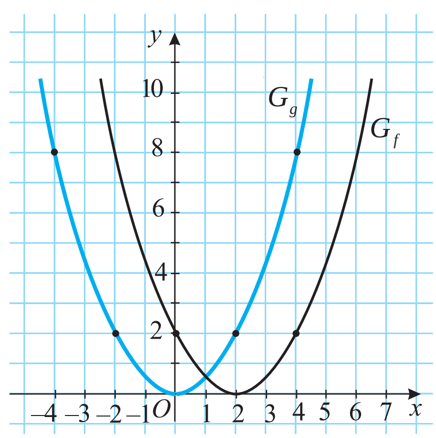


Fig. 25

Aplicăm

- Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și h:

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5
$h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32

Graficele funcțiilor g și h sunt reprezentate în figura 26.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 3 unități liniare în stânga de-a lungul axei Ox obținem punctul respectiv al graficului G_h. Astfel, graficul funcției h se obține din graficul funcției g efectuând translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei Ox, în sensul opus acesteia.

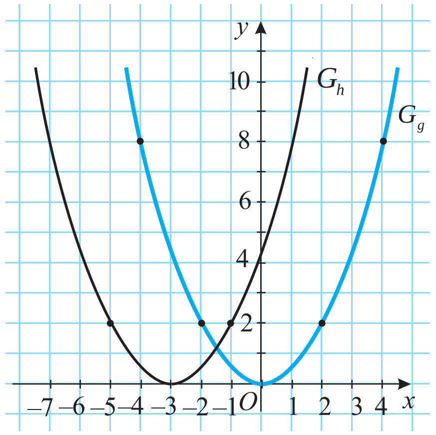


Fig. 26

Generalizăm Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = a(x-m)^2, \ a \neq 0, \ m \in \mathbb{R}^*$, este o parabolă care se obține din graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = ax^2, \ a \neq 0$, efectuând translația de-a lungul axei Ox cu m unități liniare în sensul acesteia, dacă $m > 0$, sau cu $-m$ unități liniare în sensul opus acesteia, dacă $m < 0$.

Exercițiu Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = -2x^2, \ g(x) = -2x^2 + 1, \ h(x) = -2x^2 - 3$;

b) $f(x) = -2x^2, \ g(x) = -2(x-1)^2, \ h(x) = -2(x+2)^2$.

3.4. Studiul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = ax^2 + bx + c, \ a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$

Investigăm

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = 2x^2 - x - 6$.

a) Schițați graficul funcției f.

b) Determinați proprietățile funcției f.

Rezolvare:

a) 1. Aflăm punctele de intersecție a graficului G_f cu axa Ox:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5 \text{ sau } x = 2.$$

Deci, punctele de intersecție a graficului G_f cu axa Ox sunt $A(-1{,}5; 0)$ și $B(2; 0)$.

2. Aflăm punctul de intersecție a graficului G_f cu axa Oy: $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 6 = -6$.
Prin urmare, $C(0, -6)$ este punctul de intersecție a graficului G_f cu axa Oy.

3. Determinăm axa de simetrie pentru graficul G_f:
$f\left(x+\frac{1}{4}\right)=f\left(-x+\frac{1}{4}\right)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, ceea ce demonstrează că dacă punctul $E\left(x+\frac{1}{4},\ y\right)\in G_f$, atunci și punctul $E'\left(-x+\frac{1}{4},\ y\right)\in G_f$, adică dreapta de ecuație $x=\frac{1}{4}$ este axă de simetrie pentru graficul G_f (fig. 27).

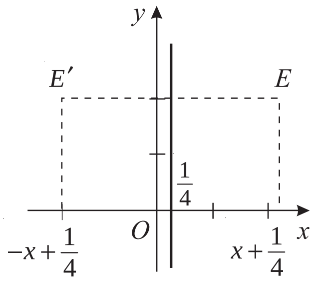


Fig. 27

4. Aflăm coordonatele vârfului parabolei.
Deoarece $x=\frac{1}{4}$ este axă de simetrie pentru G_f, rezultă că abscisa vârfului parabolei G_f este $x_0=\frac{1}{4}$, iar ordonata lui este $y_0=f(x_0)=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}-6=-\frac{49}{8}$.
Prin urmare, punctul $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ este vârful parabolei G_f.

5. Completăm tabelul de valori al funcției f pentru abscisele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axele Ox, Oy și, eventual, pentru alte valori ale lui x:

x	-2	$-1{,}5$	0	$\frac{1}{4}$	2	3
$f(x)=2x^2-x-6$	4	0	-6	$-\frac{49}{8}$	0	9

6. Trasăm „prin puncte” graficul G_f și obținem o *parabolă cu ramurile în sus* (fig. 28).

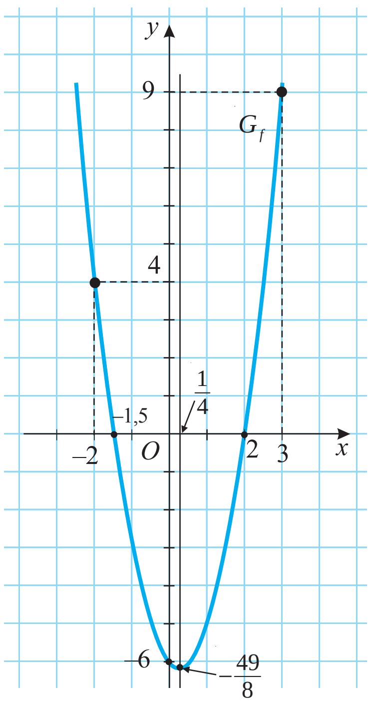


Fig. 28

b) Utilizăm graficul G_f și determinăm proprietățile funcției f:

1° f are două zerouri: $x_1=$ ____, $x_2=$ ____.

2° $f>0$ pentru $x\in$ ____ și $f<0$ pentru $x\in$ ____.

3° f este strict descrescătoare pe ____ și strict crescătoare pe ____.

4° $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f($ ____ $)=$ ____ și punctul $x=$ ____ este punct de ____ al funcției f.

Definiție

Funcția de forma $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, se numește **funcție de gradul II**.

Deoarece numărul real a este nenul, putem scrie:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \text{ sau}$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\frac{-\Delta}{4a} \qquad (1)$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$, unde $\Delta=b^2-4ac$ este discriminantul ecuației $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, asociată funcției f. Egalitatea (1) se numește ***forma canonică a funcției*** f.

Din (1) rezultă că, pentru a obține reprezentarea grafică a funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, din reprezentarea grafică a funcției $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=ax^2$, $a\in\mathbb{R}^*$, se efectuează două translații ale graficului G_g:

1) de-a lungul axei Ox cu $-\frac{b}{2a}$ unități liniare (în sensul axei Ox, dacă $-\frac{b}{2a}>0$, şi în sensul opus axei, dacă $-\frac{b}{2a}<0$);

2) de-a lungul axei Oy cu $-\frac{\Delta}{4a}$ unități liniare (în sensul axei Oy, dacă $-\frac{\Delta}{4a}>0$, şi în sensul opus axei, dacă $-\frac{\Delta}{4a}<0$).

Fie funcția: a) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x-2$; b) $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=1-x^2$.

1. Trasați: a) graficul funcției g; b) graficul funcției h.
2. Determinați: a) proprietățile funcției g; b) proprietățile funcției h.

Rețineți

Abscisa x_0 a vârfului parabolei G_f este $x_0=-\frac{b}{2a}$. Pentru a calcula ordonata y_0 a vârfului parabolei G_f, aflăm $y_0=f(x_0)$ sau $y_0=\frac{-\Delta}{4a}$.

3.4.1. Mulțimea valorilor funcției de gradul II

Când x parcurge mulțimea $\mathbb{R}$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ parcurge $[0, +\infty)$, iar $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ parcurge:

a) $[0, +\infty)$, dacă $a>0$; b) $(-\infty, 0]$, dacă $a<0$.

Prin urmare, din (1) şi din a), b) rezultă că:

1) $E(f)=\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, dacă $a>0$; 2) $E(f)=\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$, dacă $a<0$.

Aplicăm

- Fie funcția:

a) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+12$; b) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x^2-2x+1$.

Aflați $E(f)$.

Rezolvare:

a) $f(x)=x^2-7x+12=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$. Cum $a=1>0$, obținem $E(f)=\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

b) $f(x)=-3x^2-2x+1=$ ______. Deoarece $a=-3<0$, rezultă că $E(f)=$ ______.

Exercițiu Fie funcția $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x-x^2$. Aflați $E(g)$.

3.4.2. Extremele funcției de gradul II

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, şi forma ei canonică $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$, unde $\Delta=b^2-4ac$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

1) *Cazul* $a>0$

Deoarece $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ şi $a>0$, rezultă că şi $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$.

Atunci $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}\geq-\frac{\Delta}{4a}$. Deci, $f(x)\geq\frac{-\Delta}{4a}$ (2) pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Evident, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ numai pentru $x=-\frac{b}{2a}$.

Atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$ (3).

Prin urmare, din (2) şi (3) rezultă că $f(x)\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (4) pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Din (2) şi (4) rezultă că $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$ şi $x_0=-\frac{b}{2a}$ este punct de minim al funcţiei f (fig. 29).

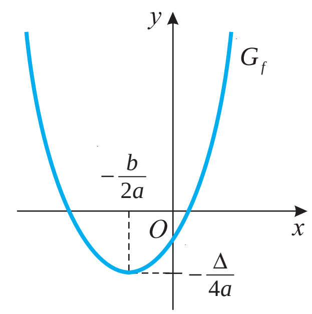


Fig. 29

2) *Cazul* $a<0$

Deoarece $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ şi $a<0$, rezultă că $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\leq 0$.

Atunci $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}\leq\frac{-\Delta}{4a}$. Deci, $f(x)\leq\frac{-\Delta}{4a}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Ţinând cont de (3), obţinem $f(x)\leq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (5) pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Din (5) rezultă că $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$ şi $x_0=-\frac{b}{2a}$ este punct de maxim pentru funcţia f (fig. 30).

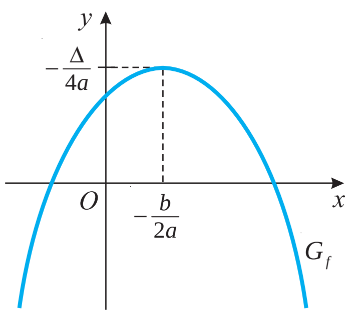


Fig. 30

Aplicăm

- Fie funcţiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+12$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-3x^2-2x+1$.

Aflaţi punctele de extrem şi extremele funcţiilor f şi g.

Rezolvare:

a) Deoarece $a=1>0$, obţinem $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-7}{2}=3{,}5$ – punct de minim al funcţiei f şi $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(3,5)=-\frac{1}{4}$.

b) Deoarece $a=-3<0$, avem $x_0=$ ______ $=$ ______ $=$ ______ – punct de ______ al funcţiei g şi $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)=g($ ______ $)=$ ______.

Exerciţiu Fie funcţia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=4-x^2$. Aflaţi punctele de extrem şi extremele funcţiei h.

3.4.3. Intervalele de monotonie ale funcţiei de gradul II

Generalizăm

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, o funcţie de gradul II.

- Dacă $a>0$, funcţia f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (fig. 29).
- Dacă $a<0$, funcţia f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ (fig. 30).
- Intervalele $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ şi $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc ***intervale de monotonie ale funcţiei*** f.

Aplicăm

• Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: a) $f(x) = 3x^2 + x - 8$; b) $f(x) = -0{,}3x^2 - 6x + 3$.
Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.
Rezolvare:
a) Deoarece $a = 3 > 0$ și $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{3 \cdot 2} = -\frac{1}{6}$, rezultă că funcția f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\frac{1}{6}\right]$ și strict crescătoare pe $\left[-\frac{1}{6}, +\infty\right)$.
b) Deoarece $a = -0{,}3 < 0$ și $-\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(-0{,}3)} = -10$, rezultă că funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, -10]$ și strict descrescătoare pe $[-10, +\infty)$.

Exercițiu Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - x$. Determinați intervalele de monotonie ale funcției g.

3.4.4. Zerourile funcției de gradul II

• Fie funcțiile: a) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 9x + 18$;
b) $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 4x^2 - 4x + 1$;
c) $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = -x^2 + x - 1$.
Aflați zerourile funcțiilor f_1, f_2, f_3.
Rezolvare:
a) $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 6$. Prin urmare, funcția f_1 are două zerouri: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ (fig. 31 a)).
b) $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$.
Deci, funcția f_2 are un zerou: $x = 0{,}5$ (fig. 31 b)).
c) $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 = 0$.
Această ecuație nu are soluții reale. (Argumentați!)
Astfel, funcția f_3 nu are zerouri (fig. 31 c)).

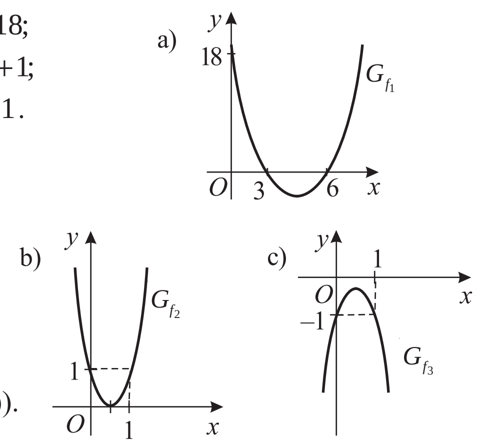


Fig. 31

Generalizăm *Zerourile funcției* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, sunt *soluțiile reale ale ecuației* $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f.

Numărul de soluții reale ale ecuației de gradul II depinde de valoarea discriminantului ei $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Dacă $\Delta > 0$, ecuația de gradul II are două soluții reale, iar funcția f – două zerouri: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
Prin urmare, graficul G_f intersectează axa Ox în două puncte: $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.

• Dacă $\Delta = 0$, ecuația de gradul II are o soluție reală, iar funcția f – un zerou: $x = -\frac{b}{2a}$.
Deci, graficul G_f are un punct comun cu axa Ox, punctul $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.

• Dacă $\Delta < 0$, ecuația de gradul II nu are soluții reale. Deci, funcția f nu are zerouri.
Prin urmare, graficul G_f nu intersectează axa Ox.

Exercițiu Fie: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 10$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x$.
Aflați zerourile funcțiilor f și g.

3.4.5. Semnul funcției de gradul II

Investigăm

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$ Determinați mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Rezolvare:

Semnul funcției f depinde de semnul discriminantului Δ al ecuației $ax^2 + bx + c = 0,$ $a \neq 0,$ asociată funcției f.

Scriem funcția f sub forma canonică: $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right].$

1) *Cazul* $\Delta < 0$

Semnul valorilor funcției f coincide cu semnul numărului a, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (fig. 32).

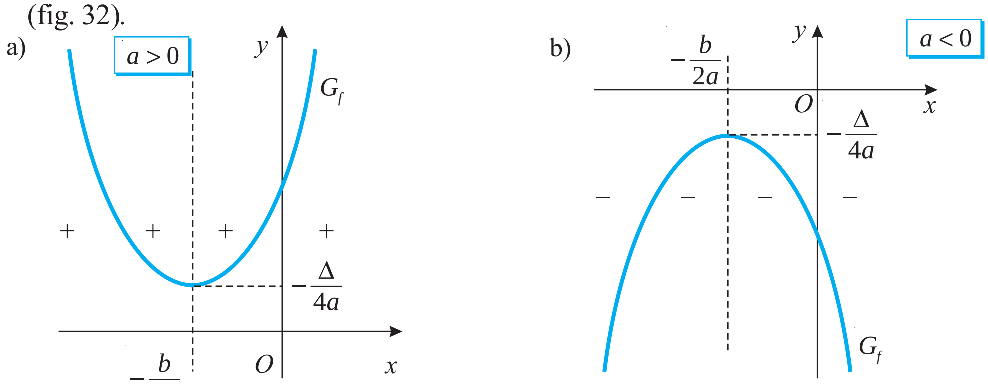


Fig. 32

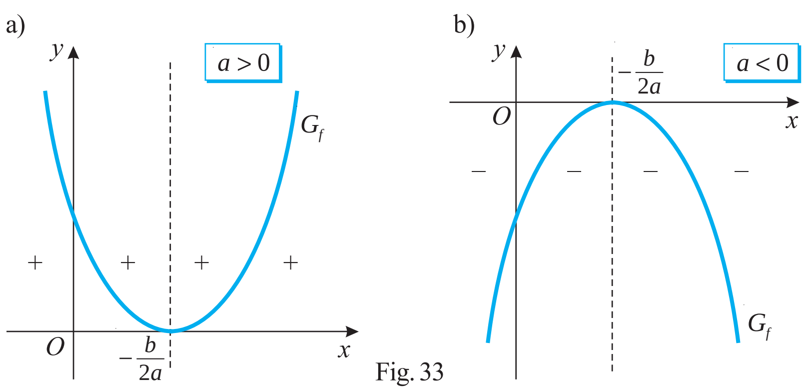


Fig. 33

2) *Cazul* $\Delta = 0$

Semnul valorilor funcției $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ coincide cu semnul numărului a, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ (fig. 33).

3) *Cazul* $\Delta > 0$

Semnul valorilor funcției f, cu zerourile $x_1 < x_2$, coincide cu semnul numărului a, pentru orice $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, și este opus semnului lui a, pentru orice $x \in (x_1, x_2)$ (fig. 34).

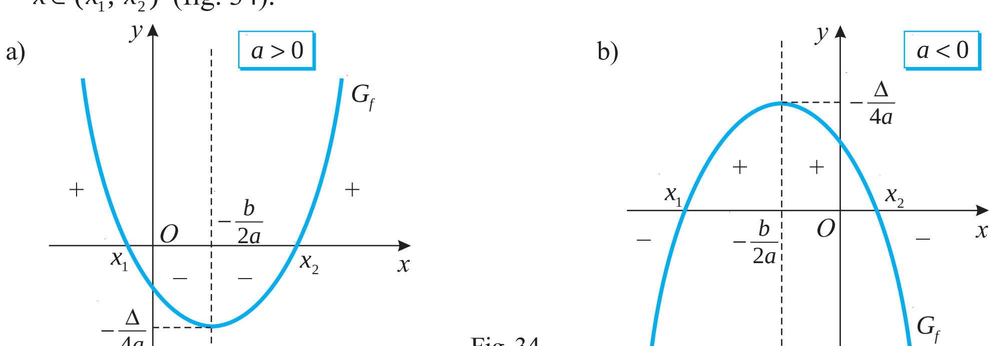


Fig. 34

Observație Atât semnul funcției de gradul II, cât și intervalele ei de monotonie pot fi identificate mai simplu folosind reprezentarea grafică a acesteia.

Exercițiu Fie: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 2$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x - 3$.
Aflați semnele funcțiilor f și g.

3.4.6. Graficul funcției de gradul II

Investigăm

Pentru a trasa graficul funcției de gradul II, procedăm astfel:

① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului G_f:
a) cu axa Ox: rezolvăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f; soluțiile ecuației sunt zerourile funcției f;
b) cu axa Oy: calculăm $f(0)$.

② Aflăm coordonatele vârfului parabolei: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$; punem în evidență axa de simetrie: dreapta $x = -\frac{b}{2a}$ este axa de simetrie a graficului funcției de gradul II.

③ Completăm tabelul, numit ***tabelul de variație*** al funcției f. Tabelul include abscisele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axele Ox (dacă există) și Oy, abscisa vârfului parabolei și, eventual, alte valori ale lui x.

④ Completând tabelul de variație, putem stabili monotonia funcției, punctele de extrem, extremele ei, precum și comportamentul graficului G_f la $-\infty$, la $+\infty$.

⑤ Trasăm graficul funcției.

Observație Cu $\searrow$ vom nota funcția descrescătoare, iar cu $\nearrow$ – funcția crescătoare.

Aplicăm

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
a) Trasați graficul funcției f.
b) Precizați monotonia, semnul și extremele funcției f.

Rezolvare:

a) ① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axa Ox: rezolvăm ecuația $x^2 - 2x + 3 = 0$, asociată funcției f; cum $\Delta = -8 < 0$, rezultă că graficul G_f nu intersectează axa Ox.

Determinăm coordonatele punctului de intersecție a graficului G_f cu axa Oy: $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$; prin urmare, graficul G_f intersectează axa Oy în punctul $(0, 3)$.

② Aflăm coordonatele vârfului parabolei: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(x_0) = 2$.

Așadar, punctul $V(1, 2)$ este vârful parabolei. Prin urmare, dreapta de ecuație $x = -\frac{b}{2a} = 1$ este axa de simetrie a graficului G_f.

③–④ Completăm tabelul de variație al funcției f:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x) = x^2 - 2x + 3$	$+\infty$	6	3	2	3	6	$+\infty$
Concluzie				min			

⑤ Trasăm graficul funcției f – parabola G_f (fig. 35).

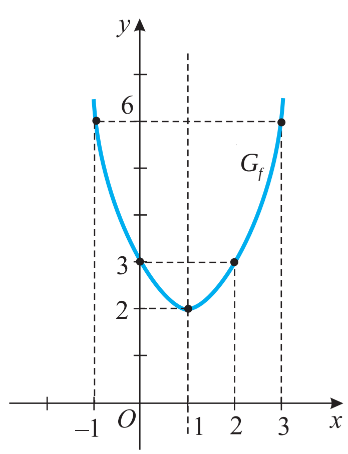


Fig. 35

b) Funcția f ia valori pozitive pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, +\infty)$.

Punctul $x = 1$ este punct de minim pentru funcția f şi $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 2$.

Exerciții și probleme

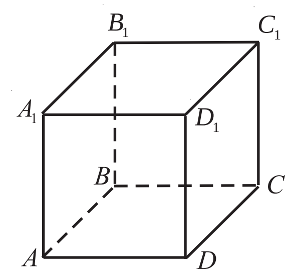
Fixăm cunoștințele

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Aflați:
a) valorile lui x pentru care $f(x)$ este: 36; -4; $0{,}25$; 100; 7; $-1{,}6$;
b) valorile lui f, ştiind că x este: $1{,}4$; $-0{,}2$; -3; $0{,}4$; 2; $\sqrt{5}$; $7{,}(2)$; $-4\sqrt{3}$.

2. *Investigați!* Fie punctele:
a) $A(2; -2)$; b) $B(1; 2)$; c) $C(-1; 0{,}5)$;
d) $D(1; -0{,}5)$; e) $E(0{,}5; 0{,}5)$.
Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției:
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$;
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -0{,}5x^2$;
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x^2$.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 3x^2$; b) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$;
c) $f(x) = -1{,}5x^2$; d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$.
1) Trasați graficul funcției f.
2) Determinați proprietățile funcției f.

4. *Lucrați în perechi!* a) Construiți o funcție care arată dependența ariei suprafeței totale a cubului de lungimea muchiei lui.
b) Reprezentați graficul acestei funcții.
c) Aflați:
1) aria totală a cubului, ştiind că lungimea muchiei lui este de: $0{,}5$ cm; $1{,}2$ dm; 3 m.
2) lungimea muchiei cubului, ştiind că aria suprafeței totale a lui este de: $16\ \text{cm}^2$; $8\sqrt{3}\ \text{dm}^2$; $4\ \text{m}^2$.



5. Completați cu numere reale, astfel încât punctul $A(\square, \square)$ să aparțină graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = -x^2$;
c) $f(x) = 3x^2$; d) $f(x) = -2{,}5x^2$;
e) $f(x) = 3x(x-2)$; f) $f(x) = -0{,}5x(x+1)$;
g) $f(x) = x^2 - x - 2$; h) $f(x) = -3x^2 + x + 1$;
i) $f(x) = x^2 + 3x + 5$.

6. Fie funcțiile: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2{,}3x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x^2$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{4}x^2$.
Precizați: a) extremele; b) monotonia; c) semnele funcțiilor.

7. Aflați zerourile funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 16x^2 - 4$; b) $f(x) = 6x^2 + 3$; c) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$.

8. *Lucrați în grup!* Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$; b) $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$; c) $f(x) = x^2 - x + 4$;
d) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$; e) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$; f) $f(x) = 9 - x^2$.
1) Trasați graficul funcției f.
2) Determinați axa de simetrie a graficului şi proprietățile funcției f.

Formăm abilitățile și aplicăm

9. *Lucrați în grup!* Trasați graficul şi determinați proprietățile funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = x^2 + 3$; b) $f(x) = 2x^2 - 1$; c) $f(x) = 3(x+2)^2$;
d) $f(x) = -2(x-1)^2$; e) $f(x) = 4(x+2)^2 - 6$; f) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$.

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 4{,}7x^2$; b) $f(x) = -3x^2 + 2$; c) $f(x) = 4(x-1)^2$;
d) $f(x) = -2(x+3)^2$; e) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; f) $f(x) = 3(x-4)^2 + 5$.
Aflați mulțimea valorilor $E(f)$.

11. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

a) $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 + 2$, $h(x) = 3x^2 - 4$;

b) $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2(x+1)^2 + 3$, $h(x) = -2(x-3)^2 - 4$.

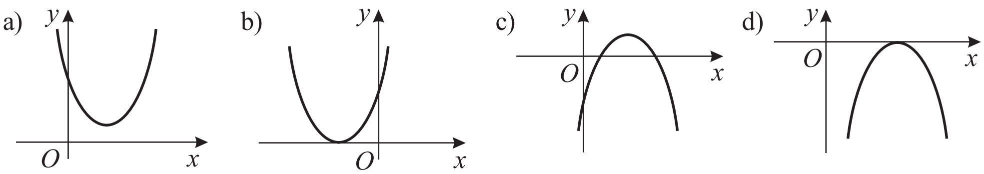
Ce ați observat?

12. *Lucrați în perechi!* Fie tabelul de variație al funcției f:

x	$-\infty$	-1	0	2	$3{,}5$	5	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	$+\infty$	18	10	0	$-2{,}25$	0	$+\infty$
Concluzie					min		

Trasați graficul funcției f.

13. Fie graficul funcției de gradul II:



Aflați semnul coeficientului a și al discriminantului Δ ai ecuației asociate funcției respective.

14. Completați cu unul din semnele „<”, „>”, „=”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

1) Dacă graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, reprezintă o parabolă cu ramurile în jos și vârful ei este situat pe axa Ox, atunci a ▢ 0, Δ ▢ 0.

2) Dacă graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, reprezintă o parabolă cu ramurile în sus și vârful ei este situat pe axa Oy, atunci a ▢ 0, Δ ▢ 0. Analizați toate cazurile posibile.

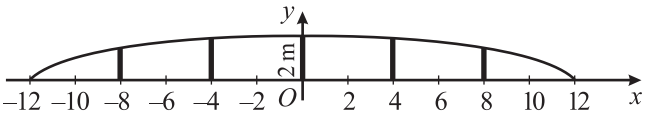
15. Fie h înălțimea (în metri) la care se află o minge aruncată în sus, t – timpul (în secunde) în care mingea s-a aflat în zbor. Dependența variabilei h de variabila t se exprimă prin formula: $h = 24t - 4{,}8t^2$.

a) Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea?

b) În cât timp mingea se va ridica în zbor și în cât timp va coborî?

c) Peste câte secunde, după ce a fost aruncată în sus, mingea va cădea pe pământ?

16. Balustrada unui pod are forma unui arc de parabolă. Înălțimea balustradei este de 2 m, iar lungimea coardei care o subîntinde – de 24 m. Balustrada are 5 stâlpi verticali, fixați în punctele care împart coarda în părți de aceeași lungime. Aflați lungimile acestor stâlpi.



17. Trasați graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

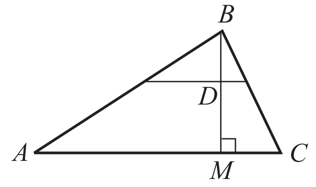
a) $f(x) = (x+2)(x-4)$; b) $f(x) = -6x(x+1)$; c) $f(x) = -2(x-3)(5-x)$;

d) $f(x) = 5(x-1)(x-3)$; e) $f(x) = -(x-3)(x-4)$; f) $f(x) = 4x(x-2)$.

18. ***Lucrați în perechi!*** Parabola 1) $y=3x^2$; 2) $y=-0{,}5x^2$ a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei Ox și cu 3 unități de-a lungul axei Oy.

a) Determinați funcția g al cărei grafic este parabola obținută în urma acestor transformări. Câte funcții pot fi determinate?

b) Reprezentați graficul G_g pentru fiecare funcție obținută.



19. ***Investigați!*** Lungimea laturii AC a triunghiului ABC este a, iar înălțimea corespunzătoare acesteia – h. Prin punctul D al înălțimii BM este dusă o dreaptă paralelă cu AC. Exprimați, dacă e posibil, ariile figurilor obținute ca funcții de variabila x, unde $x=BD$.

20. Determinați, utilizând graficele, apoi în mod analitic, punctele de intersecție a graficelor funcțiilor:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x^2-x+4$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x+2$;

b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^2$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+3$.

21. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+4)^2-1$.

a) Trasați graficul funcției f.

b) Determinați axa de simetrie a graficului funcției f.

c) Determinați proprietățile funcției f.

22. Fie h înălțimea (în metri) la care se află un acrobat în timpul saltului, iar x (în metri) distanța parcursă de el în timpul acestui salt. Dependența variabilei h de variabila x se exprimă prin formula $h(x)=-0{,}75x^2+3x$.

a) Trasați graficul funcției h pentru $x\in[0,4]$.

b) Care este înălțimea maximă la care poate să ajungă acrobatul în timpul zborului?

Dezvoltăm abilitățile și creăm

23. (EG, 2022) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+2x+m,\ m\neq 0$. Determinați valorile reale ale lui m pentru care graficul funcției f este o parabolă cu ramurile în jos și cu vârful situat pe axa absciselor.

24. Aflați valorile parametrului real a pentru care are zerouri funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$:

a) $f(x)=ax^2+7$; b) $f(x)=ax^2-4$; c) $f(x)=x^2+a$; d) $f(x)=2x^2-a$.

25. Aflați valorile coeficienților b și c, astfel încât parabola $y=x^2+bx+c$ să aibă vârful în punctul $V(-3,6)$.

26. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$,

al cărei grafic trece prin punctele $A(-2,0)$, $B(1,6)$ și care are valoarea maximă 6.

27. Formulați și rezolvați exerciții asemănătoare cu exercițiile **13**, **15**, **16**, **18**, **21**, **23**.

28. Trasați graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x)=\begin{cases}x^2-9, & \text{dacă } x\geq 3\\ 3-x, & \text{dacă } x<3;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}4-x^2, & \text{dacă } x>0\\ x-2, & \text{dacă } x\leq 0.\end{cases}$

Problemă pentru campioni

29. Trasați graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x)=x^2-6|x|-7$;

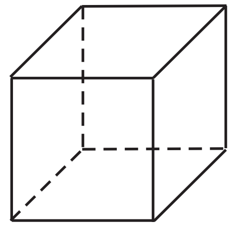
b) $f(x)=x^2-5|x+4|-26$;

c) $f(x)=|x^2-3x+2|$.

§ 4. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

Investigăm

- Fie cubul cu muchia a. Scrieți o funcție care să descrie dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale.



Rezolvare:

Volumul cubului se calculează aplicând formula $\mathcal{V} = a^3$. Prin urmare, dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale este descrisă de funcția $g: (0, +\infty) \to (0, +\infty),\ g(x) = x^3$.

Această funcție ne conduce la funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

a) Trasați graficul funcției f.

b) Stabiliți proprietățile funcției f.

Rezolvare:

a) Completăm tabelul de valori al funcției f pentru valoarea zero, unele valori pozitive și negative ale lui x:

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3$	8	1	0	1	8

Graficul trasat „prin puncte” este reprezentat în figura 36.

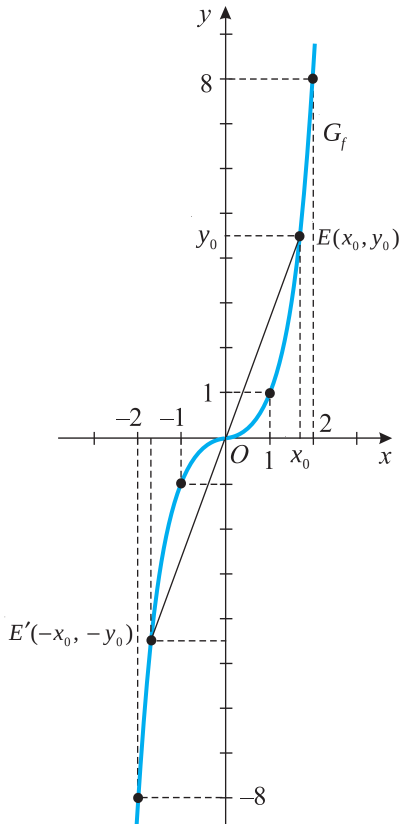


Fig. 36

b) ***Proprietăți ale funcției*** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, $x = 0$ este zeroul funcției f.

2° Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

3° Funcția f ia valori negative pentru $x \in (-\infty, 0)$ și valori pozitive pentru $x \in (0, +\infty)$.

4° Cum $f(-x) = -f(x)$, rezultă că dacă punctul $E(x_0, y_0) \in G_f$, atunci și punctul $E'(-x_0, -y_0) \in G_f$. Deci, graficul G_f este simetric față de originea $O(0, 0)$ (fig. 35).

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$, se numește ***parabolă cubică***.

5° Funcția f nu are extreme.

Aplicăm

- Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Aflați valorile lui x pentru care $f(x)$ este:

a) -64; b) $\frac{27}{8}$; c) 125.

Rezolvare:

a) $x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -4$; b) $x^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; c) $x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie punctele:

a) $A(-2, 8)$; b) $B(3, 27)$; c) $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$; d) $D(0, 1)$; e) $E(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$.

Determinați care din aceste puncte aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Aflați:

a) valorile lui x pentru care $f(x)$ este: 125; –64; –16; 3,375; –1; 0,001; –343.

b) valorile lui f, știind că x este: 0,2; $-\frac{2}{5}$; 1,3; $2\sqrt{2}$; 10; 2,(5).

Formăm abilitățile și aplicăm

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$, prin metoda grafică, ecuația: a) $x^3 = x-1$; b) $x^3 = -2x$; c) $x^3 = 3x+2$; d) $x^3 = 2-x$.

4. *Lucrați în perechi!* 1) Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x^3$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + 1$.

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 2$.

2) Aflați semnele funcțiilor f și g. 3) Aflați extremele funcțiilor f și g.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

5. Aflați extremele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:

a) $f(x) = x^3 - 2$; b) $f(x) = (x+2)^3$; c) $f(x) = 2(x-8)^2 + 1$; d) $f(x) = -5x + 1$.

6. Trasați graficul și precizați monotonia funcției: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

7. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^3$ și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x^3|$.

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Fie funcția:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - 2x$; b) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$; c) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\frac{2}{x}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$; e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x + 1$; f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

Precizați care dintre următoarele puncte aparțin graficului G_f:

1) $A(-1, 1)$; 2) $B(1, 1)$; 3) $C(0, 1)$; 4) $O(0, 0)$;

5) $D(1, -2)$; 6) $E(0, 3)$; 7) $F(4, 2)$; 8) $M(-2, 1)$.

2. *Lucrați în perechi!*

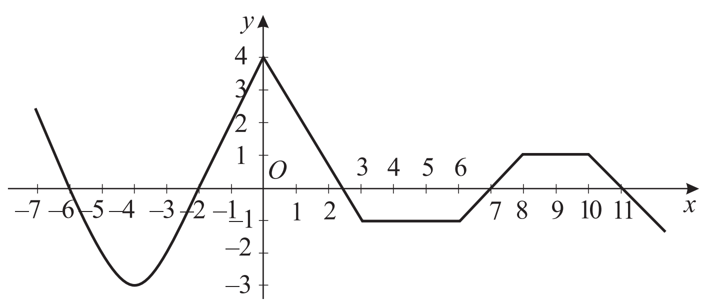
Analizați graficul G_f. Aflați:

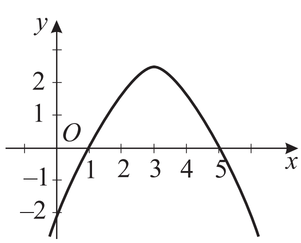
a) zerourile funcției f;

b) intervalele de monotonie ale funcției f;

c) intervalele de semn constant ale funcției f;

d) punctele de extrem și extremele funcției f.





3. (EG, 2023) În desenul alăturat este reprezentat graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \ne 0$. Scrieți în casetă una dintre expresiile „pozitiv” sau „negativ”, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată.

„Valoarea maximă a funcției f este un număr ________”.

Formăm abilitățile și aplicăm

4. Fie mulțimea $P = \{a, b, c, d\}$. Construiți prin diagrame, cel puțin patru funcții, definite pe mulțimea P cu valori în P.

5. Scrieți o formulă care să exprime dependența lungimii cercului de raza lui. Este această dependență o proporționalitate directă?

6. Mariana avea 15 lei. După ce a procurat x timbre la prețul de 0,5 lei, i-au rămas y lei.

a) Exprimați printr-o formulă dependența lui y de x.

b) Aflați domeniul de definiție al funcției obținute.

7. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -1{,}5x + b$, pentru $b \in \{-2, 0, 2, 5\}$. Ce ați observat?

8. Trasați graficul și determinați proprietățile funcției $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, dacă:

a) $f(x) = -\dfrac{4}{x}$; b) $f(x) = \dfrac{1}{2x}$; c) $f(x) = \dfrac{7}{x}$; d) $f(x) = -\dfrac{1}{5x}$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$, prin metoda grafică, ecuația:

a) $\sqrt{x} = 3x - 2$; b) $\dfrac{25}{x} = x$; c) $\dfrac{1}{2x} = 2x$; d) $3x^2 = 5x - 2$.

10. *Lucrați în perechi!* Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + n$, pentru $n \in \{-1, 0, 1, 3\}$. Ce ați observat?

11. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2(x - m)^2$, pentru $m \in \{-1, 0, 1, 3\}$. Ce ați observat?

12. Apa dintr-un ceainic electric, la un moment dat, avea temperatura de 10°C. În continuare, peste fiecare minut, temperatura apei creștea cu 4°C, astfel încât a atins valoarea de 100°C. Exprimați printr-o formulă dependența temperaturii apei *y* (în grade Celsius) de timpul încălzirii *t* (în minute). Schițați graficul acestei dependențe.

Utilizând graficul, aflați:

a) temperatura apei peste:

1) 5 minute; 2) 10 minute;
3) 15 minute; 4) 20 de minute de la începutul încălzirii.

b) peste câte minute temperatura apei a atins valoarea de:

1) 50°C; 2) 70°C; 3) 100°C.

13. *Lucrați în grup!* Trasați graficul și stabiliți proprietățile funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = 1 - x - x^2$; b) $f(x) = x^2 - 6x + 9$; c) $f(x) = 6x - 1 - 9x^2$; d) $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

14. Aflați axa de simetrie a graficului și extremele funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 5x^2 + 3$; b) $f(x) = x^2 - 4$; c) $f(x) = -3(x + 2)^2$; d) $f(x) = 6x^2 - x + 3$.

15. Definiți printr-o formulă funcția de gradul II care este:

a) strict crescătoare pe $(-\infty, 4]$ și strict descrescătoare pe $[4, +\infty)$;

b) strict descrescătoare pe $(-\infty, -2]$ și strict crescătoare pe $[-2, +\infty)$.

16. *Investigați!* Parabola – graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2$, a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei *Oy* și cu 3 unități de-a lungul axei *Ox*.

a) Determinați funcția *g* al cărei grafic este parabola obținută în urma efectuării acestor transformări ale graficului funcției *f*. Câte funcții *g* ați determinat?

b) Trasați graficul fiecărei funcții obținute.

c) Determinați proprietățile fiecărei funcții obținute.

17. Aflați coordonatele punctelor de intersecție cu axele *Ox* și *Oy* a graficului funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = 2x^2 - x - 15$; b) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

18. Dați exemple de utilizare a funcțiilor de gradul II în sport.

19. În figura alăturată este prezentat graficul modificării prețului (în lei) a 1 kg de coarne la piață într-o săptămână (luni–duminică).

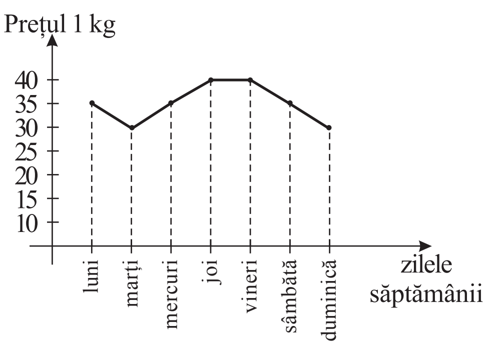
Determinați:

a) Cât costă 1 kg de coarne joi? Dar duminică?

b) În care dintre zile prețul a fost cel mai mare? Care a fost acel preț?

c) În care dintre zile prețul a fost cel mai mic? Care a fost acel preț?

d) În care dintre zile prețul nu s-a schimbat?



20. *Lucrați în perechi!* Un fotbalist şutează spre poartă. Traiectoria mingii poate fi descrisă de funcția definită prin formula $f(x)=-0{,}0125x^2+0{,}5x$, unde x – distanța (în metri), parcursă de minge de la începutul şutului, y – înălțimea (în metri) la care se ridică mingea deasupra terenului de fotbal.

a) Trasați graficul acestei funcții, pentru $x\in[0,\ 30]$.

b) Aflați înălțimea maximă la care poate să ajungă mingea.

c) Determinați distanța maximă parcursă de minge de la începutul şutului.

21. Grăbindu-se la şcoală un elev nu închidea ermetic robinetul. Se cunoaşte, că într-o oră curge 0,5 litri de apă din robinet. Elevul pleacă de acasă în fiecare zi la ora 7.30 şi se întoarce la 14.30. Calculați

a) pierderea de apă în timpul absenței elevului timp de o săptămână şcolară;

b) costul acestei ape pierdute (pentru 1 m³ – 15,3 lei, 1 $l=0{,}001$ m³).

c) Reprezentați grafic dependența apei pierdute (l) față de timpul (ore) cât curge apa din robinet pe zi.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

22. Definiți printr-o formulă funcția de gradul I care satisface condiția:

a) $f(2+x)=-5x+3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$; b) $f(3x-1)=1-2x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

23. Trasați graficul funcției:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3x^2-2, & \text{dacă } x\le 1\\ \sqrt{x}, & \text{dacă } x>1;\end{cases}$ b) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\begin{cases}-x^3+9, & \text{dacă } x\le -2\\ -\dfrac{2}{x}, & \text{dacă } -2<x<2\\ -0{,}5x, & \text{dacă } x\ge 2.\end{cases}$

24. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+bx+c$.
Determinați coeficienții b şi c, ştiind că vârful parabolei G_f este punctul $A(-2,\ 4)$.

25. Determinați funcția de gradul II al cărei grafic trece prin punctele:

a) $A(-3,\ 0),\ B(2,\ 5)$ şi care are valoarea maximă 5;

b) $A(0,\ 2),\ B(-1,\ 4)$ şi care are valoarea minimă 3.

26. Trasați graficul funcției:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3|x|-4$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|0{,}2x+5|$; c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|3x^2-x-2|$.

27. Rezolvați în $\mathbb{R}$, prin metoda grafică, ecuația:

a) $x^3=x^2-x+1$; b) $2x=x^3-4$.

28. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-x+1$. Pentru care valori reale ale lui a are loc relația $f(a)=-3f(-a)+6$?

29. Aflați valorile cea mai mică şi cea mai mare ale funcției $f:\ D\to\mathbb{R}$ (D – domeniul de definiție):

a) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$.

30. (EG, 2021) Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-mx+m^2,\ m\ne 0$. Determinați valorile reale ale lui m, pentru care funcția f este monoton crescătoare şi graficul funcției f intersectează axa Oy într-un punct cu ordonata egală cu 4.

Problemă pentru campioni **31.** Trasați graficul funcției:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+x^3$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-x^3$.

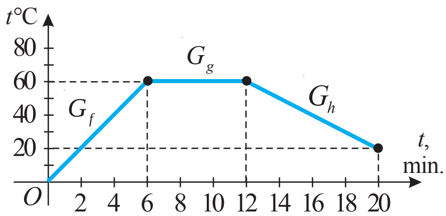
32. *Lucrați în grup!* **Proiect STREAM.** *Funcțiile în arte.*

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Test sumativ

Varianta I

1. În desen este reprezentat graficul variației temperaturii apei timp de 20 de minute:



a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „G_f este graficul unei funcții crescătoare”.

A **F**

b) Aflați cu câte grade a crescut temperatura apei în primele 6 minute.

c) Aflați cu câte grade s-a schimbat temperatura apei în ultimele 8 minute.

d) Aflați perioada în care temperatura apei nu s-a schimbat.

e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele G_f, G_g și G_h.

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care ambele funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-4)^2$, și $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{4}{x}$, sunt descrescătoare. Argumentați răspunsul.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - 5x - 3$.

a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „<”, „=” sau „>”, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată: „$f(0)$ $\square$ $f(-1)$”.

b) Trasați graficul G_f.

c) Determinați $E(f)$.

d) Completați casetele:

$f \nearrow$ pentru $x \in \square$;

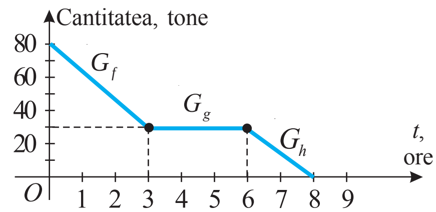
$f \searrow$ pentru $x \in \square$;

$\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \square$.

e) Formulați un exemplu din fizică referitor la aplicarea funcției de gradul II.

Varianta II

1. În desen este reprezentat graficul de descărcare a grânelor dintr-un depozit timp de 8 ore:



a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „G_f este graficul unei funcții crescătoare”.

A **F**

b) Aflați cu cât s-a micşorat cantitatea de grâne în primele 3 ore.

c) Aflați cu cât s-a micşorat cantitatea de grâne în ultimele 2 ore.

d) Aflați perioada în care nu s-au efectuat lucrări în depozit.

e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele G_f, G_g și G_h.

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care ambele funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+2)^2$, și $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = -\frac{8}{x}$, sunt crescătoare. Argumentați răspunsul.

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „<”, „=” sau „>”, astfel încât să obțineți o propoziție adevărată: „$f(-2)$ $\square$ $f(1)$”.

b) Trasați graficul G_f.

c) Determinați $E(f)$.

d) Completați casetele:

$f \searrow$ pentru $x \in \square$;

$f \nearrow$ pentru $x \in \square$;

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \square$.

e) Formulați un exemplu din viața cotidiană privind aplicarea funcției de gradul II.

Capitolul
4 Ecuații. Sisteme de ecuații

Cea mai importantă misiune a civilizației este de a-l învăța pe om să gândească.

Thomas Edison

§ 1. Ecuații de forma $ax + b = 0,\ a, b \in \mathbb{R}$. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de ecuație cu o necunoscută

Ne amintim

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

  a) $2x-3=5$; b) $x^2+8=0$; c) $0{,}25x(8x+4)+5=2(x^2+0{,}5x+2)+1$.

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R}$. $2x-3=5 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$. $S=\{4\}$.

b) DVA: $\mathbb{R}$. $x^2+8=0 \Leftrightarrow x^2=-8$. $S=\varnothing$.

c) DVA: $\mathbb{R}$. $0{,}25x(8x+4)+5=2(x^2+0{,}5x+2)+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad} \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. $S=\mathbb{R}$.

- Fie ecuațiile $(x-3)(x+1)=0$ și $2x^2-4x-6=0$.

  Stabiliți dacă ele sunt echivalente.

Rezolvare:

DVA al ambelor ecuații este $\mathbb{R}$. $(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=3$ sau $x=-1$. $S_1=\{-1, 3\}$.
Mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2-4x-6=0$ este $S_2=\{-1, 3\}$.
Deci, $(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0$, deoarece mulțimile soluțiilor lor sunt egale: $S_1=S_2=\{-1, 3\}$.

Definiție

Egalitatea de forma $A(x)=B(x)$, unde $A(x)$, $B(x)$ sunt expresii în care apare necunoscuta x, se numește **ecuație cu necunoscuta *x***.

Observație

Ecuația poate fi cu mai multe necunoscute. De exemplu, $5x-3y=3$ este o ecuație cu două necunoscute, $3u+2v-5t=0$ este o ecuație cu trei necunoscute.

Definiție

Valoarea necunoscutei care transformă ecuația într-o propoziție adevărată se numește **soluție** a ecuației.

Rețineți

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu S.
A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.
O ecuație poate avea o mulțime finită sau infinită de soluții sau poate să nu aibă soluții.

Rețineți

Rezolvarea unei ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acesteia.

Definiții

- Mulțimea valorilor necunoscutei (necunoscutelor) pentru care au sens toate expresiile din ecuație se numeşte **domeniul valorilor admisibile** (DVA) al ecuației.
- Două ecuații cu aceeaşi necunoscută (aceleaşi necunoscute) se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Între ecuațiile echivalente se scrie simbolul „$\Leftrightarrow$”.

Exercițiu Stabiliți dacă sunt echivalente ecuațiile:
a) $x^2+5=0$ şi $1+2x^2=0$;
b) $2-3x=4(x+0{,}5)$ şi $x^2+4=0$.

Rețineți

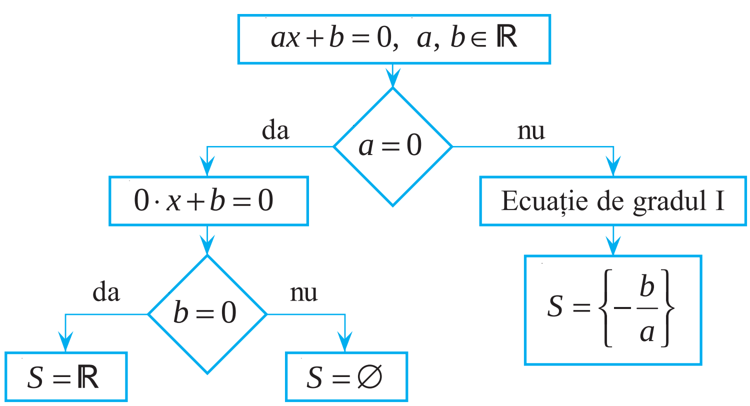
Ecuațiile echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al ecuației inițiale) se numesc ***echivalente în această mulțime***.

1.2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

- Aplicând următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale, obținem ecuații echivalente:

1. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow B(x)=A(x)$.
2. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\pm C(x)=B(x)\pm C(x)$, unde expresia $C(x)$ are sens pentru orice $x\in \text{DVA}$ al ecuației inițiale.
3. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\cdot C(x)=B(x)\cdot C(x)$, unde expresia $C(x)$ are sens şi $C(x)\neq 0$ pentru orice $x\in \text{DVA}$ al ecuației inițiale.
4. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow \dfrac{A(x)}{C(x)}=\dfrac{B(x)}{C(x)}$, unde expresia $C(x)$ are sens şi $C(x)\neq 0$ pentru orice $x\in \text{DVA}$ al ecuației inițiale.

Schema rezolvării ecuației de forma $ax+b=0,\ a, b\in\mathbb{R}$



Definiții

- Ecuația de forma $ax+b=0,\ a, b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, se numeşte **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.
- a, b se numesc **coeficienții ecuației**.

Ecuația de gradul I cu o necunoscută are ***soluția unică*** numărul $-\dfrac{b}{a}$. Deci, $S=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

1.3. Ecuații reductibile la ecuația de gradul I cu o necunoscută

Unele ecuații pot fi reduse la ecuații de gradul I cu o necunoscută cu ajutorul unor substituții sau aplicând relațiile de echivalență.

Exemplu Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $x^2 - 2x + 3 = x(x+2) - 5$; b) $\frac{2x}{x+3} = \frac{5x}{x+3} - 9$.

Rezolvare:

a) DVA: .

$x^2 - 2x + 3 = x(x+2) - 5 \Leftrightarrow$ → desfacem parantezele

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = x^2 + 2x - 5 \Leftrightarrow$ → aplicăm relația de echivalență 2

$\Leftrightarrow -4x = -8 \,|:(-4) \Leftrightarrow$ → aplicăm relația de echivalență 4

$\Leftrightarrow x = 2$.

Răspuns: $S =$.

b) DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Notând $\frac{x}{x+3} = t$, obținem ecuația de gradul I

$$2t = 5t - 9 \Leftrightarrow 3t - 9 = 0$$

cu necunoscuta t, care are soluția 3. Revenind la necunoscuta x, obținem în DVA:

$$\frac{x}{x+3} = 3 \Leftrightarrow x = 3(x+3) \Leftrightarrow x = -4{,}5.$$

Cercetăm dacă soluția obținută aparține DVA: $-4{,}5 \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; deci, $-4{,}5 \in$ DVA.

Răspuns: $S = \{-4{,}5\}$.

1.4. Ecuații de gradul I cu o necunoscută, cu parametru (opțional)

Ecuațiile de gradul I cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluțiilor ecuației în funcție de valorile parametrului.

Exemplu Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $mx - 3 = 2x + 5m$, unde m este un parametru real.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}$. $mx - 3 = 2x + 5m \Leftrightarrow x(m-2) = 5m + 3 \Leftrightarrow (m-2)x = 5m + 3$.

- Dacă $m = 2$, ecuația devine $0 \cdot x = 13$. Deci, ecuația nu are soluții.
- Dacă $m \neq 2$ $(m \in \mathbb{R} \setminus \{2\})$, obținem $x = \frac{5m+3}{m-2}$.

Răspuns: Pentru $m = 2$, $S = \varnothing$; pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $S = \left\{\frac{5m+3}{m-2}\right\}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile de gradul I:

a) $2x - 1 = 0$; b) $3(x-1) = 5$; c) $\frac{1}{x-1} = 2$; d) $x^2 - x = 0$;

e) $3x = 0$; f) $6x = -4$; g) $2x + \frac{1}{x} + 3 = 0$; h) $-\sqrt{5}x + 2{,}5 = 0$.

2. *Investigați!* Determinați care dintre elementele mulțimii $\{-2; -1; 0; 1{,}5; 5\}$ este soluție a ecuației:

a) $3x - 2 = x - 6$; b) $\frac{x+1}{x} = 1$; c) $(x+2)(x-5) = 0$;

d) $x(x+1{,}5) = 0$; e) $\frac{2x-1}{x-2} = 2$; f) $x(x+1{,}5)(x-5) = 0$.

3. Aflați DVA al ecuației:

a) $2(x-5) - 4 = 5x + 1$; b) $\frac{3}{x-5} = 4$; c) $x(x+3) = 0$.

4. *Lucrați în perechi!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x-1=0$; b) $-\frac{3}{4}x=\frac{1}{5}$;

c) $0{,}5x+4=0$; d) $3-2x=0$;

e) $1{,}4+2x=0$; f) $-\frac{5}{7}x-\frac{1}{3}=0$.

5. Aflați zeroul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x-1$; b) $f(x)=2-6x$;

c) $f(x)=-\sqrt{19}x$; d) $f(x)=\sqrt{5}x-2\sqrt{5}$.

6. Aflați zerourile funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x-0{,}5$; b) $f(x)=-8x+\sqrt{8}$;

c) $f(x)=-0{,}3x-2{,}8$.

Formăm abilitățile și aplicăm

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2(x-1)+3(x+2)=5x+4$;

b) $6-3(2-x)+4x=7-x$;

c) $-1{,}4(5-x)+2{,}5(2+x)=-3{,}6+x$;

d) $5+7(1-x)-5x=x-8$.

8. *Lucrați în perechi!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația cu ajutorul unei substituții:

a) $\frac{4}{x-5}=7-\frac{3}{x-5}$; b) $-\frac{3(x+2)}{x}=\frac{2(x+2)}{x}+5$;

c) $\frac{5t}{t+1}=-\frac{1}{2}+\frac{3t}{t+1}$; d) $\frac{0{,}5a+1{,}5}{2a}=9-\frac{a+3}{a}$.

9. Completați, astfel încât propoziția obținută să fie adevărată:

a) $3(x-1)-2x=4 \Leftrightarrow 2x+5=$ ▭ $-x$; b) $4x+2(1-x)=$ ▭ $\Leftrightarrow x-3(x+4)=5-2x$.

10. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$-3(1-z)=4z-8$	30	$2z-3(4-z)=12+z$
$2,(5)t-\frac{2}{3}(t+1)=0$	?	$\frac{2}{9}(2-t)-4,(6)t=6$

11. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$2(5-3x)+4x=7-x$	81	$8-(3-4x)-x=17$
$9\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)-5x=8$	?	$14-2(x+5)+3x=6$

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile și determinați cuvântul cifrat.

Ecuația	**R**	**A**	**B**	**O**	**V**
$3x-5=10$	-5	$\frac{5}{3}$	5	3	$-\frac{5}{3}$
$-x+6{,}5=x+0{,}5$	3	7	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$12-x=3(x-4)$	0	6	12	-6	-3
$\sqrt{3}\cdot x=0$	$-\sqrt{3}$	2	1	$\sqrt{3}$	0
$x^2-2=x(x-0{,}2)$	2	0,2	-10	10	1

Dezvoltăm abilitățile și creăm

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(3x-1)^2-4(5x+6)=9(x^2-x+1)+2$; b) $\frac{1}{2}(1-5x)+4(x^2-4)-\frac{3}{4}=\frac{5}{8}(2-x)+4x^2-3x$;

c) $2x^3-x+3=5(x+\frac{2}{5}x^3-2)-4x$; d) $3x(x^2-x+1)-4x=5x^2+2(1-x^2)+3x^3-x$;

e) $(4x-1)(4x+1)-5x=-4(x-4x^2)-7(x+3)$; f) $2(3x-1)(3x+1)=(x+2)^3-x(x^2-8)$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|x|=2x+1$; b) $|2-x|=-0{,}5x+4$; c) $|2x+1|=-x$; d) $\frac{2}{3}|5t-1|=\frac{1}{3}t+2$.

15. Știind că m este un parametru real, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $mx-6=3x+4$; b) $3-mx=2m(x+1)-1$;

c) $mx+m+3=x+4$; d) $2(mx+x)-3(x+4)=5-m$.

16. Formulați un exercițiu asemănător cu exercițiul **12** și propuneți-l colegilor și colegelor.

§ 2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

2.1. Formula de rezolvare

1 Un teren de forma unui triunghi dreptunghic trebuie îngrădit. Se știe că lungimea uneia dintre catetele triunghiului este cu 5 m mai mică decât lungimea ipotenuzei, iar lungimea celeilalte catete este cu 3 m mai mică decât lungimea primei catete. Aflați lungimea gardului.

Rezolvare:

Fie x lungimea ipotenuzei. Atunci $(x-5)$ este lungimea unei catete, iar $(x-8)$ – lungimea celeilalte catete. Conform condiției problemei și teoremei lui Pitagora, obținem ecuația $(x-5)^2+(x-8)^2=x^2 \Leftrightarrow x^2-26x+89=0$, cu soluțiile $x_1=13-4\sqrt{5}$, $x_2=13+4\sqrt{5}$.

Constatăm că numai $13+4\sqrt{5}$ satisface condiția problemei. (Precizați de ce $13-4\sqrt{5}$ nu satisface condiția problemei.) Deci, lungimea ipotenuzei este de $(13+4\sqrt{5})$ cm. Atunci lungimile catetelor sunt de $(5+4\sqrt{5})$ m și $(8+4\sqrt{5})$ m. Deci, gardul are lungimea de $(26+12\sqrt{5})$ m.

Răspuns: $(26+12\sqrt{5})$ m.

Ecuația $x^2-26x+89=0$ este o ecuație de gradul II cu o necunoscută.

Ne amintim

Definiții

- Ecuația de forma $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul II cu necunoscuta *x***.
- Numerele a, b, c se numesc **coeficienții ecuației** de gradul II; c se mai numește **termenul liber**.

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu S.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

I. Cazuri particulare ale ecuației de gradul II

1. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$	**2.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$	**3.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$
$\boldsymbol{ax^2+bx=0}$ $ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0.$ $S=\left\{0, -\frac{b}{a}\right\}.$	$\boldsymbol{ax^2+c=0}$ $S=\varnothing$, dacă $a \cdot c > 0$; $S=\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}$, dacă $a \cdot c < 0$.	$\boldsymbol{ax^2=0}$ $ax^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$ $S=\{0\}.$

Aplicăm

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $-x^2+0{,}5x=0$; b) $\sqrt{2}x^2+1=0$; c) $-2x^2+5=0$; d) $\sqrt{5}x^2=0$.

Rezolvare:

a) $-x^2+0{,}5x=0 \Leftrightarrow x(x-0{,}5)=0 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=0{,}5$. *Răspuns*: $S=\{0; 0{,}5\}$.

b) $\sqrt{2}x^2+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2=-1$. *Răspuns*: $S=\varnothing$.

c) $-2x^2+5=0 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow x=$ ______ sau $x=$ ______. *Răspuns*: $S=$ ______.

d) $\sqrt{5}x^2=0 \Leftrightarrow x=$ ______. *Răspuns*: $S=$ ______.

Rețineți

Împărțind coeficienții oricărei ecuații de gradul II $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$, la coeficientul a, obținem ecuația echivalentă $x^2+px+q=0$, numită ***ecuație de gradul II, forma redusă***, unde $p=\frac{b}{a}$, iar $q=\frac{c}{a}$.

II. Cazul general: $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

Existența și numărul soluțiilor reale ale ecuației de gradul II sau ale ecuației de gradul II, forma redusă, depind de semnul discriminantului $\Delta=b^2-4ac$, respectiv $\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q$.

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$			$x^2+px+q=0$		
$\Delta=b^2-4ac$			$\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q$		
$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta_1>0$	$\Delta_1<0$	$\Delta_1=0$
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Nu are soluții în $\mathbb{R}$.	$x=-\frac{b}{2a}$	$x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\Delta_1}$, $x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\Delta_1}$	Nu are soluții în $\mathbb{R}$.	$x=-\frac{p}{2}$
$S=\left\{\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	$S=\varnothing$	$S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$	$S=\left\{-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\Delta_1}\right\}$	$S=\varnothing$	$S=\left\{-\frac{p}{2}\right\}$

Aplicăm

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $2x^2-3x-2=0$; b) $x^2-11x+30=0$.

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R}$. $\Delta=b^2-4ac=25$.

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\cdot 2}=2$.

Răspuns: $S=\{-0{,}5;\ 2\}$.

b) DVA: $\mathbb{R}$. $\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q=\frac{1}{4}$.

$x_1=\square-\square=\square$; $x_2=\square+\square=\square$.

Răspuns: $S=\{5,\ 6\}$.

Observație

În cazul în care coeficientul b este un număr par, adică $b=2k,\ k\in\mathbb{Z}^*$, ecuația de gradul II ia forma $ax^2+2kx+c=0,\ a\neq 0$. Discriminantul acestei ecuații este

$$\Delta=(2k)^2-4ac=4(k^2-ac)$$

și formulele de rezolvare devin: $x_1=\frac{-k-\sqrt{k^2-ac}}{a}$, $x_2=\frac{-k+\sqrt{k^2-ac}}{a}$.

Notând $\Delta_1=k^2-ac$, formulele de rezolvare devin: $x_1=\frac{-k-\sqrt{\Delta_1}}{a}$, $x_2=\frac{-k+\sqrt{\Delta_1}}{a}$.

Aplicăm

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2-8x+3=0$.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}$. Știind că $a=2,\ c=3,\ b=-8=2\cdot(-4)$, obținem:

$$k=-4,\ \Delta_1=k^2-ac=16-6=10.$$

Atunci $x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{10}}{2}=2-0{,}5\sqrt{10}$, $x_2=\frac{\square+\sqrt{\square}}{2}=\square+\square$.

Răspuns: $S=\{2-0{,}5\sqrt{10},\ 2+0{,}5\sqrt{10}\}$.

2.2. Relații între soluții și coeficienți

Ne amintim

Teorema lui Viète

Fie ecuația $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$ (1)

Dacă numerele reale x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației (1), atunci:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Fie ecuația $x^2+px+q=0.$ (3)

Dacă numerele reale x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației (3), atunci:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (4)$$

Folosind relațiile lui Viète (2), (4), soluțiile unor ecuații de gradul II cu o necunoscută pot fi determinate fără a rezolva efectiv ecuația.

Aplicăm

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $2x^2-3x-2=0$; b) $x^2-7x+12=0.$

Rezolvare:

a) Aflăm două numere reale x_1, x_2, astfel încât $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-1$ și $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$. Prin încercări, obținem $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=2$.

Răspuns: $S=\{-0{,}5;\ 2\}$.

b) Aflăm două numere reale x_1, x_2, astfel încât $x_1\cdot x_2=q=\square$ și $x_1+x_2=-p=\square$.

Prin încercări, obținem $x_1=3$, $x_2=4$.

Răspuns: $S=\{3,\ 4\}$.

Ne amintim

Reciproca teoremei lui Viète

Dacă numerele reale x_1 și x_2 verifică relațiile (2), atunci x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației (1).

Dacă numerele reale x_1 și x_2 verifică relațiile (4), atunci x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației (3).

Observație

Folosind reciproca teoremei lui Viète, dacă se cunosc soluțiile x_1 și x_2, poate fi formată o ecuație de gradul II cu o necunoscută, care va avea aceste soluții.

Aplicăm

- Scrieți o ecuație de gradul II cu o necunoscută care are soluțiile $x_1=-5$, $x_2=2$.

Rezolvare:

Cum $-5+2=-3=-p$ și $(-5)\cdot 2=-10=q$, obținem ecuația $x^2+3x-10=0$.

2.3. Ecuații reductibile la ecuația de gradul II cu o necunoscută

Unele ecuații mai complicate pot fi reduse la ecuații de gradul II prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

De exemplu, ecuațiile de forma $ax^4+bx^2+c=0,\ a\neq 0$, numite ***ecuații bipătrate***, se rezolvă efectuând substituția $x^2=t$, unde $t\geq 0$. În consecință, obținem ecuația de gradul II $at^2+bt+c=0,\ a\neq 0$. Revenind apoi la necunoscuta x, obținem soluțiile ecuației inițiale.

Aplicăm

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$; b) $(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0$.

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R}$. Fie $x^2 = t$, $t \geq 0$. Obținem ecuația $2t^2 - t - 1 = 0$, cu soluțiile $t_1 = -\frac{1}{2}$, $t_2 = 1$. Ecuația $x^2 = -\frac{1}{2}$ nu are soluții reale, iar soluțiile ecuației $x^2 = 1$ sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

Răspuns: $S = \{-1, 1\}$.

b) DVA: $\mathbb{R}$. Notăm $x^2 - 3x = z$. Obținem ecuația de gradul II $z^2 + 3z - 28 = 0$, cu soluțiile $z_1 = -7$, $z_2 = 4$. Revenind la necunoscuta x, obținem ecuațiile $x^2 - 3x = -7$ și $x^2 - 3x = 4$.

Ecuația $x^2 - 3x + 7 = 0$ nu are soluții reale.

Ecuația $x^2 - 3x - 4 = 0$ are soluțiile $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

Răspuns: $S = \{-1, 4\}$.

2.4. Descompunerea în factori a expresiilor de forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

Ne amintim

Dacă $a \neq 0$ și $\Delta \geq 0$, atunci $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (5), unde x_1 și x_2 sunt soluțiile reale ale ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Aplicăm

• Descompuneți în factori expresia $2x^2 - 3x - 2$.

Rezolvare:

Ecuația $2x^2 - 3x - 2 = 0$ are soluțiile $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Prin urmare, $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$.

2.5. Ecuații de gradul II cu o necunoscută, cu parametru (opțional)

Ecuațiile de gradul II cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluției ecuației în funcție de valorile parametrului.

• Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuațiile $x^2 + mx + 4 = 0$ și $x^2 + 4x + m = 0$ au o soluție reală comună.

Rezolvare:

Fie x_1 soluția comună. Substituind $x = x_1$, obținem $x_1^2 + mx_1 + 4 = 0$ și $x_1^2 + 4x_1 + m = 0$.

Prin scădere, obținem $x_1(m - 4) + 4 - m = 0 \Leftrightarrow (m - 4)x_1 = m - 4$.

Pentru $m = 4$ ecuațiile devin identice: $x_1^2 + 4x_1 + 4 = 0$. Soluția lor comună este $x_1 = -2$.

Pentru $m \neq 4$ obținem $x_1 = 1$. Înlocuind $x_1 = 1$ în una dintre ecuații, obținem $m = -5$.

Atunci ecuațiile devin $x^2 - 5x + 4 = 0$ și $x^2 + 4x - 5 = 0$, cu soluțiile $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ și respectiv $x_3 = 1$, $x_4 = -5$.

Deci, pentru $m = 4$ ecuațiile au soluția comună $x = -2$, iar pentru $m = -5$ soluția lor comună este $x = 1$.

Răspuns: $m \in \{-5, 4\}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. *Investigați!* Fie ecuațiile: a) $5x^2 - x - \sqrt{2} = 0$; b) $3{,}4x^2 - x + 1 - \sqrt{2} = 0$; c) $(1 - \sqrt{3})x^2 + 7x - 3{,}5 = 0$.
Găsiți numărul care lipsește: a) 5; ___; $-\sqrt{2}$; b) $-3{,}4$; -1; ___; c) ___; 7; $-3{,}5$.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $x^2 - 16 = 0$; b) $t^2 - 25 = 0$; c) $5x^2 + 2x = 0$; d) $\sqrt{3}x^2 + 5 = 0$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $4x^2+4x+1=0$; b) $5x^2-7x+2=0$; c) $3x^2-2x+1=0$;
d) $-4x^2+6x-5=0$; e) $0{,}1x^2-x-2{,}5=0$; f) $\sqrt{5}x^2+\sqrt{2}x+4=0$.

4. ***Lucrați în grup!*** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația de gradul II, forma redusă:

a) $x^2-2x+1=0$; b) $x^2-8x+12=0$; c) $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$;
d) $x^2+1\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}=0$; e) $x^2-3x-4=0$; f) $x^2-\sqrt{3}x+6=0$.

5. ***Investigați!*** Fără a rezolva ecuația, determinați semnele soluțiilor acesteia:

a) $3x^2-x-2=0$; b) $x^2+x-12=0$; c) $-t^2+2t+8=0$; d) $u^2-10u+4=0$; e) $2x^2+5x+2=0$.

Formăm abilitățile și aplicăm

6. ***Lucrați în perechi!*** Scrieți o ecuație de gradul II cu soluțiile:

a) 1 și 3; b) –4 și 5; c) –1 și –2; d) $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{4}$; e) $2-\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$.

7. Folosind teorema lui Viète, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-2x-15=0$; b) $3x^2-x-2=0$; c) $2x^2+x-1=0$; d) $x^2-4x+5=0$.

8. Descompuneți în factori expresia: a) x^2-2x-3; b) $2x^2-x-3$; d) $-3x^2-5x-2$;

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $\frac{x^2-5x}{x-4}=\frac{4}{4-x}$; b) $\frac{x^2-2x}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$; c) $\frac{3{,}5x^2}{x+2}=\frac{4x+6}{2+x}$.

10. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației: 1) $5x^2+3x-9=0$; 2) $-3x^2-x+1=0$; 3) $2{,}8x^2+2x-3{,}5=0$.

Fără a rezolva ecuația, calculați: a) x_1+x_2; b) $x_1\cdot x_2$; c) $x_1^2+x_2^2$; d) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

11. Aflați două numere pozitive, știind că media lor aritmetică este 12,5, iar media geometrică este 10.

12. Suma unui număr real cu întreitul inversului acestuia este 4. Aflați numărul. Găsiți toate soluțiile.

13. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\sqrt{3}x^2+4x+\sqrt{3}=0$; b) $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{7}x+\sqrt{3}=0$; c) $(2x+1)^2=(4x+1)^2$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația bipătrată:

a) $x^4-5x^2+4=0$; b) $x^4+5x^2+4=0$; c) $a^4-a^2-2=0$; d) $2x^4-3x^2+1=0$;

15. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația: a) $x(x-\sqrt{7})=0$; b) $4x^2-4x+1=0$; c) $\sqrt{11}x^2=0$; d) $-3x^2+x+4=0$.

16. ***Lucrați în perechi!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile și ordonați cuvintele de mai jos în funcție de soluțiile nenegative ale ecuațiilor respective (indicate în paranteze). Comentați rezultatul obținut.

1) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$; 2) $2x^2-x-1=0$; 3) $x^2-3x-10=0$; 4) $-8x^2-3x+0{,}5=0$; 5) $x(x+\sqrt{15})=0$.

culege $\left(\frac{1}{8}\right)$	seamănă (1)	cine $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	vânt (5)	furtună (0)

17. Determinați zerourile funcției $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x-x^2$; b) $f(x)=-3x^2+x+2$; c) $f(x)=0,(4)x^2-1$; d) $f(x)=4{,}5x^2-2x-1$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

18. Descompuneți în factori expresia: a) t^4+t^2-2; b) t^4-t^2-2.

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $x(x-1)(x-2)(x-3)=3$; b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=3$.

20. Folosind metoda substituției, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $5x^2+3|x|-9=0$; b) $2x^2-1=|x|(|x|-2)$.

21*. Aflați valoarea parametrului real m, știind că ecuațiile $2x^2-3x+1=0$ și $3x^2+m(x+2)+1=0$ au o soluție comună.

22*. Știind că m este un parametru real, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $mx^2-3x-1=0$; b) $(m-2)x^2+x-4=0$; c) $x^2-mx+4=0$.

§ 3. Ecuații raționale

În ecuațiile a) $3x-5=2(1-x)$, b) $2x+\frac{3x}{x-1}=x+1$, c) $1-\frac{x-1}{x^2-4}=-\frac{2x}{x-2}$, membrul stâng şi membrul drept sunt expresii raționale, adică expresii formate din numere şi litere cu ajutorul operațiilor de adunare, scădere, înmulțire şi împărțire. Astfel de ecuații sunt numite ***ecuații raționale***. În ecuațiile b), c) necunoscuta apare atât la numărătorul, cât şi la numitorul raportului algebric respectiv. Astfel de ecuații se mai numesc ***ecuații raționale cu necunoscuta la numitor***.

Ecuația rațională cu necunoscuta la numitor se rezolvă conform următorului *algoritm*:

① Se determină DVA al ecuației.

② Se trec toți termenii în membrul stâng al ecuației.

③ Se aduce membrul stâng la forma $\frac{A}{B}$.

④ Se aplică regula egalării cu zero a unui raport.

⑤ Se rezolvă ecuația obținută ($A=0$).

⑥ Se verifică dacă valorile obținute satisfac condițiile precizate, inclusiv dacă aparțin DVA.

⑦ Se scrie răspunsul.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{2}{x^2-1}-\frac{3x}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=0.$$

$3x^2+2x-1=0$ şi $x^2-1\neq 0$.

Ecuația $3x^2+2x-1=0$ are soluțiile $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$.

Deoarece $x_1=-1\notin$ DVA, această valoare nu poate fi soluție a ecuației date. $x_2=\frac{1}{3}\in$ DVA.

Răspuns: $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Unele ecuații raționale cu necunoscuta la numitor, mai complicate, pot fi reduse la ecuații mai simple prin diverse transformări sau prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

Aplicăm

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0$.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, deoarece $x^2-2x+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=1$ şi ambele rapoarte din membrul stîng nu au sens pentru $x=1$.

$$\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0\Leftrightarrow\frac{2x^2}{(x-1)^2}+\frac{3x}{x-1}-2=0\Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+3\left(\frac{x}{x-1}\right)-2=0.$$

Introducem necunoscuta auxiliară t. Fie $\frac{x}{x-1}=t$. Obținem ecuația $2t^2+3t-2=0$, cu soluțiile $t_1=-2$, $t_2=\frac{1}{2}$. (Verificați!) Revenind la necunoscuta x, obținem ecuațiile $\frac{x}{x-1}=-2$ şi $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$.

Prima ecuație are soluția $x_1=\frac{2}{3}$, iar a doua – soluția $x_2=-1$. (Verificați!)

Valorile $x_1=\frac{2}{3}$ şi $x_2=-1$ aparțin DVA. Deci, ambele sînt soluții ale ecuației date.

Răspuns: $S=\left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile raționale cu necunoscuta la numitor:

a) $x-1=3$; b) $x^2-3x+4=0$; c) $\frac{t^2+1}{4}-\frac{t}{3}=\frac{1}{2}$;

d) $\frac{x}{x^2+2}-\frac{1}{x}=0$; e) $\frac{2}{t}-\frac{3}{t+1}=1$; f) $z^2-\frac{3}{z}-2=0$.

2. *Investigați!* Precizați care dintre elementele mulțimii $\{-1, 0, 1, 5\}$ sunt soluții ale ecuației:

a) $\frac{x^2}{x-5}=\frac{2x-1}{x-5}$; b) $\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-1}$; c) $\frac{3}{x}=x-2$; d) $\frac{t}{t^2-1}=\frac{t}{t+1}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{1}{x}=2$; b) $-\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{2x}=2{,}5$; d) $-\frac{3\sqrt{2}}{7x}=-\frac{1}{7}$.

4. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{4}$; b) $-\frac{5}{3x-2}=\frac{1}{2}$; c) $\frac{2x}{1-x}=\frac{2}{5}$; d) $\frac{3x+2}{x+2}=-\frac{1}{2}$.

5. *Lucrați în perechi!* Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

a) $\frac{2x-1}{x-1}=\frac{5x^2-1}{x-1}$; b) $\frac{x^2+2}{2+x}=\frac{2x-1}{x+2}$; c) $\frac{x(x-1)}{1-3x}=\frac{x^2+4x}{3x-1}$; d) $\frac{x^2}{x^2+5}=\frac{2x(x-3)}{x^2+5}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{2}{2x-5}-\frac{5}{5-2x}=\frac{4}{7}$; b) $\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{3-x}$; c) $\frac{2x^2}{x^2-16}=\frac{3x}{x+4}$.

Formăm abilitățile și aplicăm

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x}{x^2-6x+9}=\frac{5x}{x-3}$; b) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x}{1-x}$; c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+3}{1-x^2}$; d) $\frac{x}{4x^2-4x+1}=-\frac{4x}{2x-1}$.

8. *Investigați!* Completați, astfel încât ecuațiile să fie echivalente:

a) $\frac{x^2}{x-1}=\frac{2-3x}{1-x} \Leftrightarrow 2x^2-\boxed{\quad}x+4=0$; b) $\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x+2} \Leftrightarrow 5(x-\boxed{\quad})(2x-\boxed{\quad})=0$.

9. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\frac{0{,}5}{x+3}=\frac{2}{4x+12}$; b) $\frac{1{,}2}{2x-1}=-\frac{6}{5-10x}$; c) $\frac{2x-1}{x^2-8x+16}=\frac{4x-2}{2(x-4)^2}$.

10. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{3}{x-5}-\frac{x}{x+1}=\frac{10}{(x+1)(x-5)}$; b) $\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{21}{x+3}$;

c) $\frac{x^2+x}{x-1}+2x=\frac{3x-1}{x-1}+2$; d) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x+4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$.

11. Aflați valorile reale ale lui t pentru care:

a) suma rapoartelor algebrice $\frac{6t+18}{3t-1}$ și $\frac{4t-26}{2t+5}$ este egală cu 4;

b) diferența rapoartelor algebrice $\frac{3t+1}{1-2t}$ și $\frac{t-1}{t+1}$ este egală cu $\frac{1}{2}$;

c) suma rapoartelor algebrice $\frac{t+1}{t-5}$ și $\frac{10}{t+5}$ este egală cu produsul lor;

d) diferența rapoartelor algebrice $\frac{6}{2t-1}$ și $-\frac{2}{t-2}$ este egală cu produsul lor.

12. *Lucrați în perechi!* Stabiliți legitatea şi determinați ecuația omisă:

a) $\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{x-3}{x+3}=3\dfrac{1}{3}$ $\quad x^2-36=0$

$\dfrac{5x+7}{x-2}-\dfrac{2x+21}{x+2}=8\dfrac{2}{3}$ $\quad \boxed{?}$

b) $\dfrac{2(t-1)}{t+3}+\dfrac{t+3}{t-3}=5$ $\quad \dfrac{x+6}{x-5}=0$

$\dfrac{4}{t+3}-\dfrac{5}{3-t}+1=\dfrac{1}{t-3}$ $\quad \boxed{?}$

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(x^2-4)(2x+5)=0$; b) $\left(\dfrac{2+x}{x}-1\right)\cdot(6x-5)=0$; c) $(2x^2-3x+1)\cdot\left(\dfrac{x}{3x-1}+x\right)=0$;

d) $\left(\dfrac{2x}{x+2}+\dfrac{3}{x-2}+2\right)\cdot\left(x+1-\dfrac{3}{x+2}+8\right)=0$; e) $(5x^2-7x+8)\cdot\left(\dfrac{2x^2}{x-1}-\dfrac{5x}{x-1}+4\right)=0.$

14. (EG, 2018) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\dfrac{x^2-2}{x^2+x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2x-3}{x}$.

15. (EG, 2015) Fie A mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $5x^2-9x-2=0$. Determinați mulțimea $A\cap[-\sqrt{2};1]$.

Dezvoltăm abilitățile şi creăm

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\dfrac{7}{2x^2+4x}+\dfrac{1}{2x-4}=\dfrac{2}{4-x^2}$; b) $\dfrac{x^2+4}{x^2-4}+\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{3x-2}{x^2-4}$;

c) $\dfrac{1}{t-8}+\dfrac{1}{t-6}+\dfrac{1}{t+6}+\dfrac{1}{t+8}=0$; d) $\dfrac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{3}{x-3}$.

17*. Ştiind că m este un parametru real, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\dfrac{x-m}{m}=\dfrac{2m}{x-m}$; b) $\dfrac{m}{x}+\dfrac{m-1}{x-1}=2$;

c) $\dfrac{x}{m}-2=\dfrac{m-1}{1-x}$; d) $\left|x+\dfrac{1}{x}-3\right|=m-3$.

§ 4. Sisteme de ecuații

4.1. Noțiunea de sistem de ecuații

1 Într-un chioşc erau 1305 ziare şi reviste. După ce s-au vândut 100 de ziare şi 50 de reviste, ziare au rămas de două ori mai multe decât reviste.
Aflați câte reviste şi câte ziare erau la început.

Rezolvare:
Fie x numărul inițial de ziare şi y numărul inițial de reviste.
Atunci, conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații cu două necunoscute

$\begin{cases} x+y=1305, \\ x-100=2(y-50), \end{cases}$ cu soluția (870, 435). (Verificați!)

Răspuns: Inițial, în chioşc erau 870 de ziare şi 435 de reviste.

Generalizăm Fie ecuațiile $A_1(x,y)=B_1(x,y)$ şi $A_2(x,y)=B_2(x,y)$. Dacă se pune problema să se afle soluțiile lor comune, adică perechile ordonate de numere reale $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ care satisfac ecuația întâi ***şi*** ecuația a doua, atunci se spune că este dat ***un sistem de două ecuații cu două necunoscute***. El se notează: $\begin{cases} A_1(x,y)=B_1(x,y), \\ A_2(x,y)=B_2(x,y). \end{cases}$

Un sistem poate fi de trei ecuații cu trei necunoscute, de două ecuații cu trei necunoscute etc.

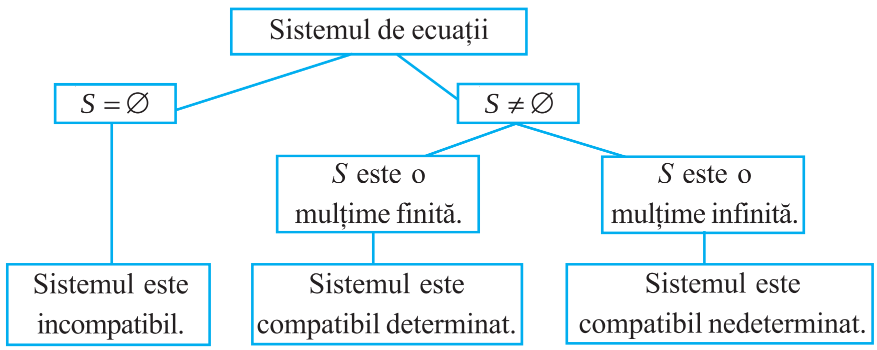
Definiție

Se numește **soluție a sistemului** de două ecuații cu două necunoscute perechea ordonată de numere $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, care este soluție comună pentru ***ambele*** ecuații ale acestuia.

Rețineți

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.
Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații (notată cu S) este ***intersecția*** mulțimilor soluțiilor ecuațiilor acestui sistem.

Relațiile dintre numărul de soluții și tipul sistemului de ecuații



Rezolvarea sistemului de ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acestuia.

Domeniul valorilor admisibile (DVA) al unui sistem de ecuații este ***intersecția*** domeniilor valorilor admisibile ale ecuațiilor sistemului.

Definiție

Două sisteme de ecuații de aceleași necunoscute se numesc **echivalente** dacă mulțimile de soluții ale acestora sunt egale.

Între sistemele de ecuații echivalente se scrie simbolul „$\Leftrightarrow$”.

Observație

Sistemele echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al sistemului inițial) se numesc ***echivalente în această mulțime***.

Transformări care pot fi aplicate pentru a obține sisteme echivalente:

Exemple

1. Schimbând ordinea ecuațiilor într-un sistem, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

2. Înlocuind o ecuație a unui sistem prin altă ecuație, echivalentă cu cea inițială, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 4x + 7y = 0. \end{cases}$$

3. Exprimând într-o ecuație a unui sistem o necunoscută prin cealaltă necunoscută și substituind această expresie în celelalte ecuații ale sistemului, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} y = 3x - 4 \\ 8x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 8x + 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

4. Înlocuind o ecuație a unui sistem cu altă ecuație, care se obține adunând sau scăzând două ecuații ale sistemului (înmulțite, dacă e cazul, cu un număr nenul), obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases} 3x - y = 4 \\ 11x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 14x = 4. \end{cases}$$

4.2. Metode de rezolvare a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute

Sistemele de ecuații pot fi rezolvate prin:

- ***metoda substituției***

$$\begin{cases} x-3y=-4 \\ x-7y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-4, \\ 3y-4-7y=5. \end{cases}$$

⇦ Într-o ecuație a unui sistem o necunoscută se exprimă prin cealaltă necunoscută şi expresia obținută se substituie în cealaltă ecuație a sistemului.

- ***metoda reducerii***

$$\begin{cases} 2x+0{,}5y=2 \mid \times 4 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 11x=7. \end{cases}$$

⇦ Se adună (se scad) cele două ecuații ale unui sistem, astfel încât să se reducă una dintre necunoscute.

- ***metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutei) auxiliare***

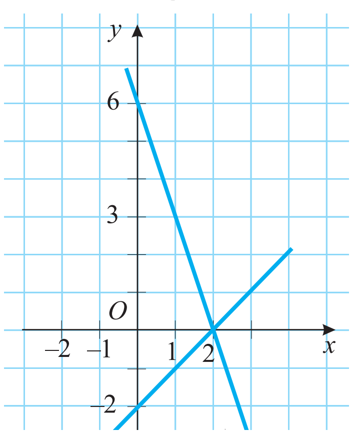
$$\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{y-1}=3, \\ 4x^2+\dfrac{3}{y-1}=-2. \end{cases}$$

Fie $x^2=u$, $\dfrac{1}{y-1}=v$. Atunci obținem sistemul $\begin{cases} u-v=3, \\ 4u+3v=-2. \end{cases}$

⇦ Se introduc necunoscute auxiliare, notând unele expresii cu aceste necunoscute, pentru a obține un sistem mai simplu. După rezolvarea sistemului obținut se revine la necunoscutele inițiale.

- ***metoda grafică***

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2, \\ y=-3x+6. \end{cases}$$



$S=\{2\}$.

⇦ Se trasează, în acelaşi sistem de axe ortogonale, graficele ecuațiilor sistemului şi se determină (dacă există) coordonatele punctelor de intersecție a acestora.
Dacă graficele ecuațiilor sistemului nu se intersectează, rezultă că sistemul este incompatibil, adică $S=\varnothing$.

Observație

Metoda substituției, metoda reducerii, metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutei) auxiliare sunt ***metode algebrice***, iar metoda grafică este ***metodă geometrică***.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. *Investigați!* Precizați care dintre perechile ordonate $(0,-2)$, $(-1, 1)$, $(0, 2)$, $(-2, 2)$, $(0, 3)$, $(3, 0)$, $(-3, 2)$ sunt soluții ale sistemului:

a) $\begin{cases} 3x-y=-2, \\ 2x+3y=6; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+4y=3, \\ x-y=-2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x=-2(x+y), \\ 5x+2y=-4. \end{cases}$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda substituției, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} x-3y=0, \\ 5x-y=-1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 6x+2y=0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 0{,}2x-3{,}5y=4; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{3}x+y=2, \\ \frac{2}{5}x-3y=10. \end{cases}$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda reducerii, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 2x-3y=-2, \\ 3x+y=5; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}5y-3x=4{,}5, \\ 5x+2y=3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2{,}2x+3y=2, \\ 3x-4y=-1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=\frac{1}{6}, \\ 2x+2y=3. \end{cases}$

4. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda grafică, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} y=2x, \\ x-2y=9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=3, \\ y+2x=6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} y-3x=0, \\ 2x-y=-6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y=-2, \\ 2x-y=4. \end{cases}$

5. *Lucrați în perechi!* Completați cu un număr real, astfel încât sistemul să fie compatibil:

1) nedeterminat; 2) determinat.

a) $\begin{cases} 2x-\square\, y=-4, \\ 10x-6y=-20; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+2y=-3, \\ \square\, x-6y=9; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-y=-1, \\ -12x+4y=\square\,. \end{cases}$

Formăm abilitățile și aplicăm

6. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} 3(x-2)=y-5, \\ 4x-3(y+1)=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 0{,}5x-3{,}4(5-y)=4{,}7, \\ -4x+8y=12; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2-x=(x+1)^2+y, \\ -5x-2y=1. \end{cases}$

7. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda grafică și cea algebrică, sistemul:

a) $\begin{cases} 6-x=2y, \\ 2x+4y=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} (x-2)^2=x^2+y, \\ y+3x=6; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-3y=6, \\ 5(x-1)+6(y+2)=58; \end{cases}$ d) $\begin{cases} -x-3y=-7, \\ x^2+y=(x-1)^2+3. \end{cases}$

Dezvoltăm abilitățile și creăm

8. Explicitând modulele, rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} |x|+3|y|=5, \\ |x-2|+2|y-1|=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3|x+3|+|y-4|=0, \\ |x-6|+2|y|=5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} a^2+2|b|=10, \\ |a^2-2|+|b-4|=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2|z-3|-|y+1|=2, \\ |z|+|y|=-5. \end{cases}$

9. Două motonave, după întâlnire, și-au continuat drumul, una spre sud, iar cealaltă spre apus, și peste 2 ore distanța dintre ele era de 60 km. Aflați viteza fiecărei motonave, dacă se știe că viteza uneia dintre ele este cu 6 km/h mai mare decât a celeilalte.

10. Scrieți un sistem de două ecuații cu două necunoscute, având soluțiile:

a) $(1, 5)$ și $(5, 1)$; b) $(-1, 0)$ și $(1, 2)$; c) $(1, 0)$ și $(3, 2)$; d) $(-2, -1)$ și $(1, 1)$.

11. Unui luntraș, care plutea în amonte, i-a căzut pălăria în apă când trecea pe sub un pod. Peste o oră el a observat pierderea, a întors barca și a ajuns pălăria la o distanță de 4 km de pod. Aflați viteza apei.

Problemă pentru campioni

12. Pentru care valori ale parametrului real a sistemul $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 10x-ay=15 \end{cases}$ este compatibil nedeterminat?

§ 5. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și/sau sistemelor de ecuații

Diverse probleme din matematică, fizică, chimie, economie şi din alte domenii se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, sistemelor de ecuații.

1 Într-un camion s-au încărcat 35 de saci cu făină şi cu zahăr. Sacii cântăresc la un loc 2 t 500 kg. Un sac cu făină cântăreşte 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg.
Aflați câți saci cu făină şi câți cu zahăr s-au încărcat în camion.

Să rezolvăm această problemă cu ajutorul:

unei ecuații.

Fie x numărul de saci cu făină. Atunci $(35 - x)$ este numărul de saci cu zahăr. Deoarece un sac cu făină cântăreşte 80 kg, s-au încărcat în total $80x$ kg de făină. Cum un sac cu zahăr cântăreşte 50 kg, s-au încărcat în total $50(35 - x)$ kg de zahăr.

Conform condiției problemei, obținem ecuația

$$80x + 50(35 - x) = 2500,$$

cu soluția $x = 25$.

Aşadar, în camion au fost încărcați 25 de saci cu făină şi 10 saci cu zahăr.

unui sistem de ecuații.

Fie x numărul de saci cu făină, iar y – numărul de saci cu zahăr.

Ştiind că s-au încărcat în total 35 de saci, obținem prima ecuație: $x + y = 35$.

Deoarece un sac cu făină cântăreşte 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg şi s-au încărcat în total 2 t 500 kg, obținem a doua ecuație: $80x + 50y = 2\,500 \Leftrightarrow 8x + 5y = 250$.

Conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 35, \\ 8x + 5y = 250, \end{cases}$ cu soluția (25, 10).

Răspuns: În camion s-au încărcat 25 de saci cu făină şi 10 saci cu zahăr.

Concluzie

Uneori, o problemă poate fi rezolvată atât cu ajutorul unei ecuații, cât şi cu ajutorul unui sistem de ecuații.

Ne amintim

Pentru a rezolva o problemă cu ajutorul ***ecuației*** (***sistemului de ecuații***), se procedează astfel:

① Se stabilesc datele cunoscute şi cele necunoscute ale problemei.
② Se notează fiecare mărime necunoscută aleasă cu o literă.
③ Se stabilesc relațiile dintre datele cunoscute şi cele necunoscute şi se scrie ecuația (sistemul de ecuații).
④ Se rezolvă ecuația (sistemul de ecuații).
⑤ Se analizează rezultatele, se alege soluția şi se scrie răspunsul.

Aplicăm

2 Un tractor ară un lot de pămînt. Peste 4 ore, i se alătură un alt tractor. Cele două tractoare termină de arat lotul în 8 ore.
Aflați în câte ore ar putea ara lotul fiecare tractor, dacă se ştie că primului tractor i-ar trebui cu 8 ore mai mult decât tractorului al doilea.

Rezolvare:

Fie x numărul de ore în care primul tractor ar fi arat singur lotul de pământ, atunci $(x - 8)$ este numărul de ore în care al doilea tractor ar fi arat singur acest lot. În aceste condiții, productivitatea muncii primului tractor este $\frac{1}{x}$ $\left(\frac{1}{x}\right.$ – partea din lot arată într-o oră), iar cea a tractorului al doilea este $\frac{1}{x-8}$. Ştiind că primul tractor a lucrat 12 ore (4 ore singur şi 8 ore în comun), iar al doilea a lucrat 8 ore şi ținând cont de productivitatea muncii fiecărui tractor, obținem ecuația: $\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1.$

Să aflăm soluțiile ei.

DVA: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 8\}$.

$$\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1\Leftrightarrow\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}-1=0\Leftrightarrow\frac{12(x-8)+8x-x(x-8)}{x(x-8)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-x^2+28x-96}{x(x-8)}=0\Leftrightarrow\frac{x^2-28x+96}{x(x-8)}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-28x+96=0,\\ x(x-8)\neq 0.\end{cases}$$

Soluțiile sistemului, deci şi ale ecuației inițiale, sunt $x_1=24,\ x_2=4$. (Verificați!)

$x_2=4$ nu satisface condiția problemei. (Argumentați.)

Răspuns: Primul tractor va ara lotul de pământ în 24 de ore, al doilea – în 16 ore.

Exercițiu Rezolvați problema **2** cu ajutorul unui sistem de ecuații.

3 O soluție de alcool cu concentrația de 85% s-a amestecat cu o altă soluție şi s-au obținut 10 *l* de soluție de alcool cu concentrația de 79%.

Aflați câți litri de fiecare soluție s-au amestecat, dacă valoarea numerică a procentului concentrației de alcool din soluția a doua este cu 66 mai mare decât valoarea numerică a volumului acestei soluții.

Rezolvare:

Fie x volumul în litri al primei soluții. Atunci $(10-x)$ *l* este volumul soluției a doua. Prima soluție conține $\frac{x\cdot 85}{100}$ litri de alcool, iar a doua are concentrația de alcool $(10-x+66)\%$.

Obținem ecuația $\frac{(10-x)(76-x)}{100}+\frac{85x}{100}=\frac{10\cdot 79}{100}\Leftrightarrow x^2-x-30=0,$ cu soluțiile $x_2=-5$, $x_2=6$. (Verificați!) Constatăm că valoarea $x_2=-5$ nu satisface condiția problemei.

Răspuns: S-au amestecat 6 *l* de soluție de alcool cu concentrația de 85% cu 4 *l* de altă soluție.

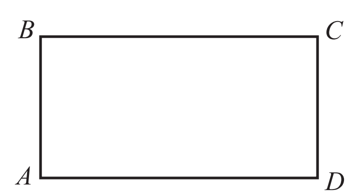
Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

Rezolvați problemele 1–4 cu ajutorul ecuației.

1. Suma a două numere naturale este 12, iar produsul lor este 11. Aflați aceste numere.

2. *Investigați!* Diferența a două numere întregi este 15, iar suma pătratelor lor este 725. Aflați aceste numere. Găsiți toate soluțiile.



3. Determinați lungimea şi lățimea unui dreptunghi, știind că perimetrul lui este de 30 m, iar aria lui – de $44\ \text{m}^2$.

4. Una dintre laturile dreptunghiului este cu 3 cm mai mare decât cealaltă. Aflați lungimea laturilor dreptunghiului, dacă aria lui este de $1720\ \text{cm}^2$.

Rezolvați problemele 5–6:

a) cu ajutorul ecuației; **b) cu ajutorul sistemului de ecuații.**

5. Cu 6 400 lei s-au cumpărat două bucăți de stofă de aceeași lungime, dar de calități diferite. 1 metru de stofă de calitatea întâi şi 1 metru de stofă de calitatea a doua costă în total 320 lei, iar 4 m de stofă de calitatea întâi costă cât 6 m de calitatea a doua. Determinați cât costă 1 metru de stofă de fiecare calitate şi câți metri de stofă s-au cumpărat.

6. *Lucrați în perechi!* Distanța dintre două oraşe este de 280 km. Din aceste oraşe s-au pornit concomitent, unul spre celălalt, două trenuri: unul cu viteza de 80 km/h, celălalt cu viteza egală cu $\frac{3}{4}$ din viteza primului. Aflați câți kilometri a parcurs fiecare tren până s-au întâlnit.

Formăm abilitățile și aplicăm

Rezolvați problemele 7–13 cu ajutorul ecuației.

7. *Lucrați în grup!* Suma pătratelor cifrelor unui număr de două cifre este 52. Dacă din acest număr vom scădea 18, vom obține răsturnatul acestui număr. Aflați numărul.

8. Conform planului, o uzină trebuia să producă 360 de piese. În primele opt zile, uzina a depăşit planul zilnic cu 20%. În restul zilelor, uzina a depăşit planul zilnic cu 25%. În consecință, uzina a produs cu 82 de piese mai mult decât prevedea planul. În câte zile uzina trebuia să realizeze planul?

9. Aria unui triunghi dreptunghic este de $24\ \text{cm}^2$. Dacă una dintre catetele lui se micşorează cu 1 cm, iar cealaltă se măreşte cu 3 cm, atunci se obține un triunghi cu aria de $27{,}5\ \text{cm}^2$. Determinați lungimile catetelor triunghiului inițial.

10. Doi muncitori au executat împreună o lucrare în 12 ore. Dacă primul muncitor ar fi executat singur o jumătate din această lucrare, apoi al doilea muncitor – a doua jumătate, atunci toată lucrarea ar fi fost terminată în 25 de ore. Aflați în câte ore ar executa lucrarea fiecare muncitor.

11. Un vapor parcurge distanța pe un râu de la A la B în 3 ore, iar distanța de la B la A – în 4 ore. În câte ore va parcurge distanța de la A la B o plută?

12. *Lucrați în perechi!* Suma a două numere este 8, iar suma inverselor acestor numere este 6. Aflați aceste numere.

13. Fie 736 ml de soluție de iod cu concentrația de 16%. Aflați câți mililitri de alcool trebuie adăugați pentru a obține o soluție de iod cu concentrația de 10%.

Rezolvați problemele 14–15:
a) cu ajutorul ecuației; **b) cu ajutorul sistemului de ecuații.**

14. Suma a două numere este egală cu 122, iar raportul lor este $\frac{3}{7}$. Aflați numerele.

15. *Lucrați în grup!* 50 de maiouri şi 75 de tricouri costă în total 4 200 lei. După reducerea cu 10% a prețului maiourilor şi cu 20% a prețului tricourilor, pentru acestea s-ar plăti 3 487,5 lei. Aflați prețul inițial al maiourilor şi al tricourilor.

16. (EG, 2019) Testul pentru un concurs la matematică conține itemi de 4 puncte şi itemi de 5 puncte. Un elev a rezolvat complet 12 itemi şi a acumulat în total 53 de puncte. Determinați câți itemi de fiecare tip a rezolvat elevul.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

17. Câte triunghiuri dreptunghice există, ştiind că lungimile laturilor lor sunt numere naturale, iar lungimea unei catete este de 15 cm?

18. Aflați două numere naturale, ştiind că diferența pătratelor lor este 45. Găsiți toate soluțiile.

19. Pentru a transporta 60 t de marfă, e necesar un număr de camioane. Din motiv că drumul era deteriorat, în fiecare camion s-au încărcat cu 0,5 t mai puțin decât se prevedea inițial și, în consecință, au fost repartizate suplimentar 4 camioane. Determinați câte camioane au fost planificate inițial.

20. Un agricultor are două feluri de îngrășăminte chimice de azot: cu concentrația de 15% și 21%. Aflați ce cantitate de îngrășăminte de fiecare fel trebuie să amestece pentru a obține 1 tonă de îngrășământ de azot cu concentrația de 18%.

Problemă pentru campioni

21. Un câine, fiind în punctul A, urmărește o vulpe, care este în avans cu 30 m față de el. Lungimea saltului câinelui este de 2 m, iar al vulpii – de 1 m. La ce distanță de la punctul A câinele va ajunge vulpea, dacă în timp ce câinele face două salturi, vulpea face trei?

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x-3{,}5(x-4)=6$; b) $0{,}5(x-2)+2{,}3x=5x-4$;

c) $\frac{4}{5}(x+3)-\frac{2}{3}=\frac{5}{7}x+4$; d) $2{,}4(x-3)-4x=1-x$.

2. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

a) $5x^2-4x-1=0$; b) $-1{,}2x^2-7x=0$; c) $16x^2-1=0$; d) $36x^2-12x+1=0$.

3. *Lucrați în perechi!* Folosind teorema lui Viète, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-x-30=0$; b) $x^2+x-30=0$; c) $x^2-2x-120=0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\frac{5x}{x-1}-\frac{2}{x+2}=3$; b) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{5x}{x-1}=-3$; c) $4-\frac{2}{x^2-4}=\frac{3x}{x-2}$; d) $\frac{5x}{x^2-9}-3=\frac{1}{x+3}$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x-3y=4,\\5x-2y=-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2y-3x=6,\\8y-2x=-3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y=1,\\\frac{1}{4}+\frac{2}{3}y=4;\end{cases}$ d) $\begin{cases}3x-y=-2,\\0{,}5(x-2)+y=8.\end{cases}$

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(2x^2-5x)(7x+1)=0$; b) $\left(\frac{x}{1-x}-2\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$; c) $(3x^2+2x-1)(x^2-16)=0$;

7. Într-un bloc sunt 64 de apartamente – cu 2 camere și cu 4 camere. Știind că blocul are în total 160 de camere, aflați câte apartamente sunt cu 2 camere și câte cu 4 camere.

8. Diferența a două numere este egală cu 84, iar raportul lor este $\frac{2}{5}$. Aflați numerele.

9. S-au amestecat 6 kg de bomboane de 33 lei kilogramul cu 12 kg de bomboane de 30 lei kilogramul. Determinați cât costă 1 kg de bomboane asortate.

Formăm abilitățile și aplicăm

10. *Lucrați în grup!* Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{3x^2}{x^2-2x+1}-\frac{5x}{x-1}+2=0$; b) $-\frac{5t^2}{(t+2)^2}+\frac{t}{t+2}+4=0$; c) $z^4+4z^2-5=0$;

d) $4x^2+5x+1=0$; e) $\frac{2x}{x^2-16}-\frac{3}{x+4}=\frac{5-x}{x-4}$; f) $\frac{3}{2x-1}-\frac{4x}{x+2}=5$.

11. Fără a rezolva ecuația, determinați semnele soluțiilor ei:

a) $x^2-8x+3=0$; b) $x^2+12x+8=0$; c) $x^2-14x-\sqrt{7}=0$.

12. *Lucrați în perechi!* Fără a rezolva ecuația $x^2-8x+12=0$, aflați:

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; b) $x_1^2+x_2^2$; c) $x_1^3+x_2^3$; d) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$,

unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației date.

13. Descompuneți în factori expresia:

a) $x^{12}-2x^6+1$; b) $(2x-1)^4-3(2x-1)^2+2$; c) $3(2-x)^4-2(x-2)^2-1$; d) t^4-4t^2+4.

14. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-8x+6=0$. Scrieți o ecuație de gradul II cu soluțiile:

a) $t_1=2x_1$ și $t_2=2x_2$; b) $t_1=\frac{x_1}{x_2}$ și $t_2=\frac{x_2}{x_1}$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}3(x-1)+4=5y,\\ x-8(y+0{,}5)=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}-(x+y)+4y=3,\\ 5x-4(0{,}2-y)=-2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x^2-4(y+2)=(x-5)^2,\\ 3x-y=0.\end{cases}$

16. Rezolvați, prin metoda grafică, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x+5y=0,\\ x-y=-7;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{1}{2}y=x+1,\\ y-2x=-2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-y=8,\\ 3(x-1)=2+y.\end{cases}$

17. Pe o distanță de 210 km, un tren a mers la început cu viteza de 60 km/h, apoi, din cauza drumului deteriorat, și-a micșorat viteza până la 20 km/h. Toată distanța a fost parcursă în 6 ore. Aflați lungimea drumului deteriorat.

18. Se amestecă 2 *l* de soluție de apă cu sare având concentrația de 20% cu 8 *l* de soluție de apă cu sare având concentrația de 30%. Determinați concentrația amestecului.

19. Suma pătratelor a două numere este 36. Împărțind cele două numere, se obține câtul 5 și restul 3. Aflați numerele. Găsiți toate soluțiile.

20. Aflați zerourile funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=-3x^2-x-4$; b) $f(x)=-3x^2+x+4$; c) $f(x)=x^4-x^2-20$.

21. Doi cicliști au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Peste 1 oră, ei s-au întâlnit și, fără să se oprească, și-au continuat drumul. Ciclistul care a pornit din A a ajuns în B cu 35 de minute mai devreme decât celălalt a ajuns în A. Determinați vitezele cicliștilor, dacă distanța dintre A și B este de 28 km.

22. Doi turiști au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Fiecare se deplasa cu o viteză constantă și, ajungând în punctul respectiv, s-a întors imediat înapoi. Când s-au reîntâlnit, s-a constatat că un turist a parcurs cu 4 km mai mult decât celălalt și a ajuns în A peste 1 oră după reîntâlnire. Celălalt turist a ajuns în B peste 2 ore 30 de minute după reîntâlnire. Care este viteza fiecărui turist?

23. (EG, 2022) Determinați cea mai mare soluție reală a ecuației $6x^2+7x+2=0$.

24. (EG, 2016) Fie *A* mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $4x^2+3x-10=0$. Determinați mulțimea $A\cup\{-2;\ 0\}$.

25. (EG, 2016) Într-o vază sunt trandafiri albi şi roşii, în total 21. Numărul de trandafiri roşii este cu 3 mai mare decât dublul numărului de trandafiri albi. Determinați numărul de trandafiri de fiecare culoare în vas.

26. (EG, 2015) Suma a două numere este egală cu 55, iar raportul lor este egal cu $\frac{2}{9}$. Determinați aceste numere.

27. (EG, 2018) Determinați modulul diferenței soluțiilor reale ale ecuației $x^2-7x+12=0$.

28. Dana şi Paula au împreună 90 de bomboane. Dacă 40% din bomboanele Danei sunt cu 15 mai multe decât 30% din bomboanele lui Paula, ce cantități de bomboane au?

Dezvoltăm abilitățile și creăm

29. a) Reprezentați punctele $A(0,\ 3)$ şi $B(1,\ -2)$ în sistemul de coordonate xOy.

b) Trasați dreapta AB.

c) Determinați formula funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx+n,$ ştiind că graficul funcției f este dreapta AB.

30. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $|2x^2-x-2|=1$; b) $|x^2+x-2|=1-x$; c) $|-x^2+5x-6|=x^2$.

31. Mama, tatăl şi fiul au împreună 84 de ani. Fiul împreună cu mama au 45 de ani, iar fiul împreună cu tatăl au 52 de ani. Aflați vârsta fiecăruia.

32. Compuneți o problemă care să se rezolve cu ajutorul:

a) ecuației $2x^2-3x-5=0$; b) sistemului de ecuații $\begin{cases}x+2y=3,\\ 3x-y=2.\end{cases}$

33. *Lucrați în grup!* **Proiect.** *Aplicații ale ecuațiilor de gradul II în diverse domenii.*

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Fie ecuația $3t^2-\boxed{}\,t+4=0$.

a) Completați cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația obținută în a).

c) Scrieți ecuația de gradul doi ale cărei soluții sunt opusele soluțiilor obținute în b).

2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații: Raportul dintre numărul de băieți şi numărul de fete din clasa a IX-a este $\frac{3}{5}$.

a) Aflați câte fete sunt în clasă, dacă se ştie că băieți sunt cu 6 mai puțini decât fete.

b) Aflați câți elevi învață în clasa a IX-a.

3. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ \ a,\ b\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile a şi b pentru care punctele $A(1,\ 4)$ şi $B(-2,\ 8)$ aparțin graficului funcției f.

b) Rezolvați pentru $a=2$ şi $b=3$ în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{f(x)}{x-1}-x=5$.

Varianta II

1. Fie ecuația $2z^2+\boxed{}\,z-5=0$.

a) Completați cu un număr real, astfel încât mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația obținută în a).

c) Scrieți ecuația de gradul doi ale cărei soluții sunt opusele soluțiilor obținute în b).

2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații: Raportul dintre numărul de manuale şi numărul de cărți de literatură artistică din biblioteca şcolii este $\frac{2}{3}$.

a) Aflați câte manuale sunt în bibliotecă, dacă se ştie că manuale sunt cu 350 mai puține decât cărți de literatură artistică.

b) Aflați câte cărți sunt în total în biblioteca şcolii.

3. Fie funcția $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=mx+n,\ \ m,\ n\in\mathbb{R}$.

a) Determinați valorile m şi n pentru care punctele $A(-2,\ 1)$ şi $B(3,\ 11)$ aparțin graficului funcției g.

b) Rezolvați pentru $m=3$ şi $n=-1$ în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{x^2+7}{g(x)}-x=3$.

Capitolul 5

Inecuații. Sisteme de inecuații

Învățătura este cea mai bună avuție.
Proverb

§ 1. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de inecuație cu o necunoscută

Investigăm **1** Două firme confecționează carnete de elevi la comandă. Firma „BMR” cere 200 lei pentru comandă şi câte 10 lei pentru fiecare carnet, iar firma „CAR” cere 50 lei pentru comandă şi câte 15 lei pentru fiecare carnet. Aflați numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR”.

Rezolvare:

Fie x numărul de carnete care trebuie confecționate. Conform condiției problemei, firma „BMR” va executa comanda pentru $(200+10x)$ lei, iar firma „CAR” – pentru $(50+15x)$ lei.

Pentru a răspunde la întrebarea problemei, trebuie să rezolvăm în mulțimea $\mathbb{N}$ inecuația $200+10x<50+15x$ şi să determinăm din mulțimea soluțiilor ei soluția cea mai mică.

Inecuația $200+10x<50+15x$ este un exemplu de inecuație cu o necunoscută.

Definiție

Numărul a se numeşte **soluție** a inecuației cu o necunoscută, dacă el transformă inecuația într-o inegalitate adevărată.

Rețineți

A rezolva o inecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.
Mulțimea soluțiilor inecuației se notează cu S.

Definiție

Două inecuații cu o necunoscută se numesc ***echivalente*** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Între două inecuații echivalente se scrie simbolul „ $\Leftrightarrow$ ”.

Aplicând următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de inegalitate a numerelor reale, obținem inecuații echivalente:

		Exemple
1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x) < f(x)$	– dacă permutăm membrii unei inecuații, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu prima:	$x+3>2x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x < x+3$
2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)+a > g(x)+a$	– dacă la ambii membri ai unei inecuații adunăm același număr real, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$2x+5>7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x > 7-5$
3. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R},\ a>0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real pozitiv, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$3x > 27 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 27:3$
4. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R},\ a<0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real negativ, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu cea inițială:	$-3x < 81 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 81:(-3)$

1.2. Intervale de numere reale

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ şi $a < b$.

Mulțimea	Intervalul de numere reale	
	Se notează	Reprezentarea pe axă
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	$(a, b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$	$(-\infty, b]$	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	

1.3. Inecuații de forma $ax+b \ge 0$ $(\le, >, <)$, $a, b \in \mathbb{R}$

Ne amintim

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Inecuația $ax+b \ge 0$ cu necunoscuta $x \in \mathbb{R}$ poate fi rezolvată astfel:

$$ax+b \ge 0 \Leftrightarrow ax \ge -b.$$

Să examinăm cazurile $a \ne 0$ și $a = 0$.

1) Cazul $a \neq 0$

a) Dacă $a > 0$, atunci $ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{b}{a}$. Deci, $S = \left[-\dfrac{b}{a}, +\infty\right)$.

b) Dacă $a < 0$, atunci $ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{b}{a}$. Deci, $S = \left(-\infty, -\dfrac{b}{a}\right]$.

2) Cazul $a = 0$

a) Dacă $a = 0$ şi $b > 0$, atunci $S = \mathbb{R}$.

b) Dacă $a = 0$ şi $b = 0$, atunci $S = \mathbb{R}$.

c) Dacă $a = 0$ şi $b < 0$, atunci $S = \varnothing$.

Exercițiu Rezolvați în mod analog inecuațiile de forma $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b < 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Definiție

Inecuațiile de forma $ax+b<0$, $ax+b>0$, $ax+b \leq 0$, $ax+b \geq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

Să rezolvăm inecuația problemei **1**:

$$200 + 10x < 50 + 15x \Leftrightarrow 15x - 10x > 200 - 50 \Leftrightarrow 5x > 150 \Leftrightarrow x > 30.$$

Răspuns: Numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR” este 31.

Exercițiu Precizați proprietățile inegalităților numerelor reale, folosite la rezolvarea acestei inecuații.

Aplicăm

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

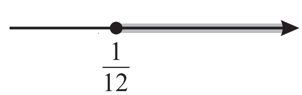
a) $x - 5 \leq 15x - 2(x+3)$; b) $\dfrac{12x-1}{3} < 4x + 3$; c) $\dfrac{2-3x}{3} > \dfrac{5-2x}{2}$;

d) $|2x - 1| < 3$; e) $|x - 4| \geq 1$.

Rezolvare:

a) $x - 5 \leq 15x - 2(x+3) \Leftrightarrow x - 5 \leq 15x - 2x - 6 \Leftrightarrow x - 15x + 2x \leq -6 + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{1}{12}$. Deci,



Răspuns: $S = \left[\dfrac{1}{12}, +\infty\right)$.

b) $\dfrac{12x-1}{3} < 4x + 3 \Leftrightarrow 12x - 1 < 12x + 9 \Leftrightarrow 12x - 12x < 9 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x < 10$.

Răspuns: $S = \mathbb{R}$.

c) $\dfrac{2-3x}{3} > \dfrac{5-2x}{2} \Leftrightarrow 4 - 6x > 15 - 6x \Leftrightarrow 6x - 6x > 15 - 4 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 11$.

Inecuația nu are soluții.

Răspuns: $S = \varnothing$.

d) $|2x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

Răspuns: $S = [-1, 2]$.

e) $|x - 4| > 1 \Leftrightarrow x - 4 > 1$ sau $x - 4 < -1 \Leftrightarrow x > 5$ sau $x < 3$.

Răspuns: $S = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$.

Observație Inecuațiile de gradul I pot fi rezolvate studiindu-se semnul funcției respective.

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $2x+8<0$.

Rezolvare:

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+8$.

Aflăm zeroul funcției f: $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Tabelul de variație a semnului funcției f este:

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

Deci, $f(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-4)$ (fig. 1)

Răspuns: $S=(-\infty,-4)$.

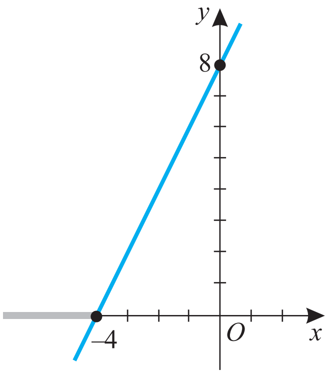


Fig. 1

1.4. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută

2 Pentru a prepara la cantina şcolii 20 de porții de felul întâi, sunt necesare 0,5 kg de carne şi 1 kg de orez, iar pentru a prepara o porție de felul doi, este nevoie de 0,1 kg de carne şi 0,15 kg de orez. Pentru câți elevi a fost pregătită masa, dacă se ştie că s-au folosit mai mult de 11 kg de carne şi mai puțin de 18 kg de orez?

Rezolvare:

Fie x numărul de elevi pentru care au fost pregătite bucatele. Atunci s-au folosit $\left(\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x\right)$ kg de carne şi $\left(\frac{x}{20}+0{,}15x\right)$ kg de orez. Conform condiției problemei, obținem inecuațiile $\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x>11$ şi $\frac{x}{20}+0{,}15x<18$. Astfel, se cere să se afle în mulțimea $\mathbb{N}$ soluțiile comune ale inecuației întâi ***şi*** ale inecuației a doua. În acest caz, se spune că trebuie să rezolvăm un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută:

$$\begin{cases}\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x>11\\ \frac{x}{20}+0{,}15x<18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4x>440\\ x+3x<360\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x>440\\ 4x<360\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>88,\\ x<90.\end{cases}$$

În mulțimea $\mathbb{N}$ acest sistem de inecuații are soluția unică 89.

Răspuns: Au fost pregătite bucate pentru 89 de elevi.

Ne amintim

În caz general, ***un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută*** se notează:

$$\begin{cases}a_1x+b_1\geq 0,\ a_1\in\mathbb{R}^*,\ b_1\in\mathbb{R},\\ a_2x+b_2\geq 0,\ a_2\in\mathbb{R}^*,\ b_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Definiție

Se numeşte **soluție** a unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută orice valoare a necunoscutei care transformă ***fiecare*** inecuație a sistemului într-o inegalitate adevărată.

Observație

1. Un sistem de inecuații poate fi format din inecuații cu oricare dintre semnele „ $<$ ”, „ $\leq$ ”, „ $>$ ”, „ $\geq$ ”.
2. Există sisteme de două, de trei sau de mai multe inecuații.

Rețineți

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.
Mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații (notată cu S) este ***intersecția*** mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem.

Definiție

Două sisteme de inecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sunt egale.

Între sistemele de inecuații echivalente se scrie simbolul „$\Leftrightarrow$”.

Observație

Sistemele echivalente de inecuații ce se rezolvă pe o mulțime se numesc ***echivalente în această mulțime***.

Aplicăm

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases} 3(x-1) \le 2(x+2), \\ 2x-1>5. \end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases} 3(x-1) \le 2(x+2) \\ 2x-1>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 \le 2x+4 \\ 2x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7, \\ x>3. \end{cases}$$

$x \in (3, 7]$

Răspuns: $S=(3, 7]$.

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă $-2<2x+1<5$.

Rezolvare:

Inecuația poate fi scrisă sub formă de sistem de inecuații:

$$-2<2x+1<5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>-2 \\ 2x+1<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-3 \\ 2x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x<2. \end{cases}$$

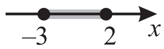
$x \in (-1{,}5;\ 2)$

Răspuns: $S=(-1{,}5;\ 2)$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Precizați care desen este reprezentarea pe axă a intervalului $(-3, 2]$:

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Reprezentați pe axa numerelor și scrieți sub formă de interval de numere reale mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $-3 \le x < -2$; b) $6{,}5 \le x \le 11{,}5$; c) $2<x<4$; d) $x>-2$; e) $x \le 6$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $7x-5{,}3<8{,}7$; b) $1-3x>7$; c) $30+5x \le 18-7x$;

d) $5(x-1)+7 \ge 1-3(x+2)$; e) $x-\dfrac{2x+3}{2} \le \dfrac{x-1}{4}$; f) $0{,}5-3 \ge 2+5(1-x)$.

4. Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuația:

a) $5{,}6(x-3)-3{,}2(2-x)<20{,}8$; b) $4{,}8(x-4)-3{,}7(2-x)<24{,}4$; c) $2{,}85(x+1) \ge 3-2(x-0{,}5)$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 2x+1>0, \\ x-3<0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1-x \le 0, \\ 3x+2<0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-0{,}5 \ge 0, \\ 2x-5 \ge 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1{,}2x-6 \le 0, \\ 4x-3 \le 0. \end{cases}$

6. *Lucrați în perechi!* Completați tabelul folosind modelul din linia 1:

1	x mai mic sau egal cu șapte	$x \le 7$	$(-\infty, 7]$	
2	x mai mare sau egal cu doi			
3		$-3 < x < 5$		
4	x mai mic decât 5,4			
5				
6			$(-\sqrt{3}, +\infty)$	

Formăm abilitățile și aplicăm

7. *Investigați!* Aflați ce costă mai mult: 7 pixuri sau 10 blocnotesuri, dacă se știe că 2 pixuri costă mai mult decât 3 blocnotesuri.

8. Câte numere naturale n există, astfel încât $6n + 15 \le 70$?

9. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x - 1$. Aflați intervalele în care:
a) $f(x) \ge 0$; b) $f(x) < 0$.

10. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 1$.
a) Stabiliți dacă punctul $A(-1, 0)$ aparține graficului funcției f.
b) Determinați intervalele în care $f(x) > 0$, $f(x) \ge 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \le 0$.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $f(1) + |f(x) - x| \le f(0)$.

11. Ana și Maria țin un regim de slăbire. Ana, care avea între 60 și 65 kg, a slăbit între 3 și 4 kg. Maria, care avea între 60 și 67 kg, a slăbit între 4 și 5 kg. Determinați ce va arăta cântarul dacă Ana și Maria se cântăresc împreună la finele regimului de slăbire.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 17x - 2 > 12x - 1, \\ 3 - 9x < 1 - x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - 5 \le 15 - 3x, \\ 1 - 4x > 22 - 3x; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4 - x \ge \dfrac{x-1}{3}, \\ \dfrac{7x-1}{8} \ge 6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5(x+1) \ge 3(x+3) + 1, \\ 2(2x-1) < 7(x+1). \end{cases}$

13. *Lucrați în perechi!* Determinați domeniul de definiție al funcției $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sqrt{24x - 48}$; b) $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{4 - 5x}}$;
c) $f(x) = \sqrt{10 - x} + \dfrac{1}{\sqrt{2x - 6}}$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă:
a) $-5 < 3 - 2x < 1$; b) $1 < 3x - 2 < 7$;
c) $-2 \le 4 - 3x \le 10$; d) $3x - 2 < 4x + 1 < 3x + 5$.

15. Pe un raft sunt cu 5 cărți mai multe decât pe altul. Se știe că pe raftul al doilea sunt mai puțin de 11 cărți, iar pe ambele rafturi sunt nu mai puțin de 25 de cărți. Câte cărți sunt pe ambele rafturi?

16. Segmentele de lungimi 5, 8 și x sunt laturile unui triunghi. Aflați valorile posibile ale necunoscutei x.

17. Un autobuz a făcut într-o zi 8 curse și a transportat mai mult de 187 de pasageri, astfel încât toate locurile au fost ocupate și numai într-o cursă doi pasageri au călătorit în picioare. În ziua următoare, același autobuz a făcut 15 curse și a transportat mai puțin de 367 de pasageri. În total, în această zi, numai trei locuri n-au fost ocupate. Aflați câte locuri are autobuzul.

18. (EG, 2019) Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -4x + 2$, $g(x) = 2x + 9$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valoarea expresiei $f(x) - g(x)$ este nenegativă.

19. (EG, 2021) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 5$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valorile respective ale funcției f nu sunt mai mare decât 2.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

20. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $|3x + 2| > 1$; b) $|6 - 9x| \ge 18$; c) $|3x + 7| < 5$.

21. Aflați valorile parametrului real a pentru care sistemul de inecuații are cel puțin o soluție reală:
a) $\begin{cases} x < 2, \\ x > a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \le 3, \\ x > a; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \le -3, \\ x \ge a; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \ge 5, \\ x \le a. \end{cases}$

22. Determinați valorile parametrului real a, astfel încât sistemul de inecuații să nu aibă soluții:
a) $\begin{cases} x < 3, \\ x > a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x \le 2, \\ x > a; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x \le 5, \\ x \ge a; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x \ge -2, \\ x \le a. \end{cases}$

§2. Inecuații de gradul II cu o necunoscută. Metoda intervalelor

2.1. Inecuații de gradul II cu o necunoscută

Atelier

1. Trasați în diferite sisteme de coordonate graficele funcțiilor:
   $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 3;\quad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + 4x + 4;$
   $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -x^2 + 2x - 5.$
2. Aflați semnele fiecărei funcții f, g, h.
3. Comparați și comentați rezultatele.

Investigăm

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2 - x - 6 > 0$.

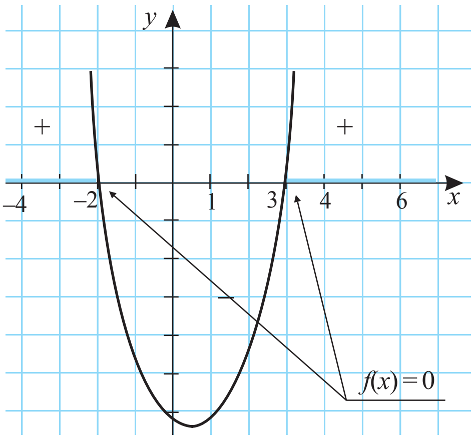


Fig. 2

Rezolvare:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x - 6$.

Aflăm zerourile funcției f:

$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ sau $x = 3$.

Reprezentăm schematic graficul funcției f (parabola) într-un sistem de axe ortogonale (fig. 2).

Folosind graficul, determinăm valorile lui x pentru care $f(x) > 0$.

Obținem $x < -2$ sau $x > 3$.

Răspuns: $S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$.

Definiție

Inecuațiile de forma $ax^2 + bx + c > 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \leq 0,$ $a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$ se numesc **inecuații de gradul II cu o necunoscută**.

Rețineți

Numărul m este **o soluție** a unei inecuații cu o necunoscută, dacă prin substituirea necunoscutei cu m în această inecuație se obține o propoziție adevărată.

Inecuații echivalente se obțin aplicând proprietăți ale inegalităților numerelor reale.

Algoritmul de rezolvare a inecuației de gradul II

① Prin transformări echivalente, reprezentăm inecuația sub forma

$$ax^2 + bx + c > 0\ (ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c \leq 0),\ a \neq 0.$$

② Examinăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$

③ Aflăm zerourile funcției f prin rezolvarea ecuației $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$

④ Trasăm schematic graficul funcției f.

⑤ Determinăm valorile lui x pentru care $f(x) > 0\ (f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0).$

⑥ Scriem răspunsul sub formă de interval numeric.

Aplicăm

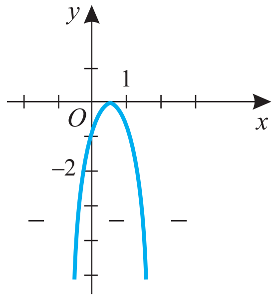


Fig. 3

- Rezolvați în ℝ inecuația $-4x^2+4x-1\geq 0$.

Rezolvare:

Cercetăm funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x^2+4x-1$.

Aflăm zerourile funcției f: $-4x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

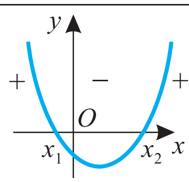
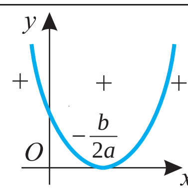
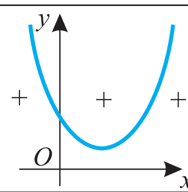
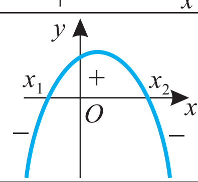
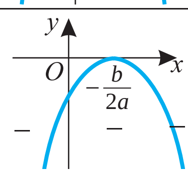
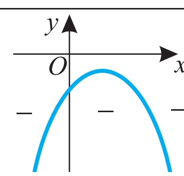
Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale graficul funcției f (fig. 3).

Cu ajutorul acestui grafic, stabilim că $f(x)\geq 0$ numai pentru $x=\frac{1}{2}$.

Răspuns: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Acest mod de rezolvare a inecuațiilor de gradul II cu o necunoscută se bazează pe proprietăți ale funcției de gradul II.

Studiul inecuațiilor $ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$, și $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0$

Valorile lui		Semnele funcției $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0$
a	Δ			
$a>0$	$\Delta>0$		$S=(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$	$S=(-\infty,\ x_1]\cup[x_2,\ +\infty)$
	$\Delta=0$		$S=\left(-\infty,\ -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a},\ +\infty\right)$	$S=\mathbb{R}$
	$\Delta<0$		$S=\mathbb{R}$	$S=\mathbb{R}$
$a<0$	$\Delta>0$		$S=(x_1,\ x_2)$	$S=[x_1,\ x_2]$
	$\Delta=0$		$S=\varnothing$	$S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
	$\Delta<0$		$S=\varnothing$	$S=\varnothing$

Rețineți

Inecuațiile de forma $ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\leq 0,\ a\neq 0$, se reduc, prin înmulțirea coeficienților lor cu -1, la inecuații de forma celor prezentate în tabel.

2.2. Metoda intervalelor

Investigăm

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2 - 2x - 15 < 0$.

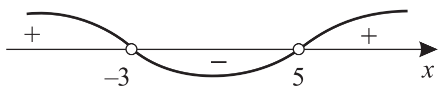
Rezolvare:

Descompunem în factori membrul stâng al inecuației: $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$.

Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$. Alcătuim tabelul de variație a semnelor funcțiilor f și g:

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x) \cdot g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Din tabel rezultă că pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -3)$, $(-3, 5)$ și $(5, +\infty)$ funcția $f \cdot g$ își păstrează semnul. Se spune că funcția $f \cdot g$, trecând prin punctele -3 și 5, își schimbă semnul, și anume:



Astfel, am obținut că $x^2 - 2x - 15 < 0$ pentru $x \in (-3, 5)$.

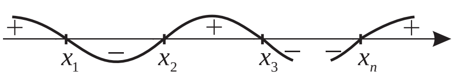
Răspuns: $S = (-3, 5)$.

Generalizăm

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale distincte.

Zerourile $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ale funcției f împart domeniul ei de definiție în intervale, astfel încât pe fiecare dintre aceste intervale funcția f își păstrează semnul, iar trecând prin punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, această funcție își schimbă semnul.

Schimbarea semnului funcției f se reprezintă grafic prin „curba semnelor”:



Această reprezentare se interpretează astfel: pe intervalele unde „curba semnelor” e situată deasupra axei numerelor este adevărată inegalitatea $f(x) > 0$, iar pe intervalele unde „curba semnelor” e situată sub axa numerelor este adevărată inegalitatea $f(x) < 0$.

Această metodă de rezolvare a inecuațiilor este numită ***metoda intervalelor***.

Aplicăm

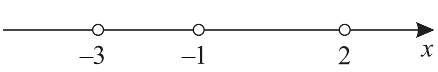
1 Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $(x-2)(x+1)(x+3) > 0$.

Rezolvare:

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)(x+1)(x+3)$.

Aflăm zerourile funcției f: $f(x) = 0$ pentru $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Reprezentăm pe axa numerelor zerourile funcției f:

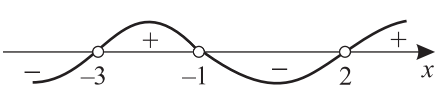


Determinăm semnul funcției f pe $(2, +\infty)$. Pentru aceasta, luăm un punct arbitrar din intervalul dat și aflăm semnul funcției f în punctul ales:

$$4 \in (2, +\infty),\ f(4) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 > 0.$$

Prin urmare, $f(x) > 0$ pentru $x \in (2, +\infty)$.

Procedăm similar pentru celelalte intervale și construim „curba semnelor”:



Așadar, $f(x) > 0$ pentru $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

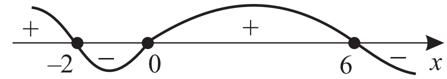
Răspuns: $S = (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

2 Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x(6-x)(x+2)\le 0$.

Rezolvare:

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x(6-x)(x+2)$. Aflăm zerourile funcției f: $f(x)=0$ pentru $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=6$.

Construim „curba semnelor”:



Așadar, $f(x)\le 0$ pentru $x\in[-2,\ 0]\cup[6,\ +\infty)$.

Răspuns: $S=[-2,\ 0]\cup[6,\ +\infty)$.

2.3. Inecuații raționale

Investigăm

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\dfrac{2x+6}{x-1}<0$.

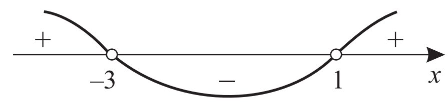
Rezolvare:

$\dfrac{2x+6}{x-1}<0 \Leftrightarrow (2x+6)(x-1)<0.$

Fie funcția $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=(2x+6)(x-1)$.

Avem $g(x)=0$ pentru $x_1=-3,\ x_2=1$.

Construim „curba semnelor”:



Obținem $g(x)<0$ pentru $x\in(-3,\ 1)$.

Răspuns: $S=(-3,\ 1)$.

Definiție

Inecuațiile de forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}\ge 0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}<0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}\le 0,$ unde $P(x),\ Q(x)$ sunt expresii algebrice raționale, se numesc **inecuații raționale cu o necunoscută**.

Observație

Inecuația $\dfrac{2x+6}{x-1}<0$ poate fi rezolvată și fără a fi înlocuită cu inecuația $(2x+6)(x-1)<0$, echivalentă ei. Pentru aceasta, cercetăm funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x+6}{x-1}$, aflăm zerourile ei (zerourile numărătorului) și zerourile numitorului fracției corespunzătoare și le reprezentăm pe axa numerelor. Apoi construim „curba semnelor” și selectăm intervalele respective.

La rezolvarea prin metoda intervalelor a inecuațiilor raționale cu o necunoscută la numitor poate fi aplicat următorul ***algoritm***:

① Efectuăm transformările necesare și scriem inecuația sub forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0\ (\ge,<,\le)$, unde $P(x)$ și $Q(x)$ sunt expresii algebrice raționale.

② Aflăm mulțimea D care se obține excluzând din $\mathbb{R}$ soluțiile ecuației $Q(x)=0$.

③ Definim funcția $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

④ Aflăm zerourile funcției, adică zerourile numărătorului, rezolvând ecuația $P(x)=0$.

⑤ Reprezentăm pe axa numerelor domeniul D și zerourile funcției f.

⑥ Construim „curba semnelor”.

⑦ Selectăm intervalele corespunzătoare semnului funcției f.

⑧ Scriem răspunsul.

Aplicăm

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\dfrac{5-x}{2x+2} \geq 0$.

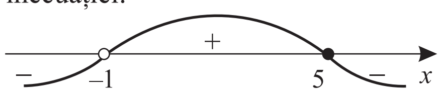
Rezolvare:

$2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1.\ D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Fie funcția $f: \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{5-x}{2x+2}$. Avem $f(x)=0$ pentru $x=5$.

Ținem cont că 5 este soluție, iar –1 nu este soluție a inecuației.

Construim „curba semnelor”:



Așadar, $f(x) \geq 0$ pentru $x \in (-1, 5]$.

Răspuns: $S=(-1, 5]$.

Rețineți

1. Valorile pentru care funcția f nu este definită (zerourile numitorului) nu se includ în mulțimea soluțiilor inecuației inițiale (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cerculețe necolorate).

2. Zerourile funcției f (zerourile numărătorului) nu aparțin mulțimii soluțiilor inecuației date, dacă această inecuație conține semnul „ > ” sau „ < ”. Zerourile funcției f aparțin mulțimii soluțiilor, dacă inecuația inițială conține semnul „ ≥ ” sau „ ≤ ” (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cerculețe colorate) și aparțin $D(f)$.

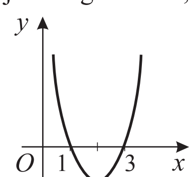
Exerciții și probleme

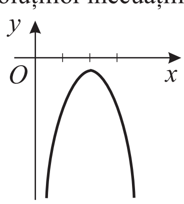
Fixăm cunoștințele

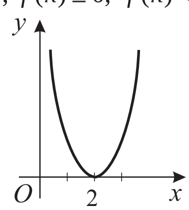
1. Precizați dacă sunt echivalente inecuațiile:

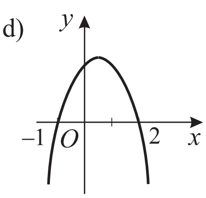
a) $x^2 \leq 1$ și $x \leq 1$; b) $x^2 > 4$ și $x > 2$; c) $(x+3)^2 \geq 0$ și $(x+5)^2 \geq 0$.

2. *Investigați!* Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$, este definită de graficul ei. Determinați, cu ajutorul graficului, mulțimile soluțiilor inecuațiilor $f(x)>0,\ f(x) \geq 0,\ f(x)<0,\ f(x) \leq 0$.

a) 

b) 

c) 

d) 

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $6x^2-7x+2>0$; b) $-x^2-2x+48<0$; c) $8x^2+10x-3 \leq 0$; d) $25x^2-10x+1>0$;
e) $49x^2-28x+4 \leq 0$; f) $4x^2-4x+15>0$; g) $7x<x^2$; h) $4x^2-x<5$.

4. Folosind metoda intervalelor, rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(x+8)(x-5)>0$; b) $x(x+2) \leq 0$; c) $\dfrac{x-5}{x+6}<0$; d) $\dfrac{x+1}{x+4} \geq 0$; e) $\dfrac{2x-1}{1-3x} \geq 0$.

Formăm abilitățile și aplicăm

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $x(x+5)-2>4x$; b) $(x+4)(x+5)-x \leq 5$; c) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$; d) $2x(3x-1) \geq 4x^2+5x+9$.

6. *Lucrați în perechi!* Compuneți o inecuație de gradul II cu mulțimea soluțiilor:

a) $S=\mathbb{R}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=[-2, 3]$; d) $S=(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; e) $S=\{3\}$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $3x^2+4 \leq 10-x(x-2)$; b) $(3x-2)^2 \geq 3x(x-1)$; c) $\dfrac{-3}{x^2+x-20} \geq 0$; d) $\dfrac{1}{x^2+5x+7}<0$.

8. ***Lucrați în perechi!*** Determinați domeniul de definiție al funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{1-x-2x^2}$; b) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3x^2+12x}}$.

9. ***Lucrați în grup!*** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $x(x+2)(x-3)<0$; b) $(2x+1)(3-x)(x+5)\geq 0$; c) $(x-1)(x^2-5x+6)\leq 0$; d) $\dfrac{x^2-x-6}{x-1}\geq 0$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

10. Poate fi decupat dintr-o foaie de hârtie cu dimensiunile de 10 cm şi 3 cm un dreptunghi care are lățimea cu 4 cm mai mică decât lungimea și aria mai mare de 21 cm²?

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $\dfrac{4x-2}{3x+5}+4\leq 0$; b) $3-x\geq \dfrac{1}{2-x}$; c) $x+\dfrac{2}{x}>3$; d) $\dfrac{7x-5}{x+1}>x$.

12. Determinați domeniul de definiție al funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{-x^2+x+30}+\dfrac{1}{x-1}$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-x-42}+\sqrt{100-x^2}$.

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă:

a) $-4\leq x^2-5x+2\leq -2$; b) $-1<x^2+2x<3$.

14. Aflați valorile parametrului real m, astfel încât inecuația să fie adevărată pentru orice x real:

a) $5x^2-x+m>0$; b) $mx^2-10x-5<0$.

15. Determinați valorile parametrului real a pentru care inecuația nu are soluții:

a) $x^2+ax+1<0$; b) $ax^2+4ax+5\leq 0$.

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Determinați cea mai mare soluție întreagă a inecuației:

a) $x+2\geq 2{,}5x-1$; b) $x-\dfrac{x+4}{4}+\dfrac{3x-1}{2}<3$.

2. ***Investigați!*** Aflați cel mai mic număr natural ce aparține mulțimii soluțiilor inecuației $3x-2<1{,}5x+4$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $x^2+3x+2>0$; b) $2x<x^2$; c) $4x^2<1$;
d) $(x-3)(x+7)\geq 0$; e) $x^2-x+3>0$; f) $\dfrac{x-5}{3x+3}\leq 0$.

Formăm abilitățile și aplicăm

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} x-4>5-2x, \\ 3-2x<7+x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 10x-2>4x+1, \\ 2x-\dfrac{2}{3}>\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5. ***Investigați!*** Aflați cel mai mic număr întreg care aparține domeniului de definiție al funcției definite prin formula $f(x)=\sqrt{4+x+\dfrac{3}{x}}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(x-4)^2+12\geq (3x-2)^2$; b) $3x(x+\sqrt{3})\leq (x+\sqrt{3})^2$;

c) $\dfrac{(x-2)(x^2+4)}{3x+1}\leq 0$; d) $\dfrac{7x}{3x-4}\geq 1$.

7. ***Lucrați în perechi!*** Pentru care valori ale lui x valoarea funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2-14x+20$, este mai mare decât valorile corespunzătoare ale funcției $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x-16$?

8. (EG, 2021) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 5$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care valorile respective ale funcției f nu sunt mai mari decât 2.

9. (EG, 2023) Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 4$. Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $f(3) \cdot f(x) < 3x$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x-2 > 5x - \dfrac{x-3}{2}, \\ |3x+2| < 10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-2| \geq 6, \\ |x-5| \leq 3. \end{cases}$

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă $1 < \dfrac{7x-2}{2x+1} < 3$.

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\dfrac{|x+1|}{x^2+4x-12} \geq 0$.

13. Aflați valorile parametrului real a pentru care inecuația $ax^2 - 8ax + 3a + 7 \geq 0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$.

14. Determinați valorile parametrului real a, astfel încât orice $x \in \mathbb{R}$ să fie soluție a inecuației $(a^2-1)x^2 + 2(1-a)x + 2 \geq 0$.

15. Rezolvați în mulțimea $\mathbb{Z}$ inecuația $28x + 30y + 31z = 365$.
Indicație. Una dintre soluțiile ecuației reprezintă lunile anului.

16. *Lucrați în grup!* **Proiect.** *Ecuații, inecuații, sisteme în fizică, chimie.*

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Fie expresiile $E_1 = \dfrac{2x-5}{3}$ și $E_2 = -\dfrac{4x+1}{5}$.
a) Aflați valorile reale ale lui x, astfel încât $E_1 < E_2$.
b) Aflați valorile reale ale lui x pentru care suma expresiilor E_1 și E_2 este un număr nenegativ.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} E_1 > 0, \\ E_2 \leq 0. \end{cases}$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x(x-5) - 8 \geq 2x$.

3. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + x - 3$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 5$.
a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă:
„Funcția g ia valori pozitive pentru $x \in (5, +\infty)$”.
A **F**
b) Aflați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\dfrac{f(x)}{g(x)} \geq 0$.

4. La o piscină, costul este de 20 lei pe oră, iar consumația minimă este de 40 lei. La o altă piscină, costul este de 15 lei pe oră, iar consumația minimă este de 60 lei. Determinați după câte ore oferta piscinei a doua este mai avantajoasă decât oferta primei piscine.

Varianta II

1. Fie expresiile $M_1 = \dfrac{1-3x}{2}$ și $M_2 = \dfrac{2x+3}{7}$.
a) Aflați valorile reale ale lui x, astfel încât $M_1 < M_2$.
b) Aflați valorile reale ale lui x pentru care diferența $M_1 - M_2$ este un număr nenegativ.
c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} M_1 \leq 0, \\ M_2 > 0. \end{cases}$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x(x-3) - 6 \leq 2x$.

3. Fie funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 6$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 8x - 3$.
a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă:
„Funcția f ia valori negative pentru $x \in (6, +\infty)$”.
A **F**
b) Aflați $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\dfrac{f(x)}{g(x)} \leq 0$.

4. Compania „Moldnet” propune conectarea la internet la prețul de 240 lei pentru instalare și taxa lunară de 150 lei. Compania „Supernet”, oferind aceeași viteză a internetului, propune conectarea la prețul de 300 lei pentru instalare și taxa lunară de 140 lei. Determinați după câte luni oferta companiei „Supernet” devine mai convenabilă.

Capitolul

6

Elemente de teoria probabilităților și de statistică matematică. Elemente de calcul financiar

Omul fără învățătură e ca pământul fără udătură.

Proverb

Deseori în viață folosim termenii: *eveniment*, *întâmplător*, *aleator*, *posibil*, *probabil*, *sigur*, *şansă*, *probabilitate*. Ce înseamnă aceşti termeni? De ce trebuie să-i cunoaştem? Când şi cum îi putem utiliza?

Răspunsurile la întrebările de mai sus le vom găsi în acest capitol.

§ 1. Noțiunea de *eveniment*

Cercetăm

1. Se aruncă un zar. Ce rezultat vom obține în urma experimentului „Aruncarea zarului”?

2. Daniela a cumpărat un bilet de loterie. Acest bilet poate fi câştigător sau nu. Există oare alte cazuri posibile?

3. Fie experimentul „Aruncarea unei mingi de baschet la coş”. Care sunt rezultatele posibile ale acestui experiment?

Rezolvare:

1. Nu putem prevedea care dintre fețele marcate cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte va apărea. Deci, se va obține întâmplător (aleator) una dintre fețe.

2. Desigur, biletul poate fi câştigător sau nu. Alte cazuri posibile nu există.

3. În urma experimentului „Aruncarea unei mingi de baschet la coş” pot fi atestate două rezultate: marcare sau nu.

Aruncarea zarului, cumpărarea biletului de loterie, aruncarea mingii de baschet la coş sunt exemple de experimente.

Definiții

- Realizarea unui experiment se numeşte **probă**.
- Rezultatul unui experiment se numeşte **eveniment**.

De exemplu, „Apariția feței marcate cu 5 puncte” este un eveniment al experimentului „Aruncarea zarului”; „Biletul nu este câştigător” este un eveniment al experimentului „Participarea la loterie”.

Există multe evenimente despre care nu putem spune cu certitudine dacă se vor realiza sau nu. De exemplu, evenimentele „Apariția feței cu 3 puncte la aruncarea zarului”, „Marcarea mingii la aruncarea acesteia la coş” nu pot fi anticipate cu siguranță. Acestea depind de mulți factori întâmplători şi sunt numite *evenimente aleatoare*.

Definiție

Eveniment aleator se numeşte evenimentul care, în urma efectuării experimentului, se poate realiza, dar poate şi să nu se realizeze.

Evenimentul „Apariția uneia dintre fețele cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte la aruncarea zarului” este un eveniment sigur, iar evenimentul „Extragerea a două creioane de culoare verde din cutia cu creioane de culoare albastră sau roşie” este un eveniment imposibil. Evenimentul „O pisică vorbeşte”, de asemenea, este un eveniment imposibil.

Definiție

- **Eveniment imposibil** se numeşte evenimentul care nu se realizează niciodată. Evenimentul imposibil se notează cu $\varnothing$.
- **Eveniment sigur** se numeşte evenimentul care se realizează în urma oricărei probe. Evenimentul sigur se notează, de regulă, cu E.

De exemplu, evenimentul „După marți urmează duminică” este un eveniment imposibil, iar evenimentul „După iunie urmează luna iulie” este un eveniment sigur.

Rețineți

Evenimentele pot fi clasificate în sigure, imposibile şi aleatoare.
Evenimentele se notează, de regulă, cu litere majuscule: A, B, C, ...
Orice eveniment este legat de un experiment.

Atenție! În cadrul unui experiment există un număr de cazuri posibile şi un număr de cazuri favorabile pentru evenimentul dat, din numărul de cazuri posibile.

Exemple

1. La aruncarea unei monede sunt două posibilități: {apariția stemei, apariția valorii}. Deci, avem două evenimente aleatoare: A = {apariția feței cu stema};
B = {apariția feței cu valoarea}.

Atât evenimentul A, cât şi evenimentul B, au câte un singur caz favorabil din două cazuri posibile.

2. La aruncarea unui zar poate apărea una dintre fețele marcate cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte. Prin urmare, există şase posibilități: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Observație

La aruncarea unui zar pot fi definite şi alte evenimente, nu numai apariția feței cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte. Astfel de evenimente vor fi cercetate în continuare.

Există evenimente care au şanse egale de realizare. De exemplu, dacă într-o cutie sunt tot atâtea creioane albastre câte roşii, atunci evenimentul B = {creionul extras este albastru} şi evenimentul C = {creionul extras este roşu} au aceeaşi şansă de realizare. În cazul în care numărul creioanelor roşii din cutie este mai mare decât numărul creioanelor albastre, evenimentul C are o probabilitate mai mare de realizare decât evenimentul B.

Aplicăm

La aruncarea unui zar examinăm evenimentele:

A_1 = {apariția feței cu 1 punct};
A_2 = {apariția feței cu 3 sau 4 puncte};
A_3 = {apariția feței cu 7 puncte};
A_4 = {apariția feței cu un număr par de puncte};
A_5 = {apariția feței cu un număr impar de puncte};
A_6 = {apariția feței cu un număr de puncte mai mic decât 5};
A_7 = {apariția uneia dintre fețele cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte}.

1) Corelați termenii „eveniment sigur”, „eveniment posibil”, „eveniment mai posibil decât”, „eveniment imposibil”, „evenimente egal posibile” cu evenimentele A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7.

2) Determinați numărul de cazuri favorabile pentru fiecare dintre evenimentele A_1–A_7.

Rezolvare:

1) Evenimentele A_1, A_2, A_4, A_5, A_6 sunt posibile; evenimentul A_3 este imposibil; evenimentul A_7 este sigur; evenimentul A_2 este mai posibil decât evenimentul A_1; evenimentul A_6 este mai posibil decât evenimentul A_2; evenimentele A_4 și A_5 sunt egal posibile. (Propuneți și alte relații.)

2) Evenimentul A_1 are un singur caz favorabil; A_2 are 2 cazuri favorabile; A_3 nu are cazuri favorabile; A_4 are 3 cazuri favorabile; A_5 are 3 cazuri favorabile; A_6 are 4 cazuri favorabile; A_7 are 6 cazuri favorabile din 6 cazuri posibile.

Rețineți

Elementele mulțimii evenimentelor posibile ale unui experiment aleator se numesc **evenimente elementare**.

Exemple

a) La aruncarea unui zar evenimentul A_1 este elementar.
Evenimentul „Apariția unui număr impar” nu este elementar.

b) La aruncarea unei monede sunt două evenimente elementare: {apariția stemei}, {apariția valorii}.

Rețineți

Evenimentele unui experiment aleator se consideră **egal posibile**, dacă se poate afirma cu certitudine că fiecare are aceeași șansă de realizare.

Exemple

1. Evenimentele A_4 și A_5, la aruncarea zarului, sunt egal posibile.
2. La aruncarea zarului avem 6 evenimente egal posibile, referitoare la apariția feței cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte.

Observație

Noțiunea de evenimente egal posibile ne permite să comparăm două evenimente aleatoare din punctul de vedere al șansei de realizare. De fapt, trăim în lumea experimentelor și evenimentelor aleatoare (întâmplătoare). De aceea este important să știm dacă putem găsi unele legități în lumea evenimentelor aleatoare. Putem oare determina șansa realizării evenimentului aleator care ne interesează?

Răspunsuri la astfel de întrebări ne dă un compartiment important al matematicii care se numește **Teoria probabilităților**.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Indicați câteva evenimente pentru experimentul:
   a) Se ia la întâmplare un număr din mulțimea {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100};
   b) Se aruncă o monedă de trei ori;
   c) Se încălzește apa până la temperatura de 100°C;
   d) Se joacă o partidă de șah.

2. Determinați și scrieți evenimentele elementare ale experimentului:

a) Se alege o zi a săptămânii;

b) Se alege șeful clasei din două candidaturi;

c) Se extrage la întâmplare o bilă dintr-o urnă ce conține 10 bile albe numerotate cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;

d) Se extrage o bilă dintr-o urnă cu bile albe și negre.

3. ***Lucrați în perechi!*** Determinați care dintre evenimente este sigur, imposibil, aleator:

a) În anul 2029 populația Terrei va depăși 8 miliarde de locuitori.

b) În anul 2030 în Republica Moldova se vor naște 25 000 de băieți.

c) După miercuri urmează marți.

d) Ziua de naștere a prietenului este pe 30 februarie.

e) După sâmbătă urmează duminică.

f) După octombrie urmează decembrie.

Formăm abilitățile și aplicăm

4. ***Investigați!*** Comparați șansa de producere a evenimentelor A și B utilizând termenii „e mai posibil decât”, „e mai puțin posibil decât”, „sunt egal posibile”.

a) Dimineața în care te trezești este a unei zile:

$A = \{$obișnuite (de lucru)$\}$; $B = \{$de odihnă (de sărbătoare)$\}$.

b) Echipa de fotbal a Republicii Moldova joacă cu echipa de fotbal a Braziliei:

$A = \{$învinge echipa Republicii Moldova$\}$; $B = \{$învinge echipa Braziliei$\}$.

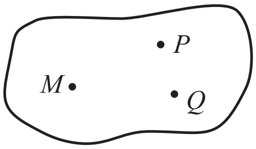
c) Se aruncă un zar:

$A = \{$apare fața cu 6 puncte$\}$; $B = \{$apare o față care nu are 6 puncte$\}$.

d) S-a dat testul la matematică:

$A = \{$toți elevii au luat nota 10$\}$; $B = \{$unii elevi au luat nota 10$\}$.

5. ***Investigați!*** Se unesc la întâmplare trei puncte necoliniare.
Ce figuri geometrice se pot obține?
Care este șansa să obținem un triunghi?



6. Se aruncă simultan două zaruri și se scrie suma punctelor obținute.
Ținând cont de rezultatele posibile, dați câte două exemple de:

a) evenimente sigure; b) evenimente imposibile; c) evenimente aleatoare.

7. Formulați exemple de evenimente sigure, imposibile și aleatoare din diverse discipline școlare.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

8. Dați câte trei exemple de evenimente sigure, imposibile și aleatoare ale experimentelor din diverse domenii.

9. Într-o urnă sunt 5 bile albe, 8 bile negre și 10 bile roșii. Aflați numărul minim de bile ce trebuie extrase simultan la întâmplare, astfel încât printre ele să fie:

a) două bile roșii; b) trei bile negre; c) o bilă albă;

d) două bile de culori diferite; e) trei bile de culori diferite.

10. Se aruncă simultan două zaruri. Determinați mulțimea ale cărei elemente reprezintă evenimentul „Obținerea sumei 6”.

11. Într-o secție lucrează 8 bărbați și 4 femei. Au fost alese la întâmplare 2 persoane. Care este șansa ca aceste persoane să fie bărbați?

§ 2. Noțiunea de probabilitate

2.1. Definiția clasică a probabilității

Cercetăm

1 Calculați șansa ca la o aruncare a unui zar să apară:

a) un punct; b) un număr de puncte divizibil cu 2;
c) un număr de puncte mai mic decât 5; d) 8 puncte.

Rezolvare:

a) Șansa ca la o aruncare a zarului să obținem 1 punct este una din șase, sau $1:6=0{,}1(6)$.

b) La aruncarea zarului pot apărea 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte. Dintre aceste numere, numai trei (2, 4 şi 6) se divid cu 2. Prin urmare, sunt 3 şanse din 6 ca numărul care apare să se dividă cu 2, adică şansa este $3:6=0{,}5$.

c) Exact 4 numere posibile (1, 2, 3 şi 4) sunt mai mici decât 5. Deci, sunt 4 şanse din 6 ca numărul de puncte care apar la aruncare să fie mai mic decât 5, adică şansa este $4:6=0,(6)$.

d) Deoarece nicio față a zarului nu are 8 puncte, şansa ca la o aruncare să apară 8 puncte este egală cu 0.

2 Calculați șansa ca la o aruncare a monedei să apară:

a) stema; b) valoarea.

Rezolvare:

a) Șansa ca la o aruncare a monedei să apară stema este una din două sau $1:2=0{,}5$. Notăm $P(s)=0{,}5$.

b) Șansa ca la o aruncare a monedei să apară valoarea este, de asemenea, una din două, adică $1:2=0{,}5$. Notăm $P(v)=0{,}5$.

3 Într-o urnă sunt 3 bile albe, 5 bile negre şi 4 bile roşii. Calculați şansa ca, extrăgând o bilă la întâmplare, aceasta să fie:

a) albă; b) neagră; c) roşie.

Rezolvare:

a) Şansa să apară o bilă albă poate fi exprimată prin raportul dintre numărul bilelor albe şi numărul tuturor bilelor: $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Notăm $P(a)=0{,}25$.

b) Dintre cele 12 bile din urnă, 5 sunt negre. Deci, şansa ca bila să fie neagră este $\frac{5}{12}=0{,}41(6)$.

Notăm $P(n)=0{,}41(6)$.

c) Şansa de a extrage o bilă roşie este $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=0,(3)$.

Notăm $P(r)=0,(3)$.

Observăm că, pentru a calcula şansa de realizare a evenimentului respectiv, aflăm raportul dintre numărul cazurilor favorabile evenimentului şi numărul cazurilor posibile ale experimentului aleator corespunzător evenimentului cercetat. Numărul obținut este numit **probabilitatea evenimentului aleator**.

Definiție

Se numeşte **probabilitate** a unui eveniment aleator A raportul dintre numărul m de cazuri egal posibile favorabile lui A şi numărul n de cazuri egal posibile ale experimentului.

Rețineți

Probabilitatea evenimentului A se notează $P(A)$.
Conform definiției,

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Formula (1) reprezintă ***definiția clasică a probabilității***.

Exemple

1. Probabilitatea apariției „stemei” la aruncarea monedei este $P(s)=0{,}5$, iar probabilitatea apariției „valorii” este $P(v)=0{,}5$, deoarece $m=1$, iar $n=2$.

2. Probabilitatea apariției feței cu 4 puncte la aruncarea unui zar este $P(4)=\frac{1}{6}$, deoarece $m=1$, iar $n=6$.

Uneori, probabilitatea se exprimă în procente.

Astfel, pentru evenimentul „Apariția stemei”, $P(s)=50\%$; pentru evenimentul „Apariția valorii”, $P(v)=50\%$.

Probabilitatea se aplică pe larg în viață, în știință, în economie, în sociologie etc. De exemplu, dacă la prognoza meteo s-a anunțat că „mâine va ploua cu probabilitatea de 70%”, aceasta nu înseamnă că obligatoriu va ploua, dar șansele sunt destul de mari. Ieșind din casă, ar fi bine să luăm umbrela.

2.2. Proprietățile probabilității

Rețineți

Din definiția probabilității rezultă ***proprietățile probabilității***:

1° Probabilitatea evenimentului sigur E este 1. Deci, $P(E)=1$.
Într-adevăr, deoarece $m=n$, conform (1), obținem $P(E)=\frac{n}{n}=1$.

2° Probabilitatea evenimentului imposibil este 0. Deci, $P(\varnothing)=0$.
Într-adevăr, deoarece $m=0$, conform (1), obținem $P(\varnothing)=\frac{0}{n}=0$.

3° Probabilitatea unui eveniment aleator este un număr cuprins între 0 și 1.
Într-adevăr, numărul m al cazurilor favorabile evenimentului aleator A satisface dubla inegalitate $0<m<n$, de unde $0<\frac{m}{n}<1$. Prin urmare, $0<P(A)<1$.

Generalizăm

1. Probabilitatea oricărui eveniment A satisface dubla inegalitate $0\le P(A)\le 1$.

2. Cu cât probabilitatea este mai mare, cu atât mai des se realizează evenimentul aleator în cadrul probelor efectuate ale experimentului respectiv.

Aplicăm

1 Calculați probabilitatea evenimentului:

a) A = {apariția, la aruncarea zarului, a uneia dintre fețele cu 1, 2, 3, 4, 5 sau 6 puncte};

b) B = {apariția a 9 puncte la aruncarea zarului};

c) C = {extragerea la întâmplare a bilei albe dintr-o urnă ce conține 3 bile albe și 7 bile negre}.

2 Ordonați crescător probabilitățile obținute.

Rezolvare:

1. a) Deoarece pentru evenimentul A numărul cazurilor favorabile este $m=6$, iar numărul cazurilor posibile este $n=6$, obținem $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{6}=1$.

Așadar, evenimentul A este un eveniment sigur și probabilitatea lui este 1.

b) Evenimentul B este un eveniment imposibil și probabilitatea lui $P(B)$ este 0.

c) Deoarece în urnă sunt în total $3+7=10$ (bile), numărul cazurilor favorabile evenimentului C este $m=3$, iar numărul de cazuri posibile este $n=10$. Atunci, $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{\square}{\square}=\square$.

Evenimentul C este un eveniment aleator, a cărui probabilitate este $\square$.

2. Ordonând crescător probabilitățile calculate, obținem $0<0{,}3<1$ sau

$$P(B)<P(C)<P(A).$$

Rețineți

Evenimentele egal posibile se mai numesc ***evenimente echiprobabile***. Probabilitatea fiecăruia dintre evenimentele echiprobabile este una și aceeași.

De exemplu, evenimentele „Apariția stemei” și „Apariția valorii” sunt echiprobabile la aruncarea unei monede perfecte. Dacă însă vom arunca o monedă deformată, aceste evenimente nu mai sunt echiprobabile și probabilitatea fiecăruia poate fi calculată numai prin probe.

Putem calcula probabilitatea evenimentelor fără a efectua experimente numai dacă știm cu certitudine că toate rezultatele posibile ale experimentului sunt evenimente echiprobabile.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. *Investigați!* Care este șansa ca la aruncarea unui zar să apară fața cu numărul de puncte:
a) 6; b) 0; c) 10; d) 3?

2. Într-un set de 20 de pătrate, numărul pătratelor roșii este egal cu numărul pătratelor albastre. Care este șansa de a extrage un pătrat roșu? Dar un pătrat albastru?

3. *Lucrați în perechi!* Calculați șansa ca la aruncarea unui zar să apară o față:
a) cu un număr mai mic decât 2; b) cu un număr mai mare decât 2;
c) cu un număr mai mic decât 3; d) cu un număr mai mic decât 6;
e) cu un număr mai mare decât 10.

4. Aflați probabilitatea extragerii unei bile albe dintr-o urnă ce conține 15 bile albe.

5. Calculați probabilitatea obținerii, la aruncarea zarului, a unui număr de puncte:
a) multiplu al lui 2; b) multiplu al lui 3; c) multiplu al lui 4; d) multiplu al lui 1.

6. Care este probabilitatea că după duminică urmează luni?

7. Într-o urnă sunt 4 bile albe, 5 bile negre şi 11 bile roşii. Calculați probabilitatea ca bila extrasă la întâmplare să fie:
a) albă; b) neagră; c) roşie.

8. Care este probabilitatea ca un peşte să vorbească?

9. ***Investigați!*** Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul mai mic decât 91, luat la întâmplare, să fie:
a) prim; b) par; c) impar.

Formăm abilitățile și aplicăm

10. Într-un coş sunt 3 perechi de mănuşi de diferite culori. Se iau la întâmplare două mănuşi. Care este probabilitatea de a avea o pereche de mănuşi de aceeaşi culoare?

11. O urnă conține 5 bile albe, 6 bile roşii şi 7 bile verzi. Se extrage la întâmplare o bilă. Care este probabilitatea că bila extrasă nu va fi albă.

12. În clasa a IX-a învață 14 băieți și 17 fete. Pentru a fi de serviciu în clasă, se alege la întâmplare un elev. Care este probabilitatea ca acest elev să fie:
a) băiat; b) fată?

13. Într-o urnă sunt 6 bile albe, 5 bile galbene şi 13 bile verzi. Aflați numărul minim de bile ce trebuie extrase simultan, la întâmplare, astfel încât printre ele să se afle:
a) două bile verzi; b) două bile albe; c) două bile galbene; d) două bile de culori diferite.

14. Într-o urnă sunt 30 de bile numerotate: 1, 2, 3, ..., 30. Ordonați probabilitățile de realizare a evenimentelor:
$A = \{$extragerea unei bile, al cărei număr împărțit la 5 dă restul 1$\}$;
$B = \{$extragerea unei bile cu numărul un pătrat perfect$\}$.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

15. Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul mai mic decât 501, luat la întâmplare, să aibă suma cifrelor egală cu 13.

16. Într-o urnă sunt 50 de jetoane numerotate: 1, 2, 3, ..., 50. Ordonați probabilitățile de producere a evenimentelor:
$A = \{$extragerea unui număr prim cu 15$\}$;
$B = \{$extragerea unui număr prim cu 25$\}$;
$C = \{$extragerea unui număr prim cu 30$\}$.

17. 1) Propuneți 3 experimente cu:
a) evenimente echiprobabile;
b) evenimente care nu sunt echiprobabile.
2) Calculați probabilitățile evenimentelor de la punctul a).

18. Formulați şi rezolvați câte un exercițiu asemănător cu exercițiile **6**, **7**, **8**, **10**, **14**.

19. ***Lucrați în grup!*** **Proiect.** *Aplicații ale probabilităților în diverse domenii.*

§ 3. Elemente de statistică matematică

Investigăm

• Elevii clasei a IX-a au obținut la testul de matematică următoarele rezultate: două note de 3, o notă de 4, şapte note de 5, patru note de 6, cinci note de 7, trei note de 8, patru note de 9 şi două note de 10. Înregistrați aceste date într-un tabel.

Rezolvare:

Tabelul alăturat conține rezultatele obținute de elevii clasei a IX-a la testul de matematică.

Spunem că am realizat o analiză statistică, am colectat şi am înregistrat date.

Nota	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecvența	0	0	2	1	7	4	5	3	4	2

Fig. 1

Rețineți

Statistica matematică este ştiința care se ocupă de colectarea, înregistrarea, prelucrarea, analiza şi interpretarea datelor referitoare la un anumit fenomen (din activitatea economică şi viața socială, din fizică, biologie, meteorologie, agricultură etc.).

Definiții

- Orice mulțime care formează obiectul unei analize statistice se numeşte **populație statistică**. Numărul elementelor populației statistice se numeşte **volumul populației**.
- Fiecare element al populației statistice este numit **unitate statistică** (sau **individ**).
- Trăsătura comună a tuturor unităților statistice (indivizilor) este numită **caracteristică statistică**.
- Caracteristica ce poate fi măsurată (nota, vârsta, înălțimea, volumul etc.) se numeşte **caracteristică cantitativă (numerică)**.
- Caracteristica ce nu poate fi măsurată (culoarea ochilor, preferințele etc.) se numeşte **caracteristică calitativă**.
- Caracteristica ce poate lua numai valori izolate dintr-o mulțime de valori se numeşte **caracteristică discretă** (nota, numărul de elevi şi eleve în clasă etc.).
- Caracteristica ce poate lua orice valoare dintr-un interval numeric se numeşte **caracteristică continuă** (înălțimea, volumul, aria etc.).

Exemple

Populația	Elevii unei clase	Elevii unei clase	Autovehiculele dintr-o întreprindere	Colaboratorii unei firme	Colaboratorii unei firme
Caracteristica	Nota la testul de matematică	Culoarea ochilor	Durata de funcționare	Vârsta	Greutatea

Caracteristicile *nota la testul de matematică*, *durata de funcționare*, *vârsta*, *greutatea* sunt de natură cantitativă, iar caracteristica *culoarea ochilor* este de natură calitativă.

1 Identificați în problema rezolvată de mai sus: a) populația statistică;
b) unitățile statistice;
c) caracteristica şi tipul caracteristicii.

Rezolvare:

a) Populația statistică este mulțimea elevilor din clasă.
b) Fiecare elev al clasei este o unitate statistică.
c) Caracteristica este nota obținută la test şi este o caracteristică discretă.

2 Reprezentați printr-un grafic cu bare rezultatele obținute la testul de matematică din exemplul de mai sus.

Rezolvare:

Reprezentarea grafică este dată în figura 2.

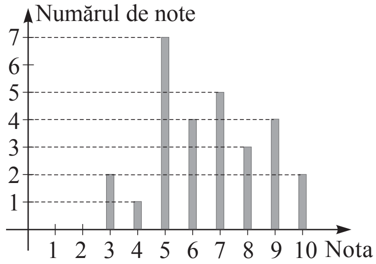


Fig. 2

Rezultatele obținute la o analiză statistică pot fi reprezentate într-un tabel (*tabelul de date statistice* (fig. 1)) sau cu ajutorul graficelor şi diagramelor (*grafice cu bare*, *diagrame prin cercuri*, *diagrame prin pătrate*, *diagrame structurale* (*cerc de structură*, *pătrat*) etc.).

De exemplu, în figura 3 (cerc de structură) este reprezentată structura unei suprafețe, ca mod de folosire a terenului, dintr-o asociație agricolă.

Figura 4 (diagramă prin pătrate) ilustrează modificarea numărului de cărți dintr-o bibliotecă într-o perioadă de timp.

Producția semestrială (anuală, lunară, săptămânală, zilnică) a unei întreprinderi poate fi reprezentată sub forma unui grafic, numit ***graficul producției*** (fig. 5).

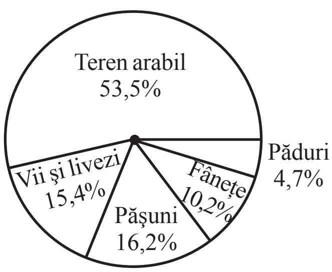


Fig. 3

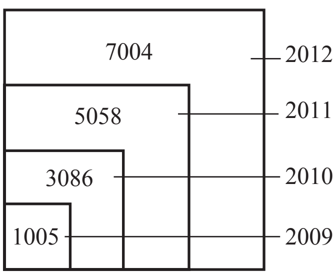


Fig. 4

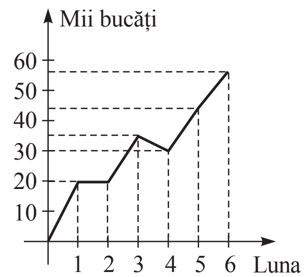


Fig. 5

Rețineți

O problemă importantă a trasării graficelor la o analiză statistică este păstrarea proporțiilor, prezentarea corectă a tuturor datelor.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. S-a efectuat o analiză statistică a situației frecventării lecțiilor de către elevii claselor V–IX în luna noiembrie şi s-au obținut următoarele rezultate: în clasa a V-a A – 10 absențe, în a V-a B – 8 absențe, în a VI-a A – 4 absențe, în a VI-a B – 2 absențe, în a VII-a –14 absențe, în a VIII-a – 7 absențe, în a IX-a A – 8 absențe, în a IX-a B – 3 absențe.

a) Identificați: populația statistică, unitățile statistice, caracteristica şi tipul caracteristicii.

b) Reprezentați rezultatele obținute:

1) într-un tabel; 2) printr-un grafic cu bare.

2. *Investigați!* Înregistrați datele statistice referitoare la înălțimea elevilor din clasa voastră.

a) Precizați care este: populația statistică, unitățile statistice (indivizii) şi caracteristica statistică.

b) Reprezentați prin tabelul de date statistice şi prin graficul cu bare rezultatele obținute.

Formăm abilitățile și aplicăm

3. Reprezentați cu ajutorul unui cerc de structură numărul de băieți și numărul de fete din clasa voastră.

4. Reprezentați cu ajutorul unei diagrame prin pătrate suprafața continentelor (găsiți datele în manualul de geografie).

5. Reprezentați printr-un grafic cu bare mulțimea elevilor și elevelor din şcoala voastră repartizați pe clase.

6. *Miniproect.* Înregistrați temperatura aerului în cursul zilei de duminică, din oră în oră. Treceți datele obținute într-un grafic.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

7. *Investigați!* Realizați o analiză statistică a unor evenimente (experimente) sociale, economice etc. Colectați, înregistrați şi reprezentați datele printr-un tabel, grafic sau printr-o diagramă.

8. *Lucrați individual!* **Investigație.** *Evenimentele în viața mea.*

§ 4. Elemente de calcul financiar

În diverse situații se discută despre situația financiară în familie, în stat, la firmă etc. Se utilizează termenii: procente, dobândă, TVA, preț, credit, buget. Ce înseamnă aceşti termeni, când şi cum îi putem utiliza?

Procent – *pro centum* (lat.) – împărțit la o sută.

4.1. Procente

Ne amintim

- Raportul de forma $\frac{p}{100}$ (se mai scrie $p\%$) se numeşte **raport procentual**.
- Un procent (1%) este o sutime (a suta parte).

$$p\%=\frac{p}{100};\quad 1\%=\frac{1}{100},\quad 25\%=\frac{25}{100}.$$

- $1=100\%=\frac{100}{100}$.

Rețineți

1. Pentru a afla câte procente (p) reprezintă un număr n dintr-un alt număr m, înmulțim valoarea raportului $\frac{n}{m}$ cu 100%: $\boxed{p\%=\frac{n}{m}\cdot 100\%}$ (1)

2. Pentru a afla $p\%$ dintr-un număr dat n calculăm numărul:

$$\boxed{m=\frac{p}{100}\cdot n.} \qquad (2)$$

3. Pentru a afla numărul, ştiind că m reprezintă $p\%$ din el calculăm numărul:

$$\boxed{n=\frac{100}{p}\cdot m.} \qquad (3)$$

Observație

Procentele se utilizează, de regulă, în business, operații bancare, financiare etc.
Promilele se utilizează în domeniile unde sunt necesare calcule, cu exactitate sporită. De exemplu, în industria farmaceutică.

$0,1\ \% = 1\ ‰ = \frac{1}{1000}$ – se citeşte „o promilă”.

Aplicăm

1 În clasa a IX-a învață 12 fete, ceea ce constituie 48% din numărul total de elevi și eleve ai acestei clase. Aflați câți elevi și eleve învață în clasă.

Rezolvare:

Aplicăm formula (3) și obținem: $n=\frac{100}{48}\cdot 12=25$.

Răspuns: 25 de elevi și eleve.

2 Prețul unui produs a scăzut cu 10% și după o lună noul preț a scăzut cu 20%. După cele două modificări de preț produsul costă 207 lei. Aflați prețul inițial al produsului.

Rezolvare:

Fie x – prețul inițial. După prima modificare prețul va fi $x-\frac{10}{100}\cdot x=0{,}9x$ (lei). Iar după modificarea a doua prețul va fi $0{,}9x-0{,}2\cdot(0{,}9x)=0{,}9x(1-0{,}2)=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot x=0{,}72x$ (lei).

Conform condiției după cele două modificări vom avea: $0{,}72x=207$.

Deci $x=207:0{,}72=287{,}5$ (lei).

Răspuns: 287,5 lei.

4.2. Dobânzi

Procentele au o aplicare extinsă în domeniul financiar. Inclusiv pentru determinarea mărimii dobânzii.

Rețineți

- ***Dobânda*** este suma de bani care trebuie achitată pentru folosirea unei sume de bani (numită și capital) ***împrumutată*** sau ***depusă la bancă***.
- ***Rata dobânzei*** este raportul procentual dintre dobândă (de regulă, obținută în timp de 1 an) și suma (capitalul) împrumutată sau depusă la bancă.

Exemplu

Dacă 1 000 000 lei, depuși pentru un an, generează o dobândă de 125000 lei, atunci ***rata anuală*** a dobânzii este 12,5%. Acesteia îi corespunde o ***rată lunară*** a dobânzii de $\frac{12{,}5}{12}\%$, adică 1,04%.

Rețineți

Relația dintre dobândă, timpul de plasament și rata dobânzii depinde de tipul de plasament ales.
Există plasamente cu ***dobândă simplă*** și ***dobândă compusă***.

Aplicăm

- O persoană depune la bancă suma de 15000 lei, în plasament cu dobândă simplă, cu o rată anuală de 11%. Ce sumă va avea persoana peste 3 ani?

Rezolvare:

Suma (capitalul) depus este $S_0=15000$ lei, iar rata anuală a dobânzii este $p=11\%$. Atunci dobânda este $D=S_0\cdot\frac{p}{100}=\frac{15000}{100}\cdot 11=1650$ (lei). Deci suma, peste un an, va fi $S_1=S_0+D=S_0+S_0\cdot\frac{p}{100}=15000+1650=16650$ (lei).

Peste doi ani suma va fi $S_2=S_0+D+D=S_0+2D=S_0+2S_0\cdot\frac{p}{100}=18300$ (lei). Iar peste trei ani $S_3=S_0+D+D+D=S_0+3D=S_0+3S_0\cdot\frac{p}{100}=19950$ (lei).

Răspuns: 19950 lei.

Generalizăm În cazul plasării sumei S_0 cu dobândă simplă, având rata anuală $p\%$, după n ani dobânda va fi $\boxed{D_n = n\cdot D = S_0\cdot n\cdot\frac{p}{100}}$, iar suma obținută va fi $\boxed{S_n = S_0\left(1+n\cdot\frac{p}{100}\right),\ n\in\mathbb{N}^*}$.

Rețineți

O sumă de bani este plasată în regim de **dobândă compusă** atunci când la sfârşitul primei perioade a plasamentului, dobânda simplă generată de sumă este adăugată la suma inițială pentru a produce la rândul ei dobândă în perioada următoare.

Fie S_0 – suma inițială plasată cu dobândă compusă pe o perioadă de n ani, iar $p\%$ – aceeaşi rată a dobânzii pentru fiecare perioadă. Deci, după un an dobânda obținută este $D_1 = S_0\cdot\frac{p}{100}$. Această dobândă se adaugă la suma inițială S_0, astfel că suma $S_1 = S_0 + D_1 = S_0 + S_0\frac{p}{100} = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ devine suma (capitalul) care va produce dobândă în al doilea an.

Dobânda obținută după doi ani este $D_2 = S_1\cdot\frac{p}{100} = S_0\cdot\frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)$ care se adaugă la capitalul existent S_1, astfel încât suma

$$S_2 = S_1 + D_2 = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right) + S_0\frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right) = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

devine capitalul care va produce dobândă în al treilea an.

După n ani dobânda obținută va fi $\boxed{D_n = S_0\cdot\frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}}$, iar suma totală va fi $\boxed{S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$.

Aplicăm Calculați dobânda şi suma obținută după doi ani prin plasarea cu dobânda compusă a 200 000 lei, cu rata anuală 9%.

Rezolvare:

Avem $S_0 = 200000,\ n=2,\ p=9\%=\frac{9}{100}$.

Atunci $D_2 = S_0\cdot\frac{p}{100}\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^{2-1} = 200000\cdot\frac{9}{100}\cdot\left(\frac{100+9}{100}\right) = 180\cdot 109 = 19620$ (lei).

Suma totală va fi $S_2 = S_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 200000\cdot\left(1+\frac{9}{100}\right)^2 = 200000\cdot\frac{11881}{10000} = 237620$ (lei).

Răspuns: Dobânda – 19620 lei; suma totală – 237 620 lei.

4.3. TVA, prețuri

La procurarea produselor, bunurilor etc. ne interesează atât calitatea acestora, cât şi prețurile de vânzare.

Rețineți

- ***Prețul de producție*** (***de cost***) este prețul care reflectă totalitatea cheltuielilor pentru producerea unui produs (bun): cheltuielile legate de forța de muncă, mijloacele de producție (materie primă, energie, inchirierea spațiului, utilaj etc.), cheltuielile de desfacere.
- ***TVA***, sau ***taxa pe valoarea adăugată***, reprezintă un venit (impozit) la bugetul de stat, plătit de consumatorii de bunuri şi servicii. În bugetul statului se transferă taxele pentru valorile adăugate de fiecare proprietar. Aceste taxe se adaugă de fiecare dată la prețul de vânzare şi sunt achitate în final de consumatori.

TVA se calculează din mărimea venitului pe care vrea să-l încaseze proprietarul bunului (produsului).

- ***Cota de impozitare*** (***procentul TVA***) este fixă şi unică pe o anumită perioadă stabilită de stat. De exemplu, in Republica Moldova cota standard este de 20 %, iar cota impozitului pe venit este de 12 % din venitul anual impozabil, dar poate varia în funcție de anumite categorii de venituri în conformitate cu prevederile Codului fiscal.
- ***Prețul de vânzare = Prețul de producție + TVA***.

Aplicăm

Prețul de vânzare al unui produs este de 640,5 lei. Ştiind că procentul TVA este de 20 %, determinați prețul de producție al produsului.

Rezolvare:

Fie x lei – prețul inițial. Atunci $x+\frac{20}{100}x=640{,}5.$ Deci $1{,}2x=640{,}5,$ iar $x=533{,}75.$

Răspuns: 533,75 lei.

4.4. Buget, credite

Rețineți

Bugetul reprezintă o evidență a veniturilor şi cheltuielilor unei țări, a unei firme, a unei familii, a unei persoane.

Pentru a evita problemele financiare referitoare la lipsa de bani se recomandă ca fiecare familie, fiecare persoană să țină evidența banilor, să-şi planifice cheltuielile şi posibilele venituri.

- ***Bugetul familiei*** (sau ***bugetul personal***) este un plan (proiect) privind veniturile şi cheltuielile familiei (sau personale) pentru o perioadă de timp (de regulă, an sau lună).

Bugetul trebuie să fie elaborat astfel încat să prevadă cheltuielile obligatorii (alimente, îmbrăcăminte, transport, taxe etc.) şi acumulări pentru cheltuieli neprevăzute.

Rețineți

Sfaturi utile pentru a cheltui inteligent

- Planificați cumpărăturile.
- Fiți atenți la calitate.
- Comparați prețurile şi magazinele.
- Urmăriți şi utilizați reducerile.
- Negociați prețul, dacă e posibil.
- Citiți şi analizați anunțurile publicitare.
- Luați în considerație garanția şi posibilitățile de reparație.
- Căutați lucruri reciclabile.

Exemple

1. Dinu este student. El şi-a elaborat următorul buget pentru luna aprilie:

Venituri		
1.	Bursă	800 lei
2.	Rezervă	500 lei
3.	Ajutor de la părinți	1400 lei
	Total	2700 lei

Cheltuieli		
1.	Transport	100 lei
2.	Chirie	700 lei
3.	Internet	300 lei
4.	Produse alimentare	1300 lei
5.	Divertisment	250 lei
	Total	2650 lei

2. Familia Lucescu are următorul buget lunar:

Venituri		
1.	Salarii	18400 lei
2.	Pensii	7250 lei
3.	Dobânda din depozite	300 lei
	Total	25950 lei

Cheltuieli		
1.	Intreținere apartament	2360 lei
2.	Abonament TV, internet	270 lei
3.	Produse alimentare	8400 lei
4.	Transport/carburanți	2600 lei
5.	Produse nealimentare	2500 lei
6.	Divertisment (cinema, teatru, excursii etc.)	1000 lei
7.	Cheltuieli neprevăzute	2200 lei
	Total	19330 lei

Rețineți

Orice eveniment cultural, familial, religios etc. se organizează şi se desfăşoară având la bază un buget format rațional.

O sursă de majorare temporară a veniturilor, în caz de necesitate, este ***creditul*** (***împrumutul***). Prin ***credit*** se ințelege o sumă de bani luată cu împrumut, care urmează a fi restituită însoțită de o dobândă. Acțiunea de acordare a unui credit se numeşte ***creditare***.

Persoana (agentul financiar) care acordă împrumut se numeşte ***creditor***, suma împrumutată se numeşte ***credit***, iar persoana (agentul economic) care ia creditul se numeşte ***debitor***.

Restituirea creditului se numeşte ***rambursare***, iar termenul până la care trebuie de rambursat creditul se numeşte ***scadență***.

Sunt diverse tipuri de credite: ***credite bancare, comerciale, bugetare; credite pe termen scurt (până la 1 an), pe termen mediu (1–5 ani), pe termen lung (peste 5 ani); credite interne, credite internaționale ş.a.***

Rambursarea creditului se poate face printr-o singură tranşă sau eşalonat în câteva tranşe.

Aplicăm

O bancă a acordat unui antreprenor un credit de 50 000 de lei pe o perioadă de 2 ani în regim de dobândă simplă, cu rata anuală a dobânzii de 15 %. Aflați suma pe care o va restitui antreprenorul la sfarşitul termenului (scadență).

Rezolvare:

Conform condiției problemei avem $S_0 = 50000$ lei, $n = 2$, iar $p = 15\%$.

Atunci, suma totală va fi $S_2 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 50000 \cdot \frac{130}{100} = 65000$ (lei).

Răspuns: 65000 lei.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. O firmă agricolă are de arat 720 ha. Într-o primă etapă s-au arat 144 ha. Câte procente din întreaga suprafață au fost arate?

2. 22 % din suma de bani constituie 1650 lei. Aflați suma inițială.

3. La sfârşitul anului şcolar 26 % din numărul de elevi ai unui gimnaziu sunt absolvenți. Determinați câți elevi a avut gimnaziul, dacă au mai rămas 370 elevi.

4. Determinați ce dobândă simplă aduce un capital de 74 000 lei pe o perioadă de 1 an, dacă rata dobânzii este de 16 %.

5. O persoană depune la bancă suma de 160 000 lei în plasament cu dobânda simplă pe 2 ani şi obține dobânda de 17 600 lei. Aflați rata dobânzii.

6. *Lucrați în perechi!* Se plasează în regim de dobânda compusă suma de 12 milioane de lei cu o rată a dobânzii de 10 %. Calculați dobânda rezultată peste 5 ani.

7. Determinați care este rata dobânzii pentru ca o sumă plasată în regim de dobândă compusă să crească cu 44 % în doi ani.

8. Aflați prețul de vânzare al unei mărfi care costă 4 800 de lei fără TVA, când procentul TVA este de 24 %.

9. Care este prețul de vânzare al unui televizor, dacă cheltuielile de producție sunt de 8 250 de lei, iar procentul TVA este de 20 %.

10. *Lucrați în grup!* Copiați şi completați următorul tabel privind calculul taxei pe valoare adăugată .

Produsul	Preț cumpărare fără TVA	TVA (20%)	Preț cumpărare cu TVA
I	2 000		
II			8 000
III	12 300		

11. La magazin s-a eliberat bonul de plată. Determinați dacă s-a calculat corect în lei TVA-ul.


"New Post International MDL"SRL
str.Voluntarilor,15
IDNO 1014600029674
* * *
C.F. 1014600029674
0001 Operator 01
Dep. 04
1.000 X 597.00 597.00 A
TOTAL 597.00
TVA A 20.00% 99.50
NUMERAR 597.00
001 ART
29-11-2023 001941 09:32
BON FISCAL: 0003
Ser.N ZK00814129
N.Inr. F602027553

12. Bugetul lunar al familiei Pâslaru este:

Venituri		
1.	Salarii	9350 lei
2.	Pensii	3400 lei
	Total	12750 lei

Cheltuieli		
1.	Taxe comunale	30% din venituri
2.	Abonament TV, internet	200 lei
3.	Produse alimentare	45% din venituri
4.	Transport/carburanți	700 lei
5.	Rechizite şcolare	350 lei
	Total	? lei

a) Determinați suma totală a cheltuielilor.
b) Va fi suficientă suma veniturilor pentru a acoperi cheltuielile necesare?

13. Elaborați bugetul personal pentru luna martie.

14. *Investigați!* Discutați cu părinții şi elaborați bugetul familiei pentru o lună de iarnă.

15. O persoană ia un credit în sumă de 1 000 u.m. (unități monetare) în regim de dobândă simplă pe un termen de 2 ani cu procentul 10 %. Aflați ce sumă trebuie să restituie debitorul.

16. O bancă a acordat unui antreprenor un credit de 12 000 u.m. pe o perioadă de 2,5 ani în regim de dobândă simplă, cu rata anuală a dobânzii de 15 %. Determinați ce sumă va primi banca la sfarşitul acestui termen.

Formăm abilitățile și aplicăm

17. În biblioteca şcolară sunt 16 400 de cărți, dintre care 7 380 sunt manuale, iar 25 % din rest sunt culegeri de poezii.
a) Câte procente reprezintă manualele?
b) Câte culegeri de poezii sunt?
c) Câte procente din totalul cărților reprezintă celelalte cărți?

18. *Lucrați în perechi!* O familie preconizează sa procure un frigider la prețul de 9 500 de lei. Cu ocazia evenimentului *Vinerea neagră* magazinul oferă reduceri de 11 %.

a) Ce sumă a economisit familia? b) La ce preț a cumpărat frigiderul?

19. *Lucrați în grup!* O bancă comercială are afișată oferta de dobânzi (în %) la expirarea termenului în tabelul următor:

Valuta / Timp	Lei	USD ($)	Euro	Lei, sume mai mari de 25 mln.
1 lună	12,50	2,20	3,20	15,00
3 luni	13,50	2,25	3,30	16,00
6 luni	14,50	2,30	3,40	16,50
1 an	14,75	2,50	4,00	17,50

Calculați dobânzile aferente sumelor: 1) 2 500 $; 2) 300 euro; 3) 5 mln lei; 4) 35 mln lei pe termenele:
a) 1 lună; b) 3 luni; c) 6 luni; d) 1 an.

20. O sumă de 100 mln de lei e depusă la bancă pe termen de 3 ani în regim de dobândă compusă cu o rată a dobânzii de 14,5 %.

a) Care va fi suma depozitului la termenul scădent? b) Ce dobândă va genera acest depozit?

21. Un capital de 2,5 mln de lei este plasat în regim de dobândă simplă pe o perioadă de 2 ani cu rata dobânzii de 12 %.

a) Ce dobândă va genera acest depozit la finalul plasamentului?
b) Care va fi suma depozitului la finalul plasamentului?

22. *Lucrați în perechi!* Intr-un magazin, o maşină de spălat are afişat prețul de 8 240 de lei şi lângă acest preț e scris TVA = 1 648 lei.

a) Determinați procentul TVA. b) Aflați care este prețul de cost (producție).

23. Prețul de vânzare al unui produs este de 5 280 de lei. Acest preț este format din prețul de producție, adaosul comercial şi TVA-ul. Se ştie că adaosul comercial reprezintă 14 % din prețul de producție, iar TVA-ul reprezintă 18 % din prețul de producție. Determinați prețul de producție.

24. Unei firme i se acordă un credit de 20 mln lei pe un termen de 2 ani în regim de dobândă compusă. Creditul şi dobânda totalizează la sfârşitul celor 2 ani 23 328 000 lei. Determinați ce procent de dobândă s-a aplicat.

25. Suma de 100 000 lei este împrumutată de către un fermier în regim de dobândă simplă astfel: 2 ani cu procentul de 12 %, 3 luni cu 15 % şi 9 zile cu 20 %. Aflați suma finală care trebuie sa fie rambursată de către debitor.
Observație: Anul financiar este considerat de 360 de zile.

26. O familie elaborează bugetul pentru Revelion. Suma preconizată este de 6 500 de lei.

a) Utilizând datele din imagine, completați tabelul astfel încât cheltuielile să se încadreze în suma preconizată.

Cheltuieli		
1.	Cadouri copiilor	
2.	Produse alimentare	
3.	Fructe	
4.	Dulciuri/tort	
5.	Artificii	
	Total	

b) Elaborați bugetul similar pentru sărbătoarea de Revelion în familia voastră.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

27. În urmă cu 2 ani şi 3 luni o persoană a împrumutat 10 000 lei în regim de dobândă compusă calculată anual. În cei 3 ani procentele privind dobânda au fost de 15 %, 17 % şi 20 %. Determinați ce sumă trebuie acum să plătească persoana şi care a fost dobânda aferentă.

28. O persoană fizică işi propune ca peste 5 ani să dispună de un depozit la bancă de 210 mln de lei. Determinați ce sumă trebuie să depună persoana în prezent pentru ca în condițiile unei dobânzi compuse cu rata anuală de 20 % să dispună peste 5 ani de suma dorită.

29. *Lucrați în grup!* **Proiect.** *Finanțele în viața mea.*

30. *Lucrați individual!* **Proiect.** *Bugetul familial și bugetul personal.*

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. *Investigați!* Într-o cutie sunt bomboane cu ambalaje roşii, galbene şi verzi: jumătate sunt în ambalaj de culoare roşie, o treime – de culoare galbenă, iar celelalte – de culoare verde. Care dintre aceste culori este mai puțin probabilă la extragerea la întâmplare a unei bomboane din cutie?

2. Fie o urnă cu 12 jetoane de aceeaşi formă numerotate cu 1, 2, 3, ..., 12 şi experiența aleatoare care constă în extragerea unui jeton. Enumerați evenimentele elementare ale acestui experiment.

3. Într-un pachet sunt 7 mere verzi şi 14 mere roşii. Care este probabilitatea ca, extrăgând un măr la întâmplare, acesta să fie: a) verde; b) roşu?

4. Fețele unui cub sunt colorate în roşu şi galben. Probabilitatea apariției feței galbene la aruncarea cubului este $\frac{1}{6}$, iar a feței roşii – $\frac{5}{6}$. Câte fețe galbene şi câte fețe roşii are cubul?

5. *Lucrați în perechi!* Fie o urnă cu 10 bile numerotate cu 1, 2, 3, ..., 10 şi experimentul aleator care constă în extragerea unei bile. Aflați probabilitatea extragerii unei bile cu un număr:
a) prim; b) par; c) impar;
d) mai mare decât 4; e) mai mic decât 7; f) mai mare decât 11;
g) mai mic decât 11; h) care se divide cu 3.

6. Un capital de 25 mln. lei este plasat în regim de dobândă simplă pe o perioadă de: 1) 1 an; 2) 3 ani, cu rata dobânzii de 20%.
a) Aflați ce dobândă generează acest capital pe perioada plasamentului.
b) Cât ar trebui să fie rata dobânzii pentru ca acest capital să aducă în 2 ani o dobândă egală cu cea obținută după 3 ani.

7. Ce procent de dobândă are o operațiune bancară dacă un capital inițial de 60000 u.m. va determina un capital final de 67200 u. m. după un an?

8. Într-un magazin un frigider are afişat prețul de 14400 lei inclusiv TVA – 20%. Aflați prețul de producție a acestui frigider.

Formăm abilitățile și aplicăm

9. Aflați probabilitatea ca un număr natural nenul, mai mic decât 151, luat la întâmplare, să fie:
a) o putere cu exponent natural mai mare decât 1; b) un pătrat perfect.

10. Într-o ladă sunt 150 de piese. Se ştie că 2% din ele sunt defectate. Aflați probabilitatea că o piesă extrasă la întâmplare nu va fi defectată.

11. Dintr-un pachet de 36 de cărți de joc se extrage la întâmplare o carte. Aflați probabilitatea că s-a extras un as.

12. Aflați probabilitatea ca un număr natural mai mic decât 121, luat la întâmplare, să aibă suma cifrelor egală cu 9.

13. Într-un pachet sunt 6 mere roşii şi 12 mere verzi. Ce număr minim de mere trebuie extrase din pachet pentru a fi siguri că cel puțin un măr este roşu?

14. ***Lucrați în perechi!*** Determinați dacă sunt echiprobabile evenimentele:

a) $A=\{$din 30 de bilete numerotate (1, 2, 3,..., 30), se extrage la întâmplare biletul cu numărul 2$\}$;
$B=\{$din 30 de bilete numerotate (1, 2, 3, ..., 30), se extrage la întâmplare biletul cu numărul 20$\}$.

b) $A=\{$câştig la loterie$\}$; $B=\{$nu câştig la loterie$\}$.

15. Creditul de 100 mln. de lei este plasat în regim de dobândă simplă, cu o rată a dobânzii de 10%. Determinați pe ce perioadă de timp este făcut plasamentul dacă la termenul scadent se obține o dobândă de 5 mln. de lei.

16. Ce procent de dobândă are o operațiune bancară dacă un capital inițial de 20 mln. de lei va determina un capital final de 216 mln. de lei.

17. Prețul de vânzare a unui produs este de 6600 lei. Acest preț este format din prețul de producție, adaosul comercial şi TVA-ul. Se ştie că adaosul comercial reprezintă 12% din prețul de producție, iar TVA-ul – 20% din prețul de producție. Determinați prețul de producție.

18. Suma de 2000 u.m. este împrumută în regim de dobândă simplă astfel: 1 an cu procentul de 20%, 5 luni cu 15% şi 15 zile cu 25%. Aflați dobânda aferentă şi suma finală.

19. O persoană fizică contractează un credit în sumă de 8000 u.m. pe un termen de 2 ani. Determinați, ce sumă va restitui debitorul dacă:

a) rata anuală a dobânzii simple este de 16%;

b) rata anuală a dobânzii compuse, cu capitalizare anuală este de 14%.

Dezvoltăm abilitățile și creăm

20. ***Investigați!*** Doru câştigă la un joc dacă bila extrasă din urnă este albă. Determinați ce urnă este mai convenabil să aleagă Doru pentru ca probabilitatea câştigului să fie mai mare:

a) cea cu 12 bile albe din 38;

b) cea cu 45 bile albe din 105;

c) cea cu 18 bile albe şi 54 roşii;

d) cea cu acelaşi număr de bile albe, roşii şi negre.

21. Într-o urnă se află bile pe care sunt scrise numerele de trei cifre formate cu cifrele 5, 6 şi 7. Aflați probabilitatea extragerii unei bile pe care să fie scris un număr care începe cu cifra 5.

22. Se aruncă o monedă de 3 ori. Care este probabilitatea ca:

a) stema să apară de două ori;

b) stema să apară cel puțin o dată?

23. Un investitor poate plasa un capital de 10 mln. de lei într-o bancă la 40% pe an sau se poate învesti într-o producție cu o eficiență aşteptată de 150%. Pierderile de producție sunt descrise printr-o funcție pătratică definită prin formula $f(x)=0{,}05x^2$, unde x este valoarea capitalului investit în lei. Profitul este impozitat la p%. Aflați pentru care valori ale lui p investiția în producție va fi o alocare mai profitabilă a capitalului.

24. ***Lucrați individual!*** **Proiect.** *Statistica în profesiile părinților.*

Test sumativ

Varianta I

1. Într-un coş sunt 3 mere roşii şi 1 măr galben.
Fie evenimentele:
$A_1 = \{$ extragerea unui măr roşu $\}$,
$A_2 = \{$ extragerea unui măr galben $\}$.
Completaţi casetele:
a) $P(A_1) = \boxed{}$; b) $P(A_2) = \boxed{}$.

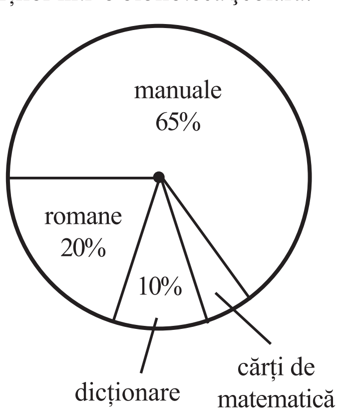
2. La o loterie sunt 20 de bilete câştigătoare şi 360 de bilete necâştigătoare. Laura a cumpărat un bilet de loterie. Care este probabilitatea ca biletul să fie câştigător?

3. Feţele unui cub au fost colorate în albastru şi galben. Probabilitatea apariţiei feţei albastre la aruncarea cubului este $\frac{1}{3}$, iar a feţei galbene – $\frac{2}{3}$. Câte feţe albastre şi câte feţe galbene are cubul?

4. Preţul de vânzare a unui produs este de 2400 lei şi este obţinut prin aplicarea TVA-ului de 20% la preţul de producţie. Determinaţi preţul de producţie.

5. O persoană a depus la bancă suma de 4000 lei în regim de dobândă simplă. Ce sumă a primit după 2 ani, ştiind că rata dobânzii a fost de 8%?

6. În cercul de structură este reprezentată structura repartizării cărţilor într-o bibliotecă şcolară:



a) Câte procente din numărul total reprezintă cărţile de matematică?
b) Câte cărţi sunt în bibliotecă, ştiind că erau 240 cărţi de matematică?

Varianta II

1. Într-o urnă se află o bilă albă şi două bile roşii.
Fie evenimentele:
$A_1 = \{$ extragerea unei bile albe $\}$,
$A_2 = \{$ extragerea unei bile roşii $\}$.
Completaţi casetele:
a) $P(A_1) = \boxed{}$; b) $P(A_2) = \boxed{}$.

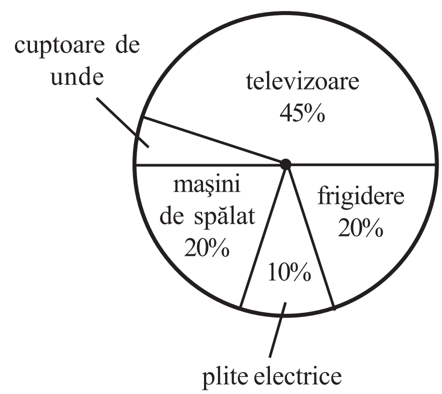
2. La o loterie sunt 200 de bilete, dintre care 15 câştigătoare. Care este probabilitatea ca biletul cumpărat de Nicu să nu fie câştigător?

3. Feţele unui cub au fost colorate în maro şi verde. Probabilitatea apariţiei feţei maro la aruncarea cubului este $\frac{2}{3}$, iar a feţei verzi – $\frac{1}{3}$. Câte feţe maro şi câte feţe verzi are cubul?

4. Preţul de vânzare a unui produs este de 1800 lei şi este obţinut prin aplicarea TVA-ului de 20%. Determinaţi preţul de producţie.

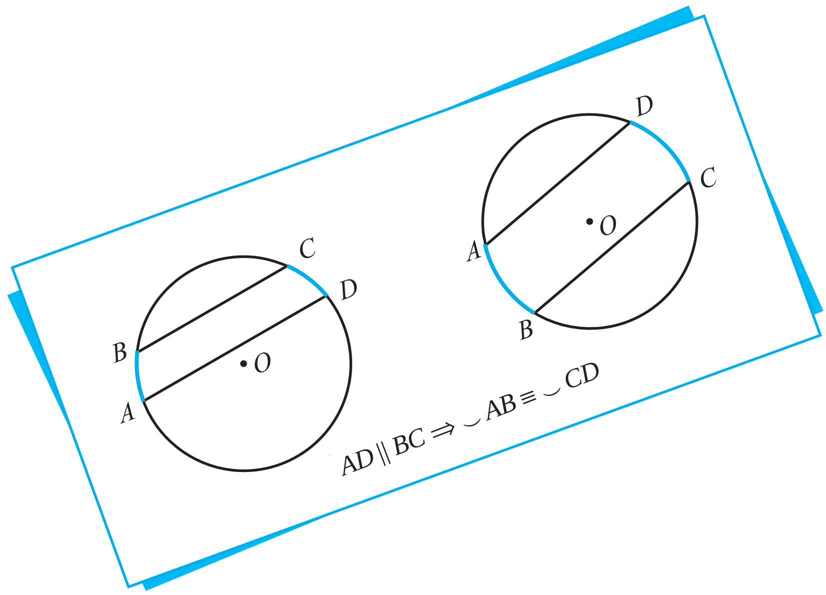
5. O persoană a depus la bancă suma de 6000 lei în regim de dobândă simplă. Ce sumă a primit după 2 ani, ştiind că rata dobânzii a fost de 10%?

6. În cercul de structură este reprezentată structura repartizării mărfii într-un depozit:

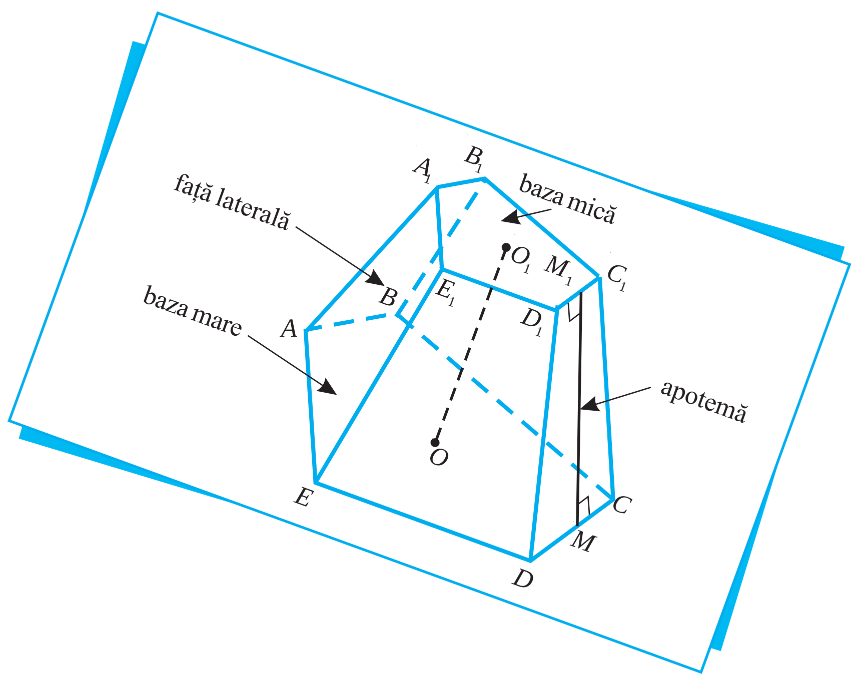


a) Câte procente din numărul total reprezintă cuptoarele de unde?
b) Câte unităţi de marfă sunt în depozit, ştiind că sunt 150 cuptoare de unde?

GEOMETRIE



C
D
B
A
O
D
C
A
O
B
$AD \parallel BC \Rightarrow \smile AB \equiv \smile CD$



A_1
B_1
fața laterală
baza mică
O_1
M_1
C_1
baza mare
A
B
E_1
D_1
apotemă
O
E
C
M
D

Capitolul 1

Cercul

Geometria este cea mai frumoasă formă a matematicii.
Proclus

§ 1. Recapitulare și completări

1.1. Elementele cercului. Proprietăți de bază

Ne amintim

1 Stabiliți ce figură defineşte mulțimea:
a) punctelor egal depărtate de extremitățile unui segment dat;
b) punctelor situate la distanța de 5 cm de un punct dat.

Definiții

- Fie r un număr real pozitiv şi O un punct din plan. **Cercul de centru O şi rază r** este mulțimea punctelor din plan situate la distanța r de punctul O (fig. 1). *Notăm*: $\mathscr{C}(O, r)$.
- Fie $A \in \mathscr{C}(O, r)$. De asemenea, numim **rază** segmentul ce uneşte centrul cercului cu un punct al lui.
- Segmentul ale cărui extremități sunt puncte ale cercului se numeşte **coardă**. Coarda care conține centrul cercului se numeşte **diametru** al cercului.
- Punctele A şi B se numesc **diametral opuse**, dacă $[AB]$ este diametru.

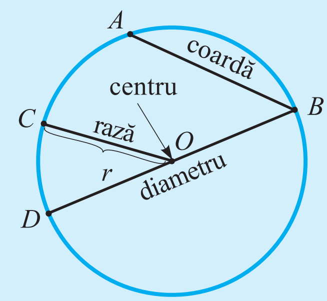


Fig. 1

- Amintiți-vă definiția figurilor congruente şi stabiliți care dintre următoarele cercuri sunt congruente: $\mathscr{C}_1(A, r = 3\text{ cm})$, $\mathscr{C}_2(B, r = 4\text{ cm})$, $\mathscr{C}_3(A, r = 4\text{ cm})$, $\mathscr{C}_4(B, r = 3\text{ cm})$.

2 Examinați desenul (fig. 2, O este centrul cercului) şi numiți punctele situate de centrul cercului la distanța:
a) egală cu raza cercului;
b) mai mică decât raza cercului;
c) mai mare decât raza cercului.
Care dintre aceste puncte aparțin interiorului cercului?

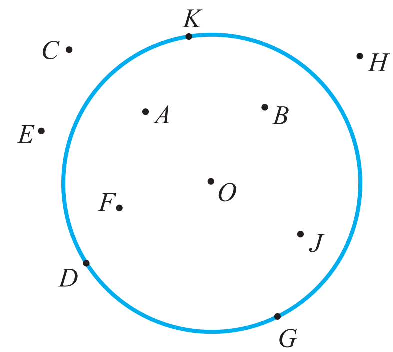


Fig. 2

Definiţii

- Fie $\mathscr{C}(O,r)$. Mulţimea punctelor M din plan pentru care $OM < r$ se numeşte **interiorul cercului**. *Notăm*: Int $\mathscr{C}(O,r)$.
- Mulţimea punctelor N din plan pentru care $ON > r$ se numeşte **exteriorul cercului**. *Notăm*: Ext $\mathscr{C}(O,r)$.
- Reuniunea $\mathscr{C}(O,r)$ şi a interiorului lui este **discul de centru *O* şi rază *r***. *Notăm*: $\mathscr{D}(O,r)$.
  Prin urmare, $\mathscr{D}(O,r)=\mathscr{C}(O,r)\cup$ Int $\mathscr{C}(O,r)=\{M \mid OM \le r\}$.

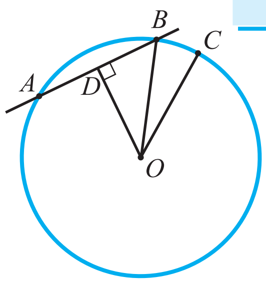


Fig. 3

3 *Examinaţi desenul (fig. 3) şi demonstraţi că **orice 3 puncte diferite ale unui cerc sunt necoliniare**.

Indicaţie. Demonstraţi prin metoda reducerii la absurd că $C \notin AB$, unde A, B, C sunt trei puncte arbitrare diferite de pe cerc. Presupunând că $C \in AB$, cercetaţi triunghiurile dreptunghice ODB şi ODC.

• Câte puncte comune, cel mult, pot avea o dreaptă şi un cerc?

Investigăm

4 Examinaţi desenul (fig. 4, O este centrul cercului).
Ce se poate spune despre segmentul OM şi triunghiul AOB, dacă:
a) $OM \perp AB$;
b) M este mijlocul segmentului AB?
Trageţi concluzia.

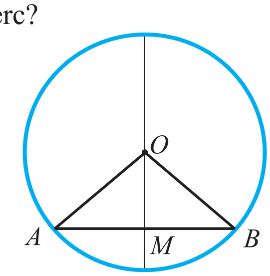


Fig. 4

Teorema 1

Dacă diametrul cercului conţine mijlocul unei coarde, atunci el este perpendicular pe ea.

• Formulaţi reciproca teoremei 1, care de asemenea este teoremă.
• Demonstraţi teorema 1 şi reciproca ei.

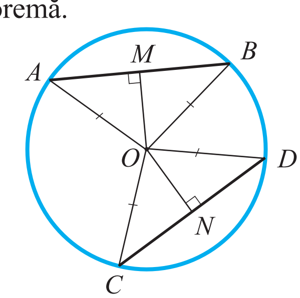


Fig. 5

Teorema 2

Dacă două coarde ale unui cerc sunt congruente, atunci ele sunt egal depărtate de centrul cercului.

*Să demonstrăm teorema 2.
Ipoteză: $\{A,B,C,D\}\subset\mathscr{C}(O,r)$, $[AB]\equiv[CD]$.
Concluzie: $\mathrm{d}(O,[AB])=\mathrm{d}(O,[CD])$.
Demonstraţie:

① $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (Criteriul LLL). Fie M, N mijloacele segmentelor AB şi respectiv CD (fig. 5).

② $[OM]$ şi $[ON]$ sunt mediane şi înălţimi ale triunghiurilor AOB şi respectiv COD. Conform ①, $[OM]\equiv[ON]$.

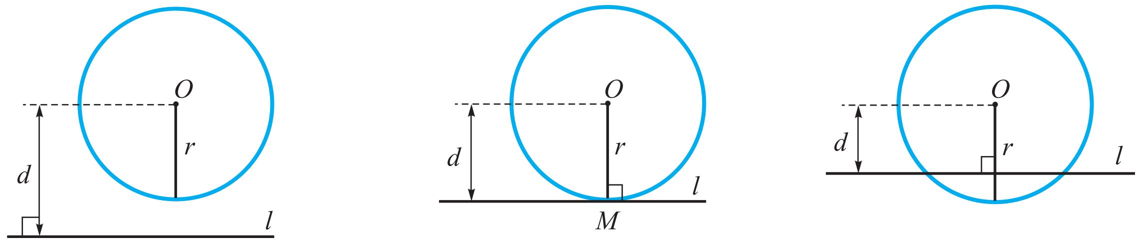
③ $\mathrm{d}(O,[AB])=OM=ON=\mathrm{d}(O,[CD])$, c.c.t.d. ►

- Reciproca teoremei 2 de asemenea este teoremă. Formulaţi şi demonstraţi reciproca teoremei 2.
- Reformulaţi într-o singură teoremă de forma „*Ipoteza* dacă şi numai dacă *Concluzia*”:
  a) teorema 1 şi reciproca ei; b) teorema 2 şi reciproca ei.
- Aplicând teorema 1, explicaţi cum poate fi găsit centrul necunoscut al unui cerc dat.

* Opţional

1.2. Pozițiile relative ale unei drepte față de un cerc

Ne amintim **1** Examinați desenele (fig. 6, O este centrul cercului). Observați cum se numeşte dreapta l în fiecare caz.



dreaptă **exterioară** cercului

dreaptă **tangentă** la cerc; M – punct de tangență

dreaptă **secantă** la cerc

Fig. 6

- Fie d distanța de la centrul cercului $\mathscr{C}(O,r)$ la dreapta l. Completați adecvat:

  a) Dreapta l este ________ cercului $\mathscr{C}(O,r)$ dacă şi numai dacă $d > r$.

  b) Dreapta l este tangentă la cerc dacă şi numai dacă ________.

  c) Dreapta l este ________ dacă şi numai dacă $d <$ ____.

Teorema 3 Dacă o dreaptă este tangentă la un cerc, atunci ea este perpendiculară pe raza dusă în punctul de tangență.

*Să demonstrăm teorema 3.

Ipoteză: $\mathscr{C}(O,r) \cap l = \{M\}$.

Concluzie: $OM \perp l$.

Demonstrație:

Aplicăm metoda reducerii la absurd.

① Presupunem contrariul: $OM \not\perp l$.
Fie că perpendiculara pe l construită din punctul O intersectează l în punctul A (fig. 7).

② Fie $B \in l$, astfel încât $[AB] \equiv [AM]$.

③ $\Delta OAB \equiv \Delta OAM$ (Criteriul CC).

④ Conform ③, $[OB] \equiv [OM]$, adică $[OB]$ este rază.
Prin urmare, $B \in \mathscr{C}(O,r)$.
Am obținut că dreapta l are două puncte comune (M şi B) cu cercul – contradicție.
Deci, presupunerea $OM \not\perp l$ este greşită, adică $OM \perp l$. ►

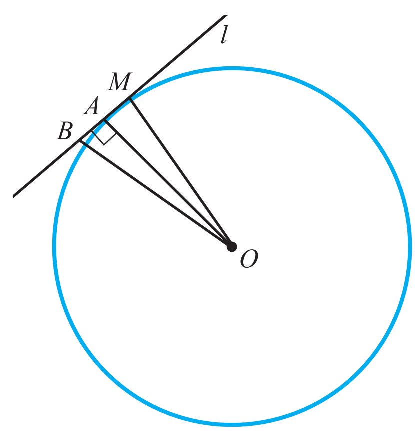


Fig. 7

Reciproca teoremei 3 de asemenea este teoremă.

- Formulați şi demonstrați reciproca teoremei 3.

* Opțional

Problemă de construcție (opțional)

Fie M un punct al cercului $\mathscr{C}(O,r)$ (fig. 8).
Să construim o dreaptă tangentă la cerc, astfel încât M să fie punctul de tangență.

Rezolvare:

① Construim raza OM (fig. 9).

② Construim perpendiculara AB pe dreapta OM:
- construim $O_1 \in OM$, astfel încât $[O_1M] \equiv [OM]$;
- construim $\mathscr{C}_1(O,r_1)$ și $\mathscr{C}_2(O_1,r_1)$, unde $r_1 > r$;
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B\}$.

③ Conform reciprocei teoremei 3, deoarece $AB \perp OM$ și $M \in \mathscr{C}(O,r)$, rezultă că AB este tangentă la cerc în punctul M.

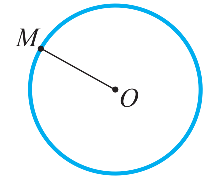


Fig. 8

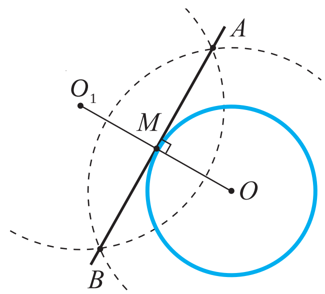


Fig. 9

> Prin orice punct al cercului se poate construi o unică dreaptă tangentă la cerc în acest punct.

Problemă Examinați desenul (fig. 10) și demonstrați că:
a) $[AM] \equiv [BM]$;
b) $[MO$ este bisectoarea unghiului AMB.

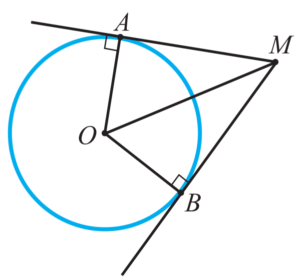


Fig. 10

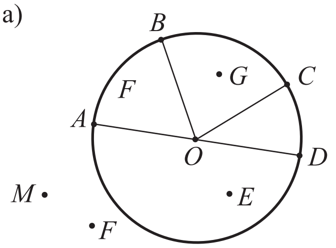
> - Două tangente la același cerc, duse dintr-un punct exterior cercului, determină cu punctele de tangență două segmente congruente.
> - Semidreapta cu originea într-un punct exterior și care conține centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangentele din acest punct la cerc.

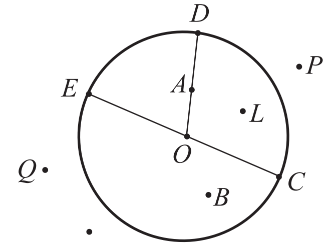
Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Construiți și notați un cerc:
a) de centru A și rază 4 cm; b) de centru B și rază 6 cm.

2. *Lucrați în perechi!* Examinați desenul (O este centrul cercului) și numiți: razele; coardele; diametrele; punctele interioare cercului; punctele exterioare cercului; punctele diametral opuse.

a)


b)


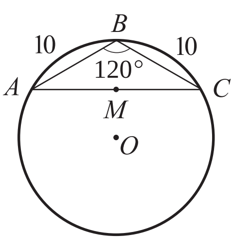
3. Stabiliți poziția punctului A față de $\mathscr{C}(O, r=6\text{cm})$, dacă distanța de la A la O este de:
a) 6 cm; b) $3\sqrt{5}$ cm; c) 6,(6) cm; d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ cm.

4. Coardele AB și CD ale unui cerc sunt situate la aceeași distanță de la centrul cercului. Aflați AB, dacă:
a) $CD=8$ cm; b) $AB+CD=14$ cm;
c) $AB+2CD=6\sqrt{10}$ cm; d) $5AB+CD=12$ cm.

5. Diametrul AB intersectează coarda MN a aceluiași cerc de rază R sub un unghi drept în punctul E. Aflați distanța de la centrul cercului la MN, dacă:
a) $ME=9$ cm, $R=15$ cm;
b) $ME=12$ cm, $R=13$ cm;
c) $4NE=2R-2$ cm $=32$ cm.

6. Fie d distanța dintre dreapta l și centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$. Determinați poziția dreptei l față de cerc, dacă:
a) $d=3$ cm, $r=4$ cm; b) $d=6{,}3$ cm, $r=3\sqrt{5}$ cm;
c) $d=r=2{,}7$ cm; d) $d=0$ cm, $r=\frac{4}{9}$ cm;
e) $d=\sqrt{3-\sqrt{5}}$ cm, $r=\frac{2}{3-\sqrt{5}}$ cm.

7. Aflați raza cercului și lungimea segmentelor AC și BM din desen, unde M este mijlocul segmentului AC.



8. Din punctul M exterior cercului au fost duse tangentele la cerc. Fie A și B punctele de tangență. Aflați BM, dacă:
a) $AM=13{,}7$ cm;
b) $AM-2BM=-3,(4)$ cm;
c) $AB=8$ cm, $m(\angle AMB)=60°$.

9. Mediatoarea segmentului nenul AB trece prin centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$. Stabiliți poziția dreptei AB față de cerc, dacă: a) $OA=5$ cm, $r=6$ cm;
b) $OA=r=\frac{3}{4}$ cm;
c) $OA=14$ cm, $r=12\frac{1}{5}$ cm și $AB=12$ cm;
d) $OA=15$ cm, $r=12$ cm și $AB=18$ cm.

10. Fie $\mathscr{C}(O, r)$. Aflați distanța de la centrul cercului la coarda AB, dacă:
a) $AB=8$ cm, $r=5$cm; b) $AB=24$cm, $r=13$cm;
c) $AB=a$, $r=b$.

11. Fie $[AB]$ o coardă a cercului $\mathscr{C}(O, r)$, iar d – distanța de la centrul cercului până la această coardă. Determinați r, dacă:
a) $AB=12$cm, $d=8$cm; b) $AB=d=\sqrt{3}$ cm.

12. Care este măsura unghiului format de tangentele la un cerc, duse dintr-un punct aflat la o distanță de cerc egală cu raza cercului?

13. *Lucrați în grup!* Construiți un cerc, știind că orice coardă a lui are cel mult 10 cm.

14. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r=8\text{ cm})$ și AB o coardă a lui. Folosind doar echerul, construiți mijlocul lui $[AB]$.

15. Distanța dintre centrul O al cercului și o coardă AB este de două ori mai mică decât raza. Determinați $m(\angle ABO)$.

16. Într-un cerc, la distanța de 6 cm de centru, este dusă o coardă de $12\sqrt{3}$ cm. Aflați raza cercului.

17. Stabiliți poziția punctului M față de $\mathscr{C}(O, r)$ dacă:
a) $OM=\frac{1}{2}r$; b) $OM=|2-\sqrt{5}|\,r$; c) $OM=\frac{2}{r}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

18. Din punctul A, aflat la distanța de 29 cm de la centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$, a fost dusă tangenta AB la cerc (B este punctul de tangență). Determinați raza cercului, dacă $AB=21$cm.

19. Fie $A\in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r=5\text{ cm})$ și $C\in\mathscr{C}(O, r)$, astfel încât AC este tangentă la cerc.
Aflați OA, dacă $m(\angle OAC)=30°$.

20. Fie $M\in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r=3{,}5\text{ cm})$ și $A\in\mathscr{C}(O, r)$, astfel încât AM este tangentă la cerc.
Aflați OM, dacă $m(\angle AMO)=30°$.

21. Fie $M\in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r)$ și $A\in\mathscr{C}(O, r)$, astfel încât AM este tangentă la cerc. Aflați raza cercului, dacă $m(\angle AMO)=45°$ și $AM=7{,}5$ cm.

22. Fie $M\in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r=\sqrt{15}\text{ cm})$ și $A\in\mathscr{C}(O, r)$, astfel încât AM este tangentă la cerc. Fie N mijlocul segmentului OM. Determinați AN, dacă $m(\angle AOM)=60°$.

23. *Lucrați în perechi! Matematica în viață.*
Mihai a construit un cerc și a șters centrul. Cum construim centrul cu ajutorul riglei și compasului?
Indicație. Folosiți teorema 1 (pag. 119) și proprietatea mediatoarei unui segment.

24. Fie AM tangenta la $\mathscr{C}(O, R)$ în punctul A. Aflați distanța de la punctul O la punctul M, dacă:
a) $AM = 0{,}8$, $r = 0{,}6$; b) $AM = 24$, $r = 18$;
c) $AM = x$, $r = y$.

25. *Investigați!* Demonstrați că mijloacele coardelor de aceeaşi lungime ale unui cerc sunt puncte conciclice (aparțin aceluiaşi cerc).
Indicație. Utilizați teorema 2 (pag. 119).

26. Cercurile $\mathscr{C}(O, r)$ şi $\mathscr{C}(O_1, r)$ se intersectează în punctele M şi N. Aflați OO_1, dacă $MO = 13$ cm, $MO_1 = 6$ cm, $MN = 10$ cm.

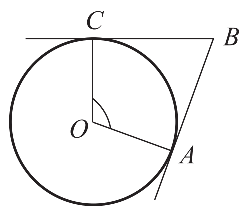
27. Construiți un cerc de rază r ce trece prin punctele A şi B date, dacă:
a) $AB = 5$ cm, $r = 6$ cm;
b) $AB = \sqrt{15}$ cm, $r = 5$ cm.
Indicație. Pentru a construi $[AB]$ folosiți teorema înălțimii şi relația $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$.

28. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r = 8\text{cm})$. Construiți un triunghi ABC înscris în acest cerc, astfel încât $AB = 2BC = 10$ cm.

29. Utilizând doar rigla şi compasul, construiți un unghi de: a) $45°$; b) $22°30'$; c) $157°30'$.

30. Într-un cerc de centru O şi raza de 6 cm, coarda AB este congruentă cu raza. Determinați distanța de la punctul O la coarda AB.

31. În desenul de mai jos, dreptele BA şi BC sunt tangente la cercul cu centrul O în punctele A şi C. Aflați măsura unghiului ABC, dacă se cunoaşte că $m(\angle AOC) = 110°$.



Dezvoltăm capacitățile și creăm

32. $\mathscr{C}(O_1, R)$ şi $\mathscr{C}(O_2, r)$ sunt exterioare, adică $O_1O_2 > R + r$. Dreapta l este tangentă ambelor cercuri în punctele A şi respectiv B. Calculați O_1O_2, dacă $m(\angle AO_1O_2) = 60°$, $R = 15$ cm, $r = 5$ cm. Cercetați toate cazurile posibile.

33. Într-un triunghi dreptunghic un punct de tangență al cercului înscris în acest triunghi împarte ipotenuza în segmente cu lungimea de 5 cm şi 12 cm. Aflați lungimile catetelor triunghiului.

34. Într-un cerc cu raza de 25 cm sunt duse, de aceeaşi parte a centrului, două coarde paralele, cu lungimile de 40 cm şi 30 cm. Determinați distanța dintre aceste coarde.

35. Fie dreapta l şi punctele M şi N. Construiți un cerc care conține punctele M şi N şi al cărui centru aparține dreptei l. În ce situație problema:
a) are o singură soluție;
b) are o infinitate de soluții;
c) nu are nicio soluție?

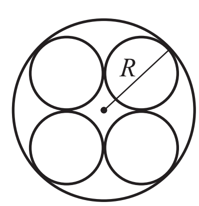
36. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$ şi punctul M exterior cercului. Construiți prin M o dreaptă care taie cercul după o coardă de lungime x, unde:
a) $r = 10$ cm, $MO = 15$ cm, $x = 8$ cm;
b) $r = 8$ cm, $MO = 12$ cm, $x = 10$ cm.
Indicație. Utilizați teorema: *Două coarde ale unui cerc sunt congruente dacă şi numai dacă sunt egal depărtate de centrul cercului.*

Matematică distractivă

37. Împărțiți cu ajutorul a doar trei tăieturi rectilinii un disc în:
a) 4 părți; b) 5 părți;
c) 6 părți; d) 7 părți.

38. Dintr-un punct al cercului este coborâtă o perpendiculară pe o rază a lui, astfel încât această rază este împărțită în două segmente proporționale cu 8 şi 9, considerând de la centru. Aflați lungimea perpendicularei, dacă raza cercului este de 68 cm.

39. Patru borcane cilindrice identice au fost dispuse pe fundul circular al unei cratițe, ca în desen. Aflați raza R a bazei cratiței dacă raza bazei unui borcan este egală cu 4 cm.



§ 2. Unghiuri înscrise în cerc

2.1. Unghi la centru. Arce de cerc

Ne amintim **1** Care este măsura unghiului descris de minutarul unui ceas timp de 10 min?

Definiții

- Un unghi cu vârful în centrul unui cerc se numește **unghi la centru**.
- Intersecția cercului cu interiorul unghiului la centru se numește **arc mic** al cercului. *Notăm*: $\smile AB$, unde A și B sunt punctele de intersecție a unghiului la centru cu cercul.
- Intersecția cercului cu exteriorul unghiului la centru se numește **arc mare** al cercului. *Notăm*: $\smile ACB$, unde C aparține cercului, dar nu aparține arcului mic.
- Punctele A și B se numesc **capetele arcelor**. Arcele AB și ACB se numesc **arce complementare**.
  În afară de faptul că punctele A și B determină două arce, ele mai determină coarda AB. Se spune „coarda AB subîntinde arcul AB”.

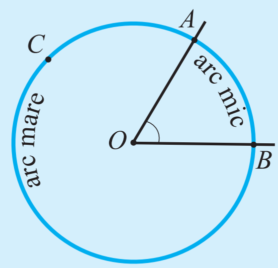


Fig. 12

- **Măsura unui arc mic** este măsura unghiului la centru corespunzător arcului.
- **Măsura unui arc mare** este egală cu 360° minus măsura arcului complementar lui.
- Două **arce** ale aceluiași cerc (sau a două cercuri congruente) sunt **congruente** dacă au măsuri egale. Notația $\smile AB \equiv \smile CD$ se citește: arcele AB și CD sunt congruente.
- Capetele unui diametru determină două arce congruente, numite **semicercuri**, fiecare cu măsura de 180°.
- Se numește **unghi înscris în cerc** unghiul cu vârful pe cerc și ale cărui laturi intersectează cercul.

Investigăm **2** Examinați desenul (fig. 13, O este centrul cercului). Utilizând datele din desen și luând în considerație că $\angle AOB \equiv \angle COD$ și $[AG] \equiv [EF]$, determinați:

a) CD; b) $m(\angle FOE)$.

Rezolvare:

$\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (Criteriul LUL).

Prin urmare, $CD =$ ☐ cm.

$\Delta AOG \equiv$ ☐ (Criteriul LLL).

$m(\angle FOE) = m(\angle$ ☐ $) =$ ☐°.

Răspuns: $CD =$ ☐ cm, $m(\angle FOE) =$ ☐°.

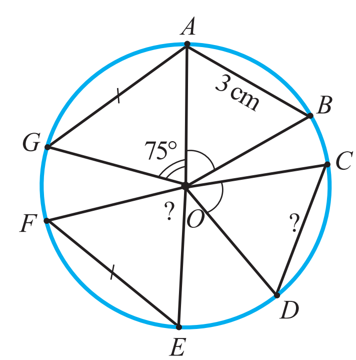


Fig. 13

Teorema 4 Dacă două coarde ale aceluiași cerc (sau a două cercuri congruente) sunt congruente, atunci arcele pe care le subîntind sunt congruente.

Reciproca teoremei 4 de asemenea este teoremă.

• Demonstrați teorema 4 și reciproca ei.

Problemă de construcție (opțional)

3 Cum se poate construi un cerc, știind că o coardă de 3 cm subîntinde în acest cerc un arc de 70°?

Rezolvare:

① Pentru a construi cercul, trebuie să construim un segment de lungimea razei (fig. 14).

② Considerăm construcția realizată (vezi desenul).

③ Fie $[OM]$ înălțime a triunghiului isoscel AOB.

ΔOMB este dreptunghic, $m(\angle B) = 55°$,

$BM = 1{,}5$ cm.

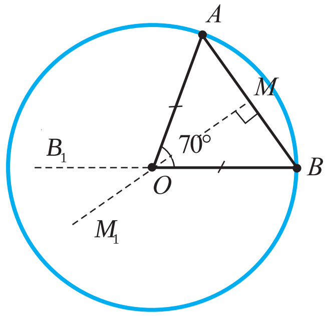


Fig. 14

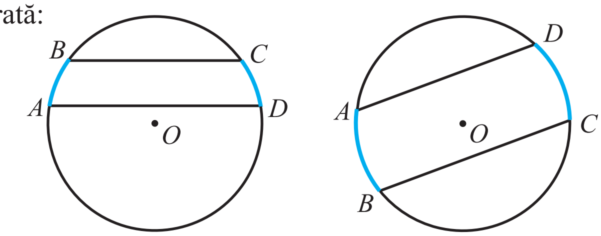
Prin urmare, conform criteriului CU, triunghiul OMB (în particular, ipotenuza OB) poate fi construit în mod univoc.

④ Construcția poate fi realizată în modul următor:
- construim segmentul AB de 3 cm;
- construim mediatoarea MM_1 a segmentului AB, unde M este mijlocul segmentului AB;
- construim $[BB_1$, astfel încât $m(\angle MBB_1) = 55°$;
- $[MM_1 \cap [BB_1 = \{O\}$;
- construim cercul $\mathscr{C}(O, OB)$.

• Utilizând proprietățile triunghiurilor și ale unghiurilor obținute la intersecția a două drepte paralele de o secantă poate fi demonstrată:

Teorema 5

Două arce ale aceluiași cerc cuprinse între două coarde paralele sunt congruente (fig. 15).



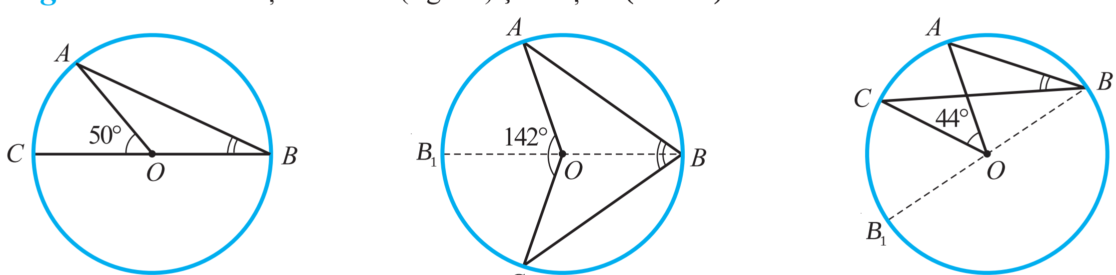
$AD \parallel BC \Rightarrow \smile AB \equiv \smile CD$

Fig. 15

• Demonstrați că două coarde egal depărtate de centrul cercului sunt congruente.

2.2. Unghiuri înscrise în cerc

Investigăm • Examinați desenele (fig. 16) și aflați $m(\angle ABC)$.



a) b) c)

Fig. 16

Rezolvare:

a) Examinăm ΔAOB: $[AO] \equiv [OB]$, deci $\angle B \equiv \angle A$.

$\angle AOC$ este unghi exterior pentru $\angle AOB$, deci $m(\angle AOC) = m(\angle A) + m(\angle B)$.

$m(\angle B) = \frac{1}{2} m(\angle \square) = \square°$.

b) Ca şi în cazul a) $m(\angle ABB_1) = \frac{1}{2} m(\angle AOB_1)$, (1)

$m(\angle B_1BC) = \frac{1}{2} m(\angle \square)$. (2)

Adunând relațiile (1) şi (2), obținem

$$m(\angle ABB_1) + m(\angle B_1BC) = m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle \square) = \square°.$$

c) Similar cazurilor a) şi b), obținem:

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle \square) = \square°.$$

Teorema 6

Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile unghiului (fig. 17).

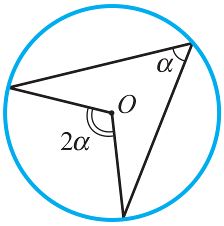


Fig. 17

Consecința 1

Unghiurile înscrise în acelaşi arc de cerc sunt congruente (fig. 18).

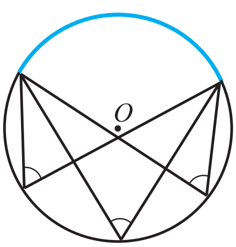


Fig. 18

Consecința 2

Unghiurile înscrise într-un semicerc sunt drepte (fig. 19).

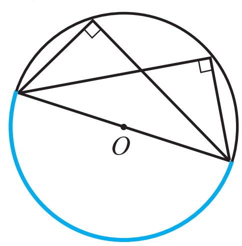


Fig. 19

Exercițiu Desenul din figura 20 sugerează un algoritm de construire a tangentelor la un cerc de centru O dintr-un punct M dat, exterior cercului. Luând în considerație consecința 2, explicați acest algoritm.

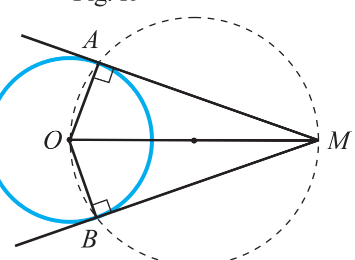


Fig. 20

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Desenați și notați un unghi la centru de măsură α al cercului $\mathscr{C}(O, r)$, unde:

a) $\alpha = 60°$, $r = 4$ cm; b) $\alpha = 90°$, $r = 6$ cm; c) $\alpha = 120°$, $r = \sqrt{5}$ cm.

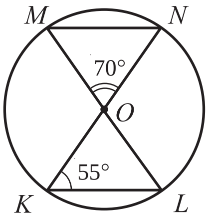
2. Punctele A, B, C aparțin unui cerc şi $B \in \smile AC$.

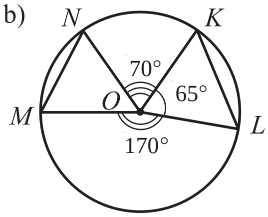
a) Aflați $m(\smile BC)$, dacă $m(\smile AC) = 120°$, $m(\smile AB) = 75°$.

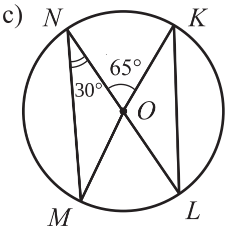
b) Aflați $m(\smile AC)$, dacă $m(\smile AB) = 35°$, $m(\smile BC) = 55°$.

c) Aflați $m(\smile AB)$, dacă $m(\smile AC) = 150°$, $m(\smile AC) + m(\smile BC) = 175°$.

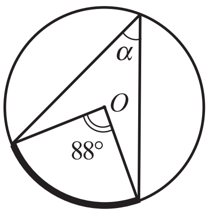
3. ***Lucrați în perechi!*** Comparați MN şi KL din următoarele figuri (O este centrul cercului):

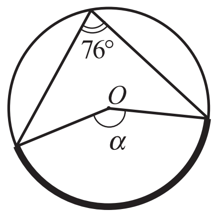
a) 

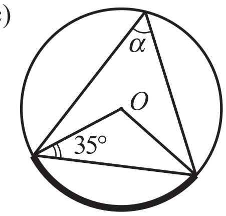
b) 

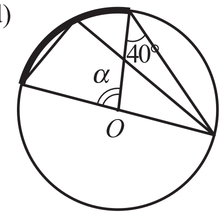
c) 

4. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a) 

b) 

c) 

d) 

5. Câte grade are unghiul la centru corespunzător arcului:

a) de $\frac{1}{3}$ din cerc; b) $\frac{1}{5}$ din cerc;

c) $\frac{1}{10}$ din cerc; d) $\frac{1}{12}$ din cerc;

e) $\frac{1}{6}$ din semicerc; f) $\frac{1}{12}$ din semicerc?

6. ***Lucrați în grup!*** Construiți unghiul ABC format de secanta AC şi tangenta AB ale aceluiaşi cerc, astfel încât: a) $m(\angle ABC) = 40°$; b) $m(\angle ABC) = 75°$; c) $m(\angle ABC) = 350°$.

7. Construiți unghiul ABC cu vârful B în interiorul cercului, astfel încât:

a) $m(\angle ABC) = 25°$; b) $m(\angle ABC) = 115°$; c) $m(\angle ABC) = 210°$.

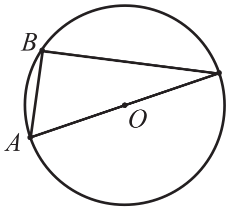
8. Construiți unghiul ABC cu vârful B în exteriorul cercului, astfel încât:

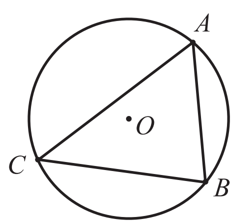
a) $m(\angle ABC) = 70°$; b) $m(\angle ABC) = 127°$; c) $m(\angle ABC) = 165°$.

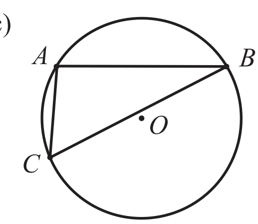
9. Aflați diametrul cercului în care este înscris triunghiul ABC cu unghiul drept B şi:

a) $AC = 8$ cm, $BC = 4$ cm; b) $AB = 20$ cm, $BC = 21$ cm.

10. ***Investigați!*** Fără a măsura, stabiliți tipul (ascuțitunghic, dreptunghic, optuzunghic) triunghiului ABC (O este centrul cercului) din desen.

a) 

b) 

c) 

11. Punctele A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe un cerc. $[AC]$ şi $[BD]$ sunt diametre perpendiculare. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

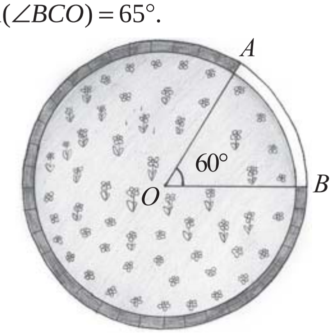
12. Punctele A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe un cerc. $[AC]$ şi $[BD]$ sunt diametre neperpendiculare. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

13. Punctele A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe un cerc de centru O şi $AB \parallel CD$. Aflați:

a) $m(\angle AOD)$, dacă $m(\angle BOC) = 50°$;

b) $m(\angle BOC)$, dacă $m(\angle DAO) = 70°$;

c) $m(\angle ADO)$, dacă $m(\angle BCO) = 65°$.



14. Domnul Albu a vopsit o porțiune din bordura ce împrejmuieşte un răzor de flori în 10 minute (vezi desenul). În câte minute va reuşi să vopsească porțiunea rămasă a bordurii?

15. Fie ABC un unghi format de secanta AB şi tangenta AC (A este punctul de tangență) la un cerc de centru O. Aflați $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle AOB) = 80°$.

Formăm capacitățile și aplicăm

16. Punctele A, B, C, D, E sunt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor AB, BC, CD, DEA, dacă ele sunt direct proporționale cu numerele 3, 4, 2, 3.

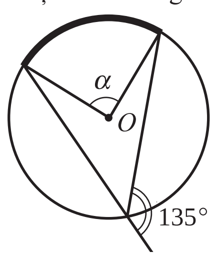
17. Punctele A, B, C, D, E sunt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor AB, BC, CD, DEA, dacă ele sunt invers proporționale cu numerele 1, 2, 3, 6.

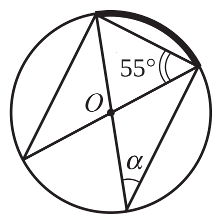
18. Dintr-un punct al cercului sunt duse două coarde perpendiculare cu lungimile de 35 cm şi 12 cm. Determinați raza cercului.

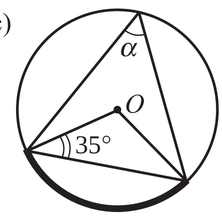
19.  ***Investigați!*** Câte arce şi câte coarde există cu capetele: a) în 3 puncte ale unui cerc;
b) în 7 puncte ale unui cerc;
c) în n puncte ale unui cerc?

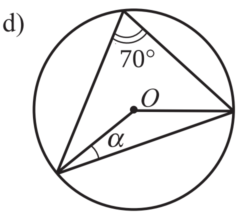
20. Împărțiți un cerc în şase arce, astfel încât măsurile lor să fie proporționale cu numerele 1, 3, 6, 7, 8, 11.

21. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a) 

b) 

c) 

d) 

22. Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de: a) 20 de minute; b) 25 de minute; c) 4 minute; d) 35 de minute?

23. Punctele A şi B aparțin unui cerc, astfel încât $m(\smile AB) = 120°$.
Aflați raza cercului, dacă $AB = 6\sqrt{3}$ cm.

24. Coardele AB şi AC ale unui cerc au fiecare lungimea de 16 cm. Aflați raza cercului, dacă $m(\smile BC) = 120°$.

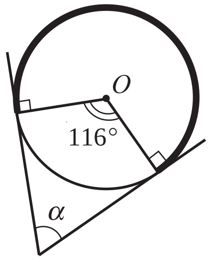
25. Fie AB o coardă a unui cerc. Prin punctul A se duce tangenta AC la cerc, iar prin punctul B – o coardă BD. Determinați $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle BDA) = 80°$.

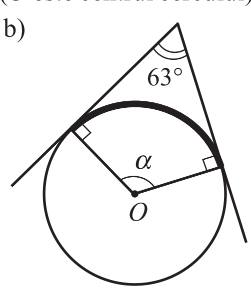
Dezvoltăm capacitățile și creăm

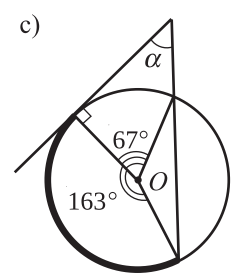
26. Laturile unui unghi de 60° sunt tangente la un cerc de rază 20 cm. Aflați distanța dintre punctele de tangență.

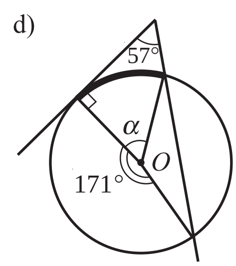
27. Laturile unui triunghi dreptunghic sunt tangente la un cerc. Unul dintre punctele de tangență împarte o catetă în segmente de lungimi de 3 cm şi 5 cm. Determinați lungimea ipotenuzei.

28. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a) 

b) 

c) 

d) 

29. Folosind rigla şi compasul, construiți un arc de:
a) 60°; b) 30°; c) 120°; d) 15°.

30. Se cunoaşte un unghi de 19°. Construiți (doar cu rigla şi compasul) un unghi de:
a) 9°. *Indicație.* $180° = 19° \cdot 9 + 9°$. b) 5°; c) 1°.

31. Se dă un unghi de 25°. Construiți, folosind rigla şi compasul, un unghi de:
a) 10°. *Indicație.* $100° = 25° \cdot 4 = 90° + 10°$.
b) 5°; c) 20°.

32. Fie $\mathscr{C}(O, r = 4 \text{ cm})$ şi punctul A exterior lui. Construiți tangentele AM şi AN ale cercului.

33. O coardă a unui cerc are lungimea de 30 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă cu lungimea de 36 cm, paralelă cu tangenta. Aflați raza cercului.

34. Într-un cerc de rază 2 cm este construită o coardă de 1 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă paralelă cu tangenta. Determinați lungimea acestei coarde.

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. a) Construiți un cerc de rază 5 cm. Construiți coardele AB de 5 cm, BC de 6 cm, diametrele MN şi KL.
b) Măsurați unghiurile LMK şi LNK.

2. ***Investigați!*** Stabiliți poziția punctului A față de $\mathscr{C}(O,\ r=7\sqrt{3}\ \text{cm})$, dacă:
a) $OA=\dfrac{19}{2\sqrt{3}}$ cm; b) $OA=(4\sqrt{3}+2\sqrt{5})$ cm;
c) $OA=\dfrac{21}{\sqrt{3}}$ cm; d) $OA=(7+\sqrt{3})$ cm.

3. Punctele A, B, C aparțin $\mathscr{C}(O,\ r=6{,}5\ \text{cm})$, astfel încât $[AB]$ este diametru. Aflați AC, dacă $BC=12$ cm.

4. Fie $\mathscr{C}(O,\ r=8\sqrt{5}\ \text{cm})$ şi coardele AB şi CD congruente. Aflați $d(O,\ AB)$, dacă $d(O,\ CD)=6$ cm.

5. Fie $\mathscr{C}(O,\ r=\sqrt{19}\ \text{cm})$. Determinați lungimea coardei AB, dacă $d(O,\ AB)=\sqrt{6}$ cm.

6. Desenați și notați un unghi la centru de $45°$ al cercului $\mathscr{C}(O,\ r=6\ \text{cm})$.

7. Punctele M, N, K, L sunt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați:
a) $m(\smile MN)$, dacă $m(\smile ML)=115°$, $m(\smile NL)=55°$;
b) $m(\smile NK)$, dacă $m(\smile MK)=37°$, $m(\smile NL)=65°$, $m(\smile ML)=85°$;
c) $m(\smile KL)$, dacă $m(\smile MN)=39°$, $m(\smile MK)=94°$, $m(\smile NL)=122°$.

8. Construiți în $\mathscr{C}(O,\ r=4{,}5\ \text{cm})$ un unghi înscris de:
a) $100°$; b) $160°$; c) $240°$; d) $180°$.

9. Coardele AB și CD se intersectează în punctul M interior cercului. Aflați:
a) AM, dacă $CM=18$ cm, $MD=3$ cm, $MB=9$ cm;
b) MB, dacă $AM=\sqrt{7}$ cm, $CM=3{,}5$ cm, $MD=8$ cm.

10. Punctele A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe cerc și $AB\cap CD=\{M\}$. Aflați:
a) CM, dacă $AM=24$ cm, $MB=8$ cm, $MD=16$ cm;
b) MD, dacă $AM=\dfrac{2}{3}$ cm, $MB=\dfrac{3}{4}$ cm, $CM=1$ cm.

11. Punctele A, B, C sunt situate pe cercul de centru O. Aflați:
a) $m(\angle ABC)$, dacă $m(\angle AOC)=104°$;
b) $m(\angle AOC)$, dacă $m(\angle ABC)=37°$;
c) $m(\angle OAC)$, dacă $m(\angle AOC)=88°$;
d) $m(\angle ACO)$, dacă $m(\angle ABC)=29°$.

12. ***Lucrați în perechi!*** Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de:
a) 5 minute; b) 25 de minute; c) 45 de minute?

13. Într-un cerc de raza 6 cm coarda formează cu diametrul un unghi de 30°. Determinați lungimea coardei.

Formăm capacitățile și aplicăm

14. Construiți cu rigla și compasul triunghiul ABC cu laturile de $\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm.

15. Punctele A, B, C aparțin $\mathscr{C}(O,\ r=2\sqrt{6}\ \text{cm})$, astfel încât $[AB]$ este diametru. Determinați BC, dacă $OM=4$ cm, unde M este mijlocul segmentului BC.

16. Folosind echerul și compasul, construiți un unghi de:
a) $135°$; b) $157°\,30'$.

17. Diametrul AB al cercului de rază $2\sqrt{17}$ cm intersectează coarda CD în mijlocul ei – M. Aflați AM și BD, dacă $CM=5\sqrt{2}$ cm.

18. Mediatoarea coardei AB intersectează cercul în punctele C și D. Aflați raza cercului, dacă $AB=14$ cm și $d(C, AB)=4$ cm.

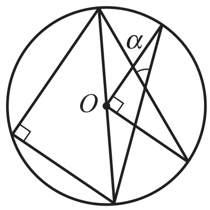
19. Din punctul M s-au dus tangentele la $\mathscr{C}(O,\ r=6\ \text{cm})$, punctele A și B fiind puncte de tangență. Determinați OM, dacă $AM=9$ cm.

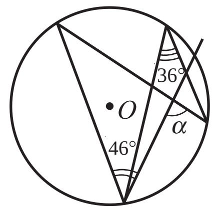
20. ***Lucrați în perechi!*** Aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABC cu vârfurile pe același cerc, dacă:
a) $m(\smile AB)=50°$, $m(\smile AC)=80°$;
b) $m(\smile AB)=46°$, $m(\smile AC)=74°$.

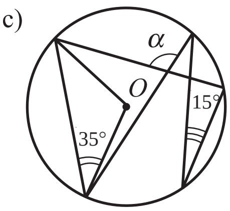
Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Laturile trapezului isoscel $ABCD$ cu baza mare AD sunt tangente la același cerc. Aflați raza cercului, dacă $AB = 20\,\text{cm},\ BC = 8\,\text{cm}$.

21. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a)


b)


c)


22. *Investigați!* Demonstrați că măsura unghiului cu vârful în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurii arcului cuprins între laturile sale și a arcului cuprins între prelungirile laturilor sale.

23. *Lucrați în grup!* **Proiect STEAM.** *Cercul și discul în arhitectură.*

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. a) Desenați un cerc cu centrul M și raza de 3 cm. Construiți diametrul BD, coardele DA și BA, precum și tangenta la cerc în punctul A.
b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă $MX = (\sqrt{3}+2)$ cm, atunci punctul X este exterior cercului." Justificați.
c) Știind că $m(\angle AMB) = 50°$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABD.
d) Știind că $m(\angle AMB) = 50°$, aflați măsura unghiului format de tangenta construită și coarda DA.

2. Fie cercul cu centru O și raza de 13 cm. Diametrul AB este perpendicular pe coarda MN de 24 cm și o intersectează în punctul C.
a) Aflați distanța de la punctual O la coarda MN.
b) În ce raport punctul C împarte diametrul AB?

3. Laturile trapezului isoscel $ABCD$ cu bazele BC de 9 cm și AD de 25 cm sunt tangente la un cerc cu centru O.
a) Aflați lungimea laturii laterale a trapezului.
b) Determinați raza cercului.
c) Demonstrați că triunghiul AOB este dreptunghic.

Varianta II

1. a) Desenați un cerc cu centrul N și raza de 2 cm. Construiți diametrul AB, coardele AC și BC, precum și tangenta la cerc în punctul A.
b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă $NY = (\sqrt{5}-1)$ cm, atunci punctul Y este exterior cercului." Justificați.
c) Știind că $m(\angle CBA) = 40°$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ACN.
d) Știind că $m(\angle CBA) = 40°$, aflați măsura unghiului format de tangenta construită și coarda AC.

2. Coarda AB de 40 cm a cercului de centru O este perpendiculară pe diametrul DC, îl intersectează în punctul K și se află la 21 cm de centrul cercului.
a) Aflați raza cercului.
b) În ce raport punctul K împarte diametrul DC?

3. Laturile trapezului isoscel $ABCD$ cu laturile laterale AB de 24 cm, CD de 25 cm sunt tangente la un cerc cu centru Q.
a) Aflați raza cercului.
b) Determinați lungimea bazelor trapezului.
c) Demonstrați că triunghiul CDQ este dreptunghic.

Capitolul

2 Arii

Natura vorbeşte în limba matematicii; literele acestei limbi sunt cercuri, triunghiuri şi alte figuri geometrice.

Galileo Galilei

§ 1. Noțiunea de arie

Am întâlnit noțiunea de arie în clasele anterioare, când am calculat aria pătratului, a dreptunghiului. De fapt, am calculat aria suprafeței mărginite de aceste poligoane.

Reuniunea poligonului convex şi a interiorului său se numeşte **suprafață poligonală convexă**. Reuniunea unui număr finit de suprafețe poligonale convexe este **o suprafață poligonală**.

Aria este un număr ce caracterizează o suprafață poligonală. Totuşi, prin tradiție, în loc de aria suprafeței poligonale vom spune aria poligonului. Notăm aria poligonului $A_1A_2...A_n$ prin $\mathscr{A}_{A_1A_2...A_n}$.

Admitem ca fiind evidente următoarele proprietăți ale ariei:

1° Aria poligonului este un număr nenegativ.

2° Ariile poligoanelor congruente sunt egale.

3° Aria unui poligon este suma ariilor poligoanelor, cu interioarele disjuncte fiecare două, în care se descompune poligonul dat.

4° Aria pătratului cu laturile de lungime 1 este egală cu 1.

Deci, dacă laturile pătratului sunt de 1 m, atunci aria lui este egală cu un metru pătrat (se scrie m^2); dacă latura pătratului este de 1 cm, atunci aria lui este egală cu un centimetru pătrat (se scrie cm^2) etc.

Poligoanele cu ariile egale se numesc **poligoane echivalente**.

§ 2. Aria paralelogramelor

2.1. Aria pătratului, aria dreptunghiului, aria rombului

Ne amintim

1 Calculați aria pătratului cu laturile de 2,5 cm.

Rezolvare:

Aria pătratului cu laturile de lungime a se calculează cu formula $\mathscr{A} = a^2$. Deci, $\mathscr{A} = 2{,}5^2 = 6{,}25\ (\mathrm{cm}^2)$.

2 Fie pătratul $ABCD$ (fig. 1).

a) Comparați ariile triunghiurilor ABC şi ADC.

b) Calculați aria triunghiului ABC, dacă laturile pătratului sunt de 3 cm.

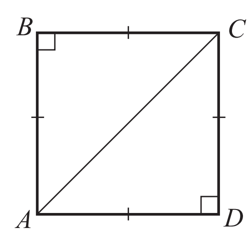


Fig. 1

Rezolvare:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 3^2 = 4{,}5\ (\text{cm}^2)$.

Generalizăm

Aria pătratului cu laturile de lungime a este a^2.

Aria triunghiului dreptunghic isoscel cu lungimile catetelor egale cu a este $\frac{a^2}{2}$.

3 Calculați aria dreptunghiului cu laturile de 7,2 cm și 1,1 cm.

Rezolvare:

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor a și b se calculează cu formula $\mathcal{A} = a \cdot b$.
Prin urmare, $\mathcal{A} = 7{,}2 \cdot 1{,}1 = 7{,}92\ (\text{cm}^2)$.

4 Fie dreptunghiul $ABCD$ (fig. 2).

a) Comparați ariile triunghiurilor ABC și ADC.

b) Calculați aria triunghiului ABC, dacă laturile dreptunghiului sunt de 6 cm și 12 cm.

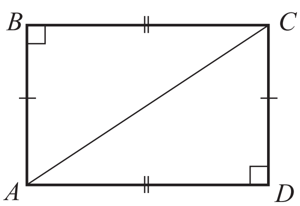


Fig. 2

Rezolvare:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 6 \cdot 12 = 36\ (\text{cm}^2)$.

Generalizăm

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor a și b este $\mathcal{A} = a \cdot b$.

Aria triunghiului dreptunghic cu lungimile catetelor a și b este $\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot b$.

Investigăm

5 Calculați aria rombului $ABCD$ cu $AC = 13{,}4$ cm și $BD = 18$ cm.

Rezolvare:

Fie O punctul de intersecție a diagonalelor rombului. Diagonalele rombului sunt perpendiculare și punctul de intersecție le înjumătățește.

Triunghiurile dreptunghice AOB, COB, COD, AOD sunt congruente. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 4\mathcal{A}_{AOB} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot AO \cdot BO =$

$= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{AC}{2}\cdot\frac{BD}{2} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}\cdot 13{,}4 \cdot 18 = 120{,}6\ (\text{cm}^2)$.

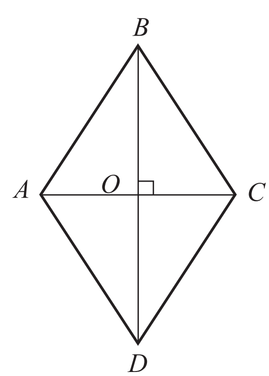


Fig. 3

Generalizăm

Aria rombului este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor.

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{romb}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$, unde d_1 și d_2 sunt lungimile diagonalelor rombului.

2.1. Aria paralelogramului oarecare

Investigăm

1 Fie paralelogramul $ABCD$ şi $[BM]$, $[CN]$ – înălţimi ale lui (fig. 4).

a) Comparaţi ariile triunghiurilor ABM şi DCN.

b) Calculaţi aria paralelogramului $ABCD$, dacă $MB=8$ cm şi $AD=11$ cm.

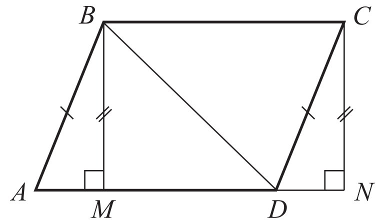


Fig. 4

Rezolvare:

a) $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$ (Criteriul CI). Deci, conform proprietăţii 2°, $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{DCN}$.

b) Conform proprietăţii 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{DCN} = \mathcal{A}_{MBCN}$.

$MBCN$ este dreptunghi şi $\mathcal{A}_{MBCN} = MB \cdot BC = MB \cdot AD = 8 \cdot 11 = 88$ (cm^2).

Generalizăm

Aria paralelogramului este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi şi înălţimea corespunzătoare acestei laturi.

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{par}} = a \cdot h}$, unde h este înălţimea corespunzătoare laturii de lungime a.

§ 3. Aria triunghiului

Investigăm

1 Calculaţi aria triunghiului ABC cu înălţimea BM, dacă $AC=16$ cm, $BM=8$ cm.

Rezolvare:

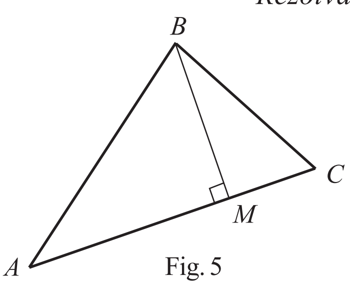


Fig. 5

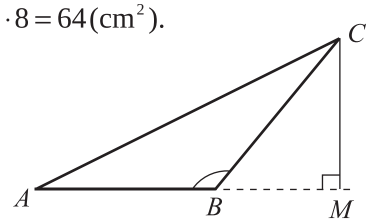
Triunghiurile AMB şi BMC sunt dreptunghice (fig. 5).

Prin urmare, $\mathcal{A}_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AM$, $\mathcal{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$.

Deci, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{AMB} + \mathcal{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot AM + \frac{1}{2} BM \cdot MC =$

$= \frac{1}{2} BM(AM+MC) = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64$(cm^2).

- Examinaţi desenul şi calculaţi aria triunghiului ABC, dacă $AB=12$ cm, iar $CM=10$ cm.



Generalizăm şi aflăm

- **Aria triunghiului** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi şi înălţimea corespunzătoare acestei laturi.

  $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot h}$, unde h este înălţimea corespunzătoare laturii de lungime a a triunghiului.

- **Formula lui Herone**:

  $\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, unde a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul lui.

Teorema 1

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

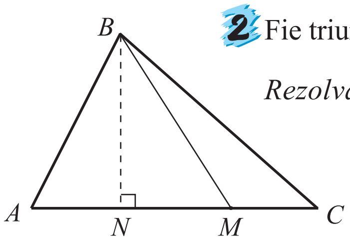


Fig. 7

2 Fie triunghiul ABC şi $M \in (AC)$, astfel încât $\dfrac{AM}{MC} = 4$ (fig. 7). Calculaţi $\dfrac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{BMC}}$.

Rezolvare:

Construim punctul $N \in AC$, astfel încât $BN \perp AC$.

Aşadar, $[BN]$ este înălţimea comună a triunghiurilor ABM şi BMC.

Avem $\dfrac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{BMC}} = \dfrac{\frac{1}{2}BN \cdot AM}{\frac{1}{2}BN \cdot MC} = \dfrac{AM}{MC} = 4.$

Teorema 2 Fie triunghiul ABC şi $M \in (AC)$. Atunci $\dfrac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{BMC}} = \dfrac{AM}{MC}$.

Consecinţă. O mediană a unui triunghi descompune triunghiul în două triunghiuri echivalente.

§ 4. Aria trapezului

Investigăm

1 Fie trapezul $TRAP$ cu baza mare TP de lungime a, baza mică RA de lungime b şi înălţimea h.

Calculaţi aria trapezului.

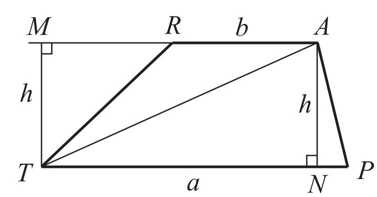


Fig. 8

Rezolvare:

Construim punctele $M \in RA$ şi $N \in TP$, astfel încât $TM \perp RA$, $AN \perp TP$ (fig. 8). Evident, $TM = AN = h$.

Atunci $\mathcal{A}_{TRAP} = \mathcal{A}_{TRA} + \mathcal{A}_{TAP} = \frac{1}{2}TM \cdot RA + \frac{1}{2}AN \cdot TP = \frac{1}{2}h \cdot b + \frac{1}{2}h \cdot a = \frac{1}{2}h(a+b).$

Generalizăm

Aria trapezului cu bazele de lungimile a şi b şi înălţimea h se calculează cu formula $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}h(a+b) = h \cdot m}$, unde m este lungimea liniei mijlocii a trapezului.

2 Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ (fig. 9).

a) Comparaţi $\mathcal{A}_{ABD}$ şi $\mathcal{A}_{ACD}$, $\mathcal{A}_{ABC}$ şi $\mathcal{A}_{BCD}$.

b) Fie $\{I\} = AC \cap BD$. Comparaţi $\mathcal{A}_{ABI}$ şi $\mathcal{A}_{CID}$.

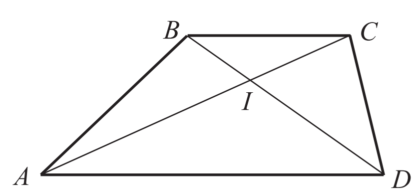


Fig. 9

Rezolvare:

a) Înălţimile triunghiurilor ABD şi ACD, coborâte din vârfurile B şi C pe latura comună AD, sunt înălţimi ale trapezului. Prin urmare, triunghiurile ABD şi ACD sunt echivalente, adică $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$. Similar, se poate arăta că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{BCD}$.

b) $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{ABD} - \mathcal{A}_{AID}$, $\mathcal{A}_{CID} = \mathcal{A}_{ACD} - \mathcal{A}_{AID}$.

Dar conform a), $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{CID}$.

Generalizăm

Diagonalele unui trapez şi laturile neparalele formează cu una dintre baze triunghiuri echivalente.

Triunghiurile formate de diagonalele unui trapez cu laturile neparalele sunt echivalente.

§ 5. Aria poligonului regulat. Lungimea cercului și aria discului

1 Ştiind că m este lungimea înălţimii coborâte din centrul poligonului regulat pe una dintre laturile lui, iar l – lungimea laturii, calculaţi aria poligonului, ştiind că el are:

a) 6 laturi; b) n laturi.

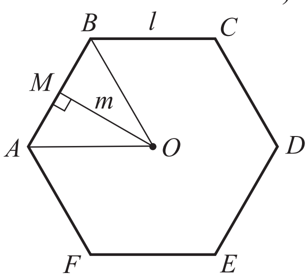


Fig. 10

Rezolvare:

a) Poligonul regulat cu 6 laturi se numeşte hexagon regulat.

Fie O centrul cercului înscris în hexagonul regulat $ABCDEF$ (fig. 10). Evident că triunghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOF şi AOF sunt congruente, iar suma ariilor acestora este egală cu aria hexagonului $ABCDEF$.

Prin urmare,

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB}. \qquad (1)$$

Fie $[OM]$ înălţime a triunghiului AOB. Deoarece ΔAOB este isoscel, rezultă că $[OM]$ este şi apotemă, adică $OM = m$.

$$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot l. \qquad (2)$$

Substituind (2) în (1), obţinem:

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{1}{2} ml = 3ml.$$

Răspuns: $3ml$.

b) Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon regulat cu n laturi, iar O – centrul cercului înscris în acest poligon (fig. 11).

Similar cazului a), dacă unim punctul O cu vârfurile poligonului, obţinem n triunghiuri congruente şi

$$\mathcal{A}_{A_1, A_2 ... A_n} = n \cdot \mathcal{A}_{A_1OA_2}.$$

Dar $\mathcal{A}_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} ml.$

Prin urmare, $\mathcal{A}_{A_1, A_2 ... A_n} = \frac{1}{2} mnl.$

Răspuns: $\frac{1}{2} mnl.$

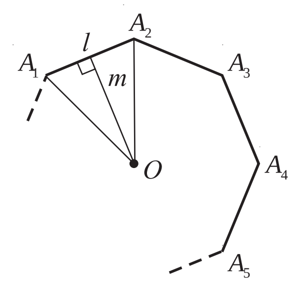


Fig. 11

Generalizăm

- ***Apotema*** poligonului regulat este segmentul care uneşte centrul poligonului cu mijlocul unei laturi. Apotema este perpendiculară pe această latură.
- ***Aria poligonului regulat*** cu n laturi, apotema de lungime m şi latura de lungime l se calculează cu formula $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot l.$
- ***Aria triunghiului echilateral*** cu latura de lungime l este egal cu $\frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$

- Demonstraţi formula de calcul a ariei triunghiului echilateral.

2 Fie un cerc cu raza 1. Se poate arăta că în acest cerc poate fi înscris orice poligon regulat cu n laturi. Calculând perimetrele acestor poligoane, obţinem, de exemplu:

pentru $n = 4$, $P_4 = 4\sqrt{2} \approx 5{,}656854$;

pentru $n = 8$, $P_8 = 8\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 6{,}12253492$;

pentru $n = 16$, $P_{16} = 16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \approx 6{,}24289030$;

pentru $n = 32$, $P_{32} = 32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \approx 6{,}27309698$.

Observăm că perimetrele obținute sunt aproximativ egale. Este firesc, deoarece fiecare dintre ele aproximează cu o anumită exactitate lungimea cercului de rază 1. Evident, cu cât poligonul regulat are mai multe laturi, cu atât mai corect va fi calculată lungimea acestui cerc.

Perimetrele calculate aproximează dublul numărului irațional $\pi \approx 3{,}14159...$

Deci, lungimea cercului de rază 1 este 2π.

Se poate demonstra formula $\boxed{L = 2\pi R}$, unde L este lungimea cercului, iar R – raza lui.

3 Calculați aria discului cu centrul O şi raza R.

Rezolvare:

În $\mathcal{C}(O, R)$ înscriem un poligon regulat cu n laturi.

Aria acestui poligon este $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} n \cdot l \cdot m$, unde l este lungimea laturii, iar m – lungimea apotemei poligonului.

Cu cât este mai mare n, cu atât mai bine $n \cdot l$ aproximează lungimea cercului, iar m – raza R a cercului. De aceea, putem considera $\mathcal{A}_{\text{discului}} = \frac{1}{2} L \cdot R$, unde L este lungimea cercului ce mărgineşte discul.

Prin urmare, deoarece $L = 2\pi R$, obținem $\boxed{\mathcal{A}_{\text{discului}} = \pi R^2}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Calculați perimetrul şi aria pătratului cu laturile de:
a) 3 cm; b) 3,7 cm;
c) $6\sqrt{5}$ cm; d) $7\frac{2}{9}$ cm.

2. Aflați lungimea laturii pătratului, dacă aria lui este de:
a) $225\ \text{cm}^2$; b) $48\ \text{cm}^2$;
c) $16\frac{1}{8}\ \text{cm}^2$; d) $(\sqrt{3}-2)^2\ \text{cm}^2$.

3. Calculați aria triunghiului dreptunghic isoscel cu catetele de lungime:
a) 2,7 cm; b) 3,5 cm;
c) $(2+\sqrt{3})$ cm; d) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ cm.

4. Aflați lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel, dacă aria lui este de:
a) $72\ \text{cm}^2$; b) $120\ \text{cm}^2$;
c) $2\frac{1}{12}\ \text{cm}^2$; d) $(2\sqrt{5}-5)^2\ \text{cm}^2$.

5. Calculați aria dreptunghiului cu laturile de:
a) 4,4 cm şi 1,2 cm;
b) $4\sqrt{7}$ cm şi $2\sqrt{7}$ cm;
c) $(2\sqrt{31}+\sqrt{29})$ cm şi $(2\sqrt{31}-\sqrt{29})$ cm;
d) $11\frac{1}{16}$ cm şi $\frac{256}{177}$ cm.

6. Aflați perimetrul şi aria triunghiului dreptunghic cu catetele de:
a) 3 dm şi 40 cm; b) 12 cm şi 50 mm;
c) 0,8 m şi 60 cm; d) 120 mm şi 1,2 dm.

7. Determinați dimensiunile dreptunghiului cu aria $\mathcal{A}$ şi perimetrul $\mathcal{P}$, dacă:
a) $\mathcal{A} = 18{,}25\ \text{cm}^2$, $\mathcal{P} = 19{,}6$ cm;
b) $\mathcal{A} = 110\ \text{cm}^2$, $\mathcal{P} = 32\sqrt{2}$ cm;
c) $\mathcal{A} = \frac{14}{27}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{P} = 1\frac{4}{9}$ cm;
d) $\mathcal{A} = 32\ \text{cm}^2$, $\mathcal{P} = 36$ cm.

8. Două loturi de pământ au formă de pătrate cu laturile de 15 m şi, respectiv, 25 m. Aflați cealaltă dimensiune a unui lot de pământ de formă dreptunghiulară echivalent cu loturile date, dacă o dimensiune este de 50 m.

9. ***Lucrați în perechi!*** Fie $ABCD$ paralelogram, $h_1 = d(A, BC)$, $h_2 = d(B, CD)$ şi $\mathcal{A}$ – aria paralelogramului. Completați tabelul:

AB	BC	h_1	h_2	$\mathcal{A}$
	15	12	10	
$5\sqrt{5}$	5		$3\sqrt{5}$	
		7	10,5	210
	18		9	162

10. Fie h_a, h_b, h_c înălțimile unui triunghi corespunzătoare laturilor a, b, c, iar $\mathcal{A}$ – aria triunghiului. Completați tabelul:

a	b	c	h_a	h_b	h_c	$\mathcal{A}$
6	12		10		5	
	15		12	10	9	
14,4		16		12		144
24	30				21	210

11. Fie triunghiul ABC. Aflați aria triunghiului, dacă:
a) $AB = 6$ cm, $BC = 7$ cm, $AC = 9$ cm;
b) $AB = 18$ cm, $BC = 9\sqrt{3}$ cm, $AC = 8\sqrt{3}$ cm;
c) $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $m(\angle A) = 90°$.

12. ***Lucrați în grup!*** Fie h înălțimea trapezului $ABCD$ cu baza mare AB. Determinați ariile triunghiurilor ABC, ABD, ADC, DCB, dacă:
a) $AB = 11$ cm, $CD = 8$ cm, $h = 9$ cm;
b) $AB = 7\sqrt{5}$ cm, $CD = 4\sqrt{5}$ cm, $h = 5\sqrt{5}$ cm;
c) $AB = 9\frac{15}{22}$ cm, $CD = \frac{90}{11}$ cm, $h = 11$cm;
d) $AB = 12$ cm, $AD = 7$ cm, $m(\angle A) = m(\angle B) = 45°$.

13. ***Lucrați în perechi!*** Fie h înălțimea, m lungimea liniei mijlocii, iar $\mathcal{A}$ aria trapezului $ABCD$ cu baza mare AB. Completați tabelul:

AB	CD	h	m	$\mathcal{A}$
10	6	7		
18		22	16	
32		20		560

14. Aflați lungimea cercului și aria discului mărginit de acest cerc, dacă raza cercului este de:
a) 10 cm; b) 15 cm; c) 8 cm.

15. Aflați aria paralelogramului cu unghiul ascuțit de 45°, dacă una dintre diagonalele lui este de 9 cm și coincide cu o înălțime.

16. Aria unui paralelogram cu înălțimile de 8 cm și 6 cm este egală cu 72 cm^2. Aflați perimetrul paralelogramului.

17. Punctul E este mijlocul laturii BC a paralelogramului $ABCD$ cu aria de 104 cm^2. Aflați aria triunghiului ABE.

18. Aflați aria discului mărginit de un cerc cu lungimea de 4π m.

Formăm capacitățile și aplicăm

19. Un poligon regulat cu n laturi are vârfurile pe un cerc cu raza de 4 cm. Calculați aria poligonului, dacă:
a) $n = 6$; b) $n = 8$; c) $n = 10$.

20. Aflați perimetrul și aria pătratului cu diagonalele de:
a) $12\sqrt{2}$ cm; b) 18 cm; c) $a\sqrt{2}$ cm; d) x cm.

21. De câte ori se va mări aria pătratului, dacă latura lui se va mări:
a) de 3 ori; b) de 7 ori; c) de n ori?

22. De câte ori se va micșora diagonala pătratului, dacă aria lui se va micșora:
a) de 4 ori; b) de 10 ori; c) de $(\sqrt{11} - 4)^2$ ori?

23. ***Lucrați în perechi!*** De câte ori se va mări aria dreptunghiului, dacă:
a) o latură a lui se va mări de 4 ori;
b) fiecare latură se va mări de 5 ori;
c) o latură se va mări de 8 ori, iar alta se va micșora de 3 ori?

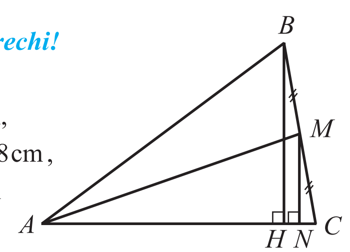
24. Aflați aria trapezului isoscel $ABCD$ cu înălțimea BH de 7 cm, dacă punctul H împarte baza AD în două segmente, cel mai lung fiind de 9 cm.

25. Aflați aria unui trapez dreptunghic cu bazele de 12 cm și 9 cm, iar latura laterală de 6 cm.

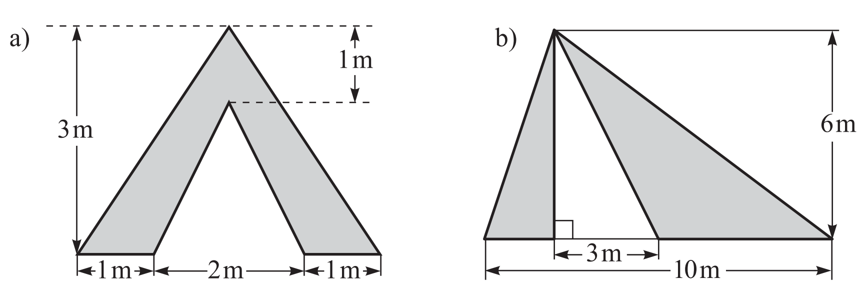
26. Vârfurile unui trapez se află pe un cerc cu raza de 13 cm și centrul pe baza trapezului. Aflați aria trapezului, dacă înălțimea lui este de 12 cm.

27. O diagonală a rombului a fost mărită cu 40%, alta – cu 20%. Cu câte procente s-a mărit aria rombului?

28. ***Lucrați în perechi!***
Examinați desenul.
Știind că $AB = 20$ cm, $BH = 12$ cm, $AM = 18$ cm, aflați aria triunghiului ABC.



29. ***Investigați!***
Pentru 1 m^2 de suprafață se utilizează 100 g de vopsea. De câtă vopsea vom avea nevoie pentru a acoperi fiecare suprafață?



30. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctul K situat pe dreapta AD, astfel încât $AD = DK$. Aflați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $\mathcal{A}_{BDK} = 24\text{ cm}^2$.

31. Aflați aria triunghiului dreptunghic, ştiind că suma lungimilor catetelor este egală cu 11 cm, iar suma pătratelor lor este egală cu 61 cm^2.

32. Calculați aria unui trapez cu diagonalele de 113 cm şi 17 cm, iar înălțimea de 15 cm.

33. Calculați raza unui disc, ştiind că aria lui este egală cu suma ariilor a două discuri cu razele de 5 cm şi 12 cm.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

34. Diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ intersectează înălțimea BE în punctul O, astfel încât $\frac{BO}{OE} = \frac{5}{3}$. Aflați aria patrulaterului $BEDC$, dacă aria paralelogramului $ABCD$ este de 100 cm^2.

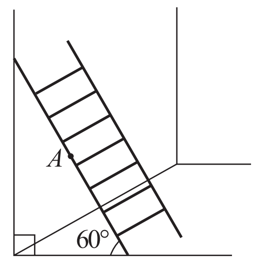
35. Punctul E aparține laturii AD a dreptunghiului $ABCD$, astfel încât $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$. Determinați aria patrulaterului $BEDC$, dacă aria dreptunghiului $ABCD$ este S.

36. Centrul cercului înscris în triunghiul isoscel ABC cu baza AC împarte înălțimea BM în raportul $\frac{17}{15}$. Aflați perimetrul şi aria triunghiului, dacă raza cercului este de 7,5 cm.

37. Aflați aria trapezului cu bazele de 7 cm şi 20 cm şi diagonalele de 13 cm şi $5\sqrt{10}$ cm.

38. Determinați mulțimea punctelor M din interiorul triunghiului ABC isoscel cu baza AC, ştiind că $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{BCM}$.

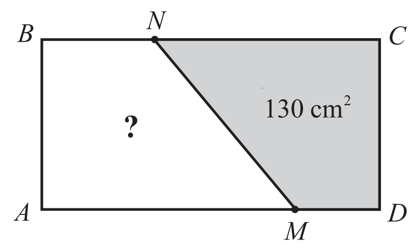
39. O scară se sprijină de un perete vertical sub un unghi de 60° față de podea. Scara alunecă de-a lungul peretelui până atinge cu capetele de sus podeaua. Aflați lungimea traiectoriei descrise de punctul A, aflat la jumătatea scării (vedeți desenul), dacă lungimea scării este egală cu 6 m.



40. Determinați aria unui trapez cu bazele de 2 cm şi 3 cm, iar diagonalele de 3 cm şi 4 cm.

41. Bisectoarea unghiului drept al unui triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în raportul 3 : 4. Aflați aria triunghiului, dacă lungimea ipotenuzei este de 35 cm.

42. Punctele M şi N se află pe laturile AD şi BC ale dreptunghiului $ABCD$ (vedeți desenul), astfel încât $\frac{DM}{AM} = 0{,}25$, $\frac{CN}{BN} = 2$. Aflați $\mathcal{A}_{ABNM}$, dacă $\mathcal{A}_{DMNC} = 130\text{ cm}^2$.



43. Fie punctele $A(-2,\ -5)$, $B(6,\ 7)$, $C(4,\ -9)$. Aflați:
a) aria triunghiului ABC;
b) coordonatele punctului D, dacă $ABCD$ este dreptunghi;
c) aria dreptunghiului $ABCD$.

44. Într-un trapez isoscel este înscris un cerc de rază r.
Determinați aria trapezului, dacă baza mare este de 2 ori mai lungă decât baza mică.

45. *Lucrați în grup!* Construiți 4 triunghiuri necongruente echivalente.

46. Împărțiți un triunghi în 5 triunghiuri echivalente.

47. *Lucrați în grup!* **Proiect STREAM.** *Ariile în arte.*

48. *Lucrați individual!* **Proiect.** *Ariile în viața mea.*

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Test sumativ

Varianta I

1. Completați:

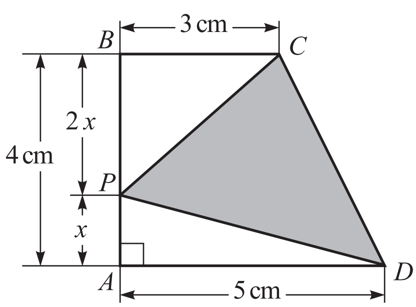
a) Aria dreptunghiului cu laturile de 4 cm şi 8 cm este egală cu ______ .

b) Aria triunghiului dreptunghic având catetele de 6 cm şi 11 cm este egală cu ______ .

c) Aria paralelogramului cu o latură de 18 cm şi înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 5 cm este egală cu ______ .

d) Aria rombului cu diagonalele de 13 cm şi 9 cm este egală cu ______ .

2. *ABCD* este un trapez dreptunghic.



a) Determinați aria trapezului *ABCD*.

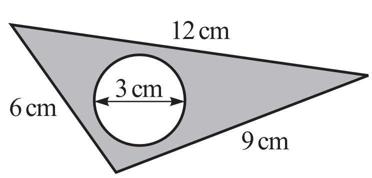
b) Aflați *AP*.

c) Aflați aria domeniului colorat.

3. Examinați desenul. Determinați:

a) aria discului;

b) aria domeniului colorat.



4. Fie punctele $A(-7, 2)$, $B(-3, 10)$, $C(9, 4)$. Aflați:

a) aria triunghiului *ABC*;

b) coordonatele punctului *D*, dacă *ABCD* este dreptunghi;

c) aria dreptunghiului *ABCD*.

Varianta II

1. Completați:

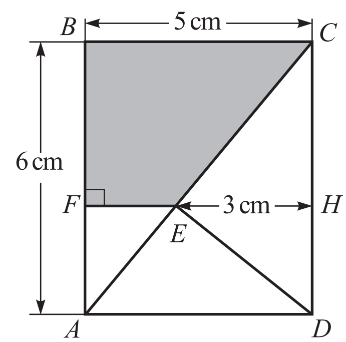
a) Aria dreptunghiului cu laturile de 5 cm şi 7 cm este egală cu ______ .

b) Aria triunghiului dreptunghic având catetele de 14 cm şi 4 cm este egală cu ______ .

c) Aria paralelogramului cu o latură de 12 cm şi înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 6 cm este egală cu ______ .

d) Aria rombului cu diagonalele de 11 cm şi 8 cm este egală cu ______ .

2. *ABCD* este un dreptunghi.



a) Determinați *BF*.

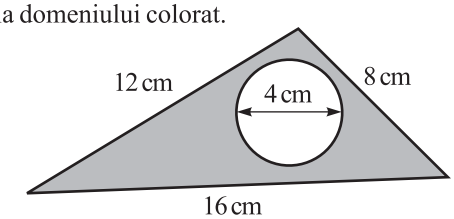
b) Aflați aria domeniului colorat.

c) Aflați aria triunghiului *AED*.

3. Examinați desenul. Determinați:

a) aria discului;

b) aria domeniului colorat.



4. Fie punctele $A(-10, 4)$, $B(2, 10)$, $C(6, 2)$. Aflați:

a) aria triunghiului *ABC*;

b) coordonatele punctului *D*, dacă *ABCD* este dreptunghi;

c) aria dreptunghiului *ABCD*.

Capitolul 3

Poliedre

Unde este materie, este geometrie.
Johannes Kepler

§ 1. Poliedre

1 Examinați suprafața fiecărui obiect din figura 1.

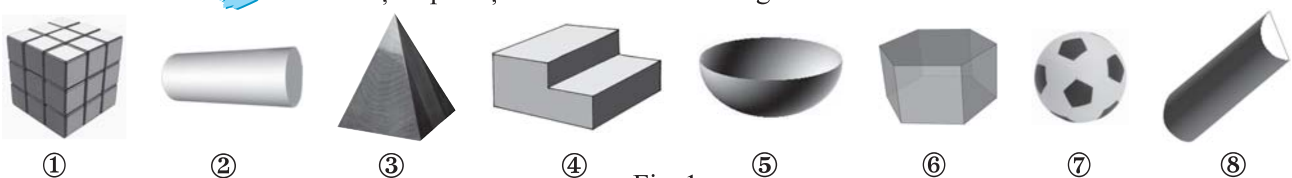


Fig. 1

a) Selectați obiectele mărginite doar de suprafețe poligonale.
b) Numiți corpurile geometrice studiate, ale căror modele reale se regăsesc în imaginile date.
c) Care dintre corpurile geometrice studiate au fețe, muchii, vârfuri?

Definiție

♦ **Poliedrul** este un corp geometric mărginit doar de suprafețe poligonale.
Suprafețele poligonale ale poliedrului se numesc **fețe**, laturile fețelor – **muchii**, iar vârfurile muchiilor – **vârfuri** ale poliedrului.

♦ Segmentul cu extremitățile-vârfuri a două fețe diferite se numește **diagonală** a poliedrului.

Observație Uneori vom numi fața poliedrului cu numele poligonului care mărginește această față.

Aplicăm Fie cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 2). DD_1C_1C este o față, $[AA_1]$ – o muchie, D – un vârf, iar $[B_1D]$ – o diagonală a cubului.

- Numiți toate celelalte elemente ale cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

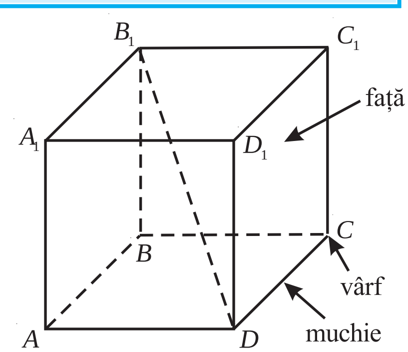


Fig. 2

2 **Cum reprezentăm corect un cub?**

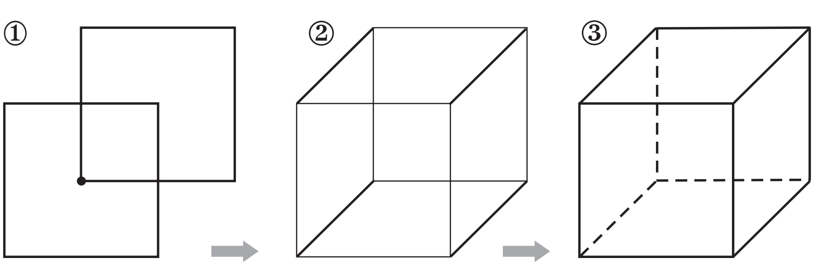


Fig. 3

① Construim un pătrat, apoi din centrul lui spre dreapta-sus construim un alt pătrat, congruent cu primul (fig. 3).

② Unim vârfurile omoloage ale celor două pătrate.

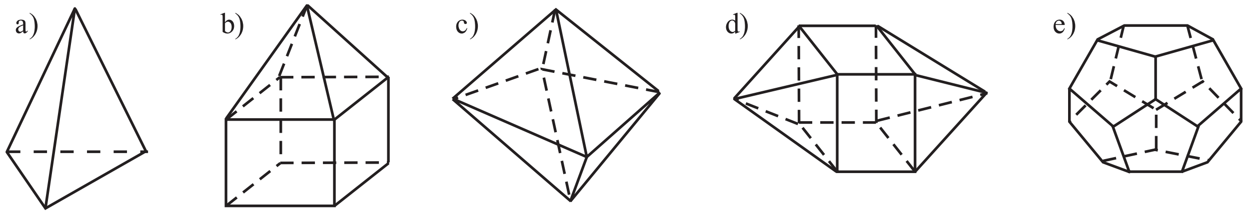
③ „Întrerupem” muchiile care nu se văd în spațiu.

- Amintiți-vă cum se calculează aria suprafeței şi volumul cubului, apoi aflați aria suprafeței şi volumul unui cub cu muchia de 6 cm.

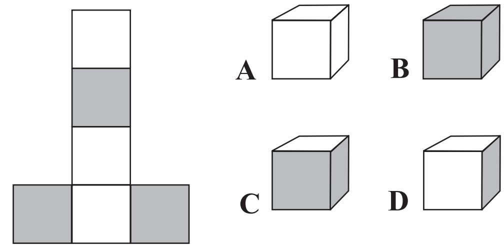
Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Examinați imaginile și aflați câte fețe are fiecare poliedru:



2. *Investigați!* Câte diagonale are fiecare poliedru din imaginile problemei **1**?



3. Care dintre cuburile date pot avea desfășurarea reprezentată?
Selectați varianta corectă de răspuns:
a) **A** și **B**; b) **C** și **D**; c) **A** și **D**; d) **B** și **D**.

4. Determinați aria totală și volumul unui cub cu latura de 3 cm.

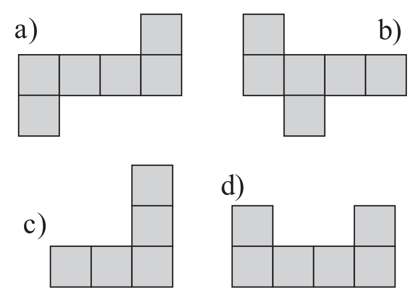
5. Aflați volumul și aria totală a unui cub care are suma lungimilor muchiilor egală cu 48 cm.

6. *Lucrați în perechi!* Determinați aria totală și volumul unui cub cu diagonala de $2\sqrt{3}$ cm.

Formăm capacitățile și aplicăm

7. O canistră are forma unui cub cu muchia de 30 cm. Care este capacitatea canistrei, măsurată în litri?

8. *Investigați!* Mihai dorește să facă o cutie de forma unui cub, dar fără capac, însă fundul cutiei să fie dublu. Care este desfășurarea potrivită? Selectați varianta corectă de răspuns.



9. Volumul unui cub este de 125 cm³. Determinați aria totală a cubului.

10. Aflați volumul unui cub cu aria totală de 24 cm².

11. *Lucrați în perechi!* Cât cântărește un cub de gheață cu muchia de 20 cm, dacă 1 dm³ de gheață cântărește 0,9 kg?

12. Suma ariilor fețelor unui cub este egală cu 216 cm². Aflați lungimea diagonalei cubului.

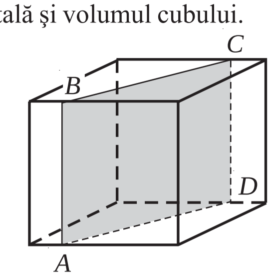
Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Aflați aria totală a unui cub cu diagonala mai lungă cu 1 cm decât muchia lui.

14. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm. Aflați:
a) distanța de la D' la B; b) distanța de la D' la AB.

15. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctul P este mijlocul lui $[C'D']$ și $AP = 8\sqrt{7}$ cm. Aflați aria totală și volumul cubului.

16. *Investigați!* Un plan intersectează un cub în punctele A, B, C, D, care determină un dreptunghi. Reprezentați similar cum trebuie un plan să intersecteze cubul pentru ca să determine:
a) un triunghi echilateral; b) un hexagon regulat; c) un trapez isoscel.



17. Un cub este format din 27 de cuburi mai mici identice. Comparați aria totală a cubului mare cu aria corpului care se obține din cubul mare înlăturând toate cuburile mici de la vârfurile cubului mare.

33. *Lucrați în grup!* **Proiect STEAM.** *Poliedre în jurul nostru.*

§ 2. Prisma

1 Doru Visătoru visează să-şi construiască o casă mare cu piscină. Fundul piscinei va avea forma unui dreptunghi cu dimensiunile de 10 m şi 5 m. Care va fi capacitatea piscinei, dacă adâncimea ei va fi de 2 m?

Pentru a rezolva problema, vom studia *prismele* – o clasă specială de poliedre.

Studiați atent paragraful şi spuneți ce corp geometric sugerează piscina lui Doru.

2.1. Elementele prismei. Clasificarea prismelor

Amintim că două ***plane*** se numesc ***paralele*** dacă ele nu au niciun punct comun.

Definiții

- **Prisma** este un poliedru format din două fețe congruente paralele, numite **baze**, şi din toate segmentele cu extremitățile aparținând acestor baze. Celelalte fețe ale prismei se numesc **fețe laterale**. Laturile fețelor laterale se numesc **muchii laterale** ale prismei.
- Mulțimea punctelor prismei care nu aparțin bazelor şi nici fețelor laterale se numeşte **interiorul prismei**.

De regulă, notând prisma, scriem la început literele vârfurilor bazei inferioare, apoi literele vârfurilor bazei superioare.

Exemplu

Prisma din figura 4 poate fi notată $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

$A_1B_1C_1D_1E_1$ este o bază, EE_1D_1D – o față laterală, iar $[EE_1]$ – o muchie laterală a acestei prisme.

- Câte muchii are prisma din figura 4? Dar diagonale?

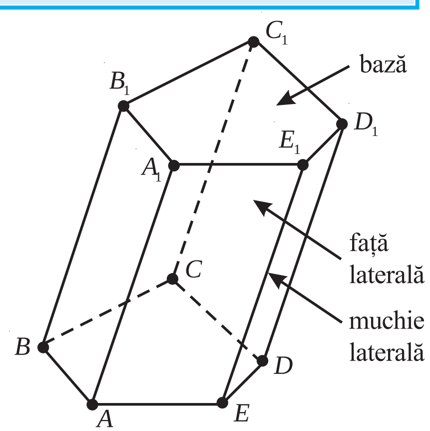


Fig. 4

Luând în considerație definiția prismei, se poate demonstra

Teorema 1 Laturile omoloage ale bazelor prismei sunt paralele şi congruente.

Astfel, în cazul prismei din figura 4, $AE \parallel A_1E_1$ şi $[AE] \equiv [A_1E_1]$, $AB \parallel A_1B_1$ şi $[AB] \equiv [A_1B_1]$ etc.

- Utilizând teorema 1 şi criteriile paralelogramului, demonstrați teoremele 2 şi 3.

Teorema 2 Fețele laterale ale prismei sunt paralelograme.

Teorema 3 Muchiile laterale ale prismei sunt paralele şi congruente.

Definiție O **dreaptă este perpendiculară pe un plan** dacă ea este perpendiculară pe două drepte concurente ale acestui plan (fig. 5).

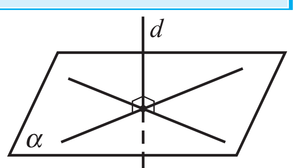


Fig. 5

Orice segment cu extremitățile în planele bazelor prismei, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălțime*** a prismei. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălțime***.

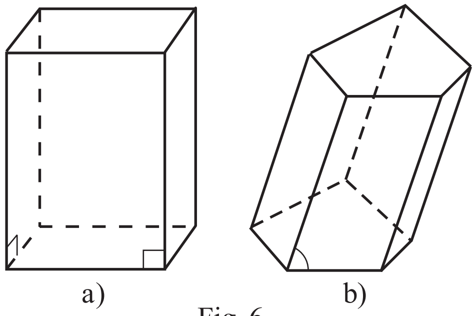


Fig. 6

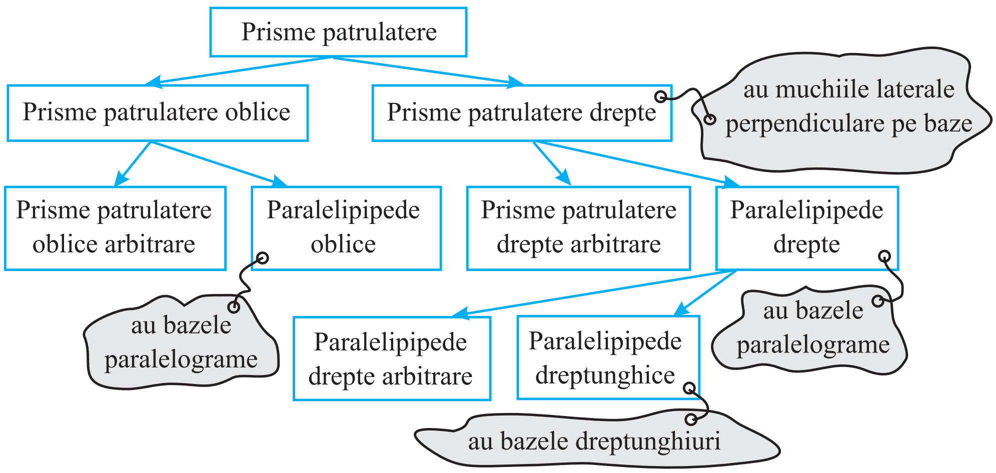
Dacă muchiile laterale ale prismei sunt perpendiculare pe planele bazelor, atunci prisma se numeşte ***prismă dreaptă*** (fig. 6 a)), în caz contrar – ***prismă oblică*** (fig. 6 b)). Observăm că feţele laterale ale prismei drepte sunt dreptunghiuri, iar muchiile ei laterale – înălţimi ale acesteia.

Prisma dreaptă cu bazele poligoane regulate se numeşte ***prismă regulată***.

Prismele se clasifică după poligoanele bazelor: *triunghiulare*, *patrulatere*, *pentagonale*, *hexagonale* etc.

În figura 6 b) este reprezentată o prismă pentagonală oblică.

2 Examinaţi schema şi observaţi cum se clasifică prismele patrulatere.



- În care clasă de prisme patrulatere se includ prismele patrulatere regulate? Justificaţi.

Aplicăm

3 Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu $AA' = 10$ cm, $AD = 8$ cm, $DC = 6$ cm (fig. 7). Aflaţi A_1C.

Rezolvare:

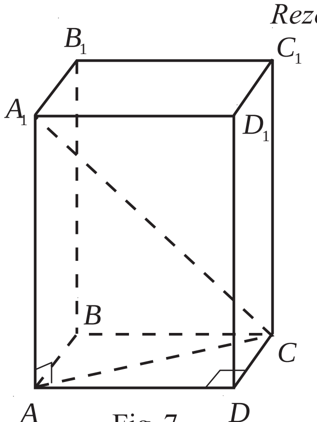


Fig. 7

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (1), → deoarece $[AC]$ este diagonala dreptunghiului $ABCD$.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2$ (2), → deoarece ΔA_1AC este dreptunghic în vârful A.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AD^2 + DC^2$. → substituim (1) în (2).

Deci,

$A_1A = \sqrt{10^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{200} =$ → $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

$= 10\sqrt{2}$ (cm).

Răspuns: $10\sqrt{2}$ cm.

Teorema 4 (Teorema lui Pitagora în spaţiu)

Pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni liniare ale acestuia:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (fig. 8).}$$

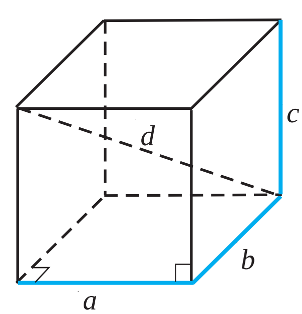


Fig. 8

2.2. Aria laterală, aria totală și volumul prismei

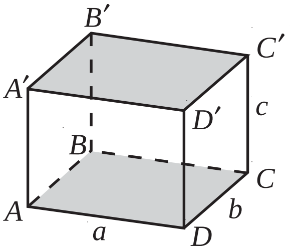


Fig. 9

4 a) Reprezentați desfășurarea paralelipipedului dreptunghic din figura 9.

b) Determinați aria suprafeței laterale și aria suprafeței totale a paralelipipedului.

Rezolvare:

a) În figura 10 este reprezentată desfășurarea paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$.

b) Fie $\mathcal{A}_l$ aria suprafeței laterale, iar $\mathcal{A}_t$ aria totală a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$.

$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{AA'D'D} + \mathcal{A}_{DD'C'C} + \mathcal{A}_{CC'B'B} + \mathcal{A}_{BB'A'A} = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = 2c(a+b).$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{A'B'C'D'} = \mathcal{A}_l + ab + ab = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab).$

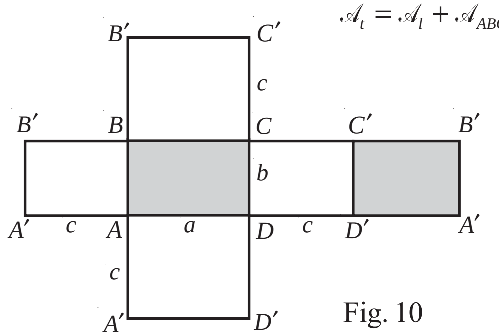


Fig. 10

Reuniunea fețelor laterale ale prismei se numește ***suprafață laterală*** a prismei.

Aria suprafeței laterale a prismei se numește ***arie laterală*** a prismei și se notează cu $\mathcal{A}_l$.

Aria unei baze a prismei se notează cu $\mathcal{A}_b$.

Aria totală a prismei este suma dintre aria laterală și ariile bazelor ei și se notează $\mathcal{A}_t$.

Teorema 5

Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c este $\mathcal{A}_t = 2(ab + ac + bc)$ (fig. 8).

Atelier

Confecționați din carton o prismă regulată hexagonală cu muchiile laterale de 9 cm și laturile bazei de 5 cm.

Teorema 6

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei și înălțimea prismei (sau lungimea muchiei laterale).

Să demonstrăm teorema 6.

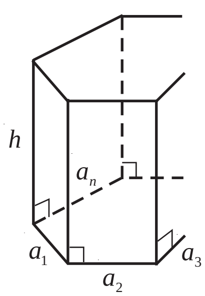


Fig. 11

Ipoteză: Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ laturile bazei unei prisme drepte, iar h – înălțimea prismei (fig. 11).

Concluzie: $\mathcal{A}_l = P \cdot h$, unde $P = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Demonstrație:

① Fețele laterale ale unei prisme drepte sunt dreptunghiuri.

② $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + ... + \mathcal{A}_n$, unde $\mathcal{A}_i$ este aria feței cu dimensiunile a_i și h, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

③ $\mathcal{A}_i = a_i \cdot h$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (conform ① și ②).

④ Substituind ③ în ②, obținem: $\mathcal{A}_l = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + ... + a_n \cdot h$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$\mathcal{A}_l = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot h = P \cdot h$ (c.c.t.d.). ▶

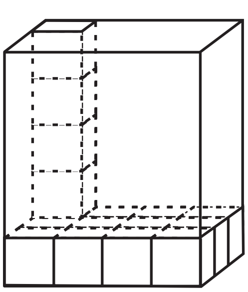


Fig. 12

5 Calculați volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 5$ cm.

Rezolvare:

Baza paralelipipedului cuprinde $4 \cdot 3 = 12$ (pătrate), fiecare dintre ele cu aria de 1 cm^2 (fig. 12). Pe fiecare pătrat se poate așeza câte un cub cu muchia de 1 cm. Astfel, baza paralelipipedului va cuprinde 12 cuburi. Întrucât înălțimea acestui strat este de 1 cm, iar înălțimea paralelipipedului – de 5 cm, în paralelipiped încap 5 straturi. Prin urmare, volumul paralelipipedului dreptunghic este: $12 \cdot 5 = 60$ (cm^3).

Răspuns: 60 cm^3.

Generalizând rezultatul problemei, obținem

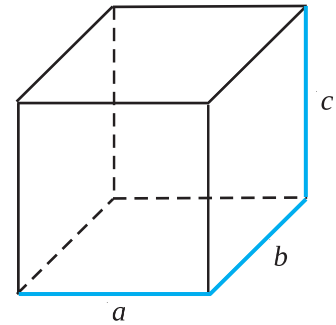


Fig. 13

Teorema 7 Volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu produsul celor trei dimensiuni liniare ale acestuia: $\mathcal{V} = abc$ (fig. 13).

Cum baza paralelipipedului dreptunghic este un dreptunghi, formula din teorema 7 poate fi rescrisă astfel:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot c \quad (*),$$

unde $\mathcal{A}_b = a \cdot b$ este aria bazei paralelipipedului.

Mai mult chiar, se poate demonstra că formula (∗) este adevărată pentru orice prismă. Prin urmare, are loc

Teorema 8 Volumul prismei este egal cu produsul dintre aria bazei și înălțimea prismei.

Aplicăm

6 O prismă dreaptă are bazele paralelograme cu o latură de 6 cm și înălțimea dusă pe această latură de 4 cm. Înălțimea prismei este de 14 cm. Aflați volumul prismei.

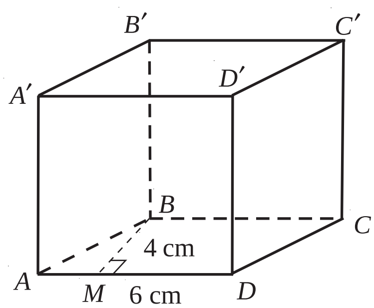


Fig. 14

Rezolvare:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ prisma dată (fig. 14).

Atunci $\mathcal{V}_{pr.} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h$, unde h este înălțimea prismei.

$\mathcal{A}_{ABCD} = BM \cdot AD = 6 \cdot 4 = 24$ (cm^2).

$\mathcal{V}_{pr.} = 24 \cdot 14 = 336$ (cm^3).

Răspuns: 336 cm^3.

7 Rezolvarea problemei **1** (de la începutul paragrafului):

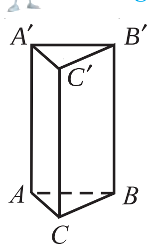
Capacitatea piscinei este egală cu volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 5 m, 10 m și 2 m. Deci, $\mathcal{V} = 5\text{ m} \cdot 10\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 100\text{ m}^3$.

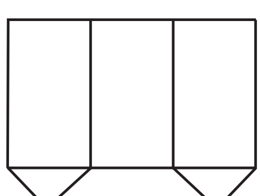
Răspuns: 100 m^3.

Exerciții și probleme

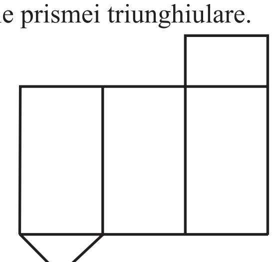
Fixăm cunoștințele

1. ***Investigați!*** Recunoașteți desfășurările corecte ale prismei triunghiulare.

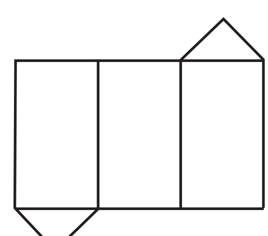




a)



b)



c)

2. ***Lucrați în perechi!*** Ilustrați desfășurarea unei prisme triunghiulare regulate cu:

a) latura bazei de 2 cm și înălțimea de 4 cm; b) latura bazei de 3 cm și înălțimea de 2 cm.

3. Copiați tabelul și completați cu *Da* doar dacă corpul geometric are proprietatea respectivă.

	Prisma patrulateră (arbitrară)	Prisma patrulateră dreaptă	Prisma patrulateră regulată	Paraleli-piped (arbitrar)	Paraleli-piped drept (arbitrar)	Paralelipiped dreptunghic	Cub
Are bazele patrulatere	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Da
Are muchiile laterale perpendiculare pe baze		Da			Da		
Are bazele paralelograme							
Are bazele dreptunghiuri							
Are fețele laterale paralelograme							
Are bazele pătrate							
Are fețele laterale pătrate							

4. Aflați aria totală și volumul unui paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 6 cm, 7 cm și înălțimea de 5 cm.

5. Determinați aria laterală, aria totală și lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 8 cm, aria bazei de 40 cm^2 și volumul de 240 cm^3.

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Aflați aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 4 cm, aria bazei de 24 cm^2 și volumul egal cu 168 cm^3.

7. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este de 40 cm, iar aria lui laterală – de 400 cm^2. Determinați volumul paralelipipedului, știind că lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decât lățimea ei.

8. Un paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 3 cm și 5 cm are volumul de 90 cm^3. Aflați aria laterală și aria totală a paralelipipedului.

9. Determinați aria laterală și volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 6 cm și înălțimea de 7 cm.

10. Volumul unei prisme triunghiulare regulate este de 36 cm^3. Aflați aria laterală și aria totală a prismei, dacă latura bazei este de 4 cm.

11. Toate muchiile unei prisme triunghiulare drepte au lungimea egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Aflați volumul prismei.

12. *Lucrați în perechi!* O prismă triunghiulară regulată are aria bazei de $16\sqrt{3}$ cm^2. Aflați aria totală și volumul prismei, dacă se știe că înălțimea prismei este de două ori mai mică decât lungimea laturii bazei.

13. Știind că latura bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 3 cm și aria laterală de 45 cm^2, aflați volumul acestei prisme.

14. Perimetrul bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 15 cm. Determinați aria totală și volumul prismei, dacă înălțimea prismei este de 7 cm.

15. Diagonalele a 3 fețe diferite ale unui paralelipiped dreptunghic au lungimile egale respectiv cu 1 cm, 2 cm, 3 cm. Aflați lungimea diagonalei paralelipipedului.

16. Determinați aria laterală, aria totală și volumul unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 4 cm și înălțimea de 7 cm.

17. Determinați volumul unei prisme patrulatere regulate cu aria bazei de 25 cm^2 și aria laterală de 160 cm^2.

18. O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 6 cm și volumul de 432 cm^3. Determinați aria laterală și aria totală a prismei.

19. O bară metalică are forma unei prisme triunghiulare regulate cu lungimea laturii bazei de 10 cm și înălțimea de 1 m. Determinați masa barei, știind că densitatea metalului este de 7 600 kg/m^3.

20. Diagonala feței laterale a unei prisme patrulatere regulate este de 13 cm. Știind că aria bazei este de 25 cm^2, determinați volumul și aria totală a prismei.

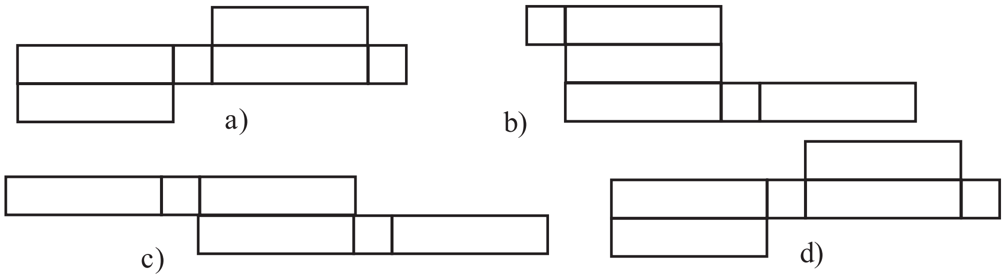
21. Volumul unei prisme patrulatere regulate este de 128 cm^3, iar înălțimea ei – de 8 cm. Determinați aria laterală și aria totală a prismei.

22. Latura bazei unei prisme hexagonale regulate este de 3 cm, iar înălțimea prismei – de 5 cm. Aflați aria laterală, aria totală și volumul prismei.

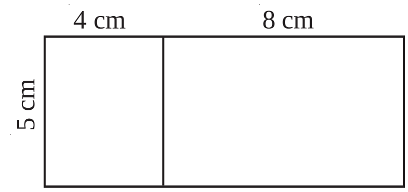
23. Determinați aria totală a unei prisme hexagonale regulate cu aria bazei de $54\sqrt{3}$ cm^2 și volumul de 324 cm^3.

24. Aflați volumul unei prisme hexagonale regulate cu înălțimea de 5 cm și aria laterală de 120 cm^2.

25. ***Investigați!*** Care din următoarele imagini nu poate fi desfăşurarea unui paralelipiped dreptunghic?



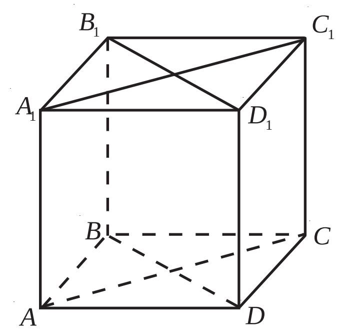
26. În imagine sunt reprezentate doar două fețe din desfăşurarea unui paralelipiped dreptunghic. Aflați volumul paralelipipedului.



27. Diagonalele fețelor unui paralelipiped dreptunghic au lungimile de $\sqrt{41}$ cm, $4\sqrt{26}$ cm şi respectiv $5\sqrt{17}$ cm. Aflați volumul paralelipipedului.

28. Perimetrul bazei unei prisme hexagonale regulate este de 18 cm, iar aria ei laterală – de $162\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Calculați volumul acestei prisme.

29. ***Lucrați în perechi!*** Fie prisma dreaptă $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (vezi desenul). Aflați aria ei laterală dacă $\mathcal{A}_{AA_1C_1C} = 3\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_{BB_1D_1D} = 4\ \text{cm}^2$, dacă $ABCD$ este romb.



30. Aflați aria laterală şi aria totală a unei pisme hexagonale regulate cu latura bazei de 2 cm şi volumul de $60\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

31. Fețele unui paralelipiped dreptunghic au ariile respectiv egale cu $6\ \text{m}^2$, $6\ \text{m}^2$ şi $4\ \text{m}^2$. Aflați volumul paralelipipedului.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

32. Un bidon de forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile de 10 cm, 15 cm şi 20 cm, este plin cu apă. El se goleşte într-un vas cubic cu muchia de 50 cm. Până la ce înălțime se ridică apa?

33. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 2, 3, 5 şi volumul de 240 cm^3. Aflați:
a) diagonala paralelipipedului; b) aria totală a paralelipipedului.

34. O cutie are forma unui paralelipiped dreptunghic, notat $ABCDA'B'C'D'$. O furnică porneşte din punctul A şi merge pe suprafața laterală a cutiei până în punctul C' pe drumul cel mai scurt. Ştiind că $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm şi $AA' = 12\sqrt{3}$ cm, aflați:
a) aria laterală, aria totală şi volumul paralelipipedului; b) lungimea drumului.

35. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 8$ cm şi diagonala feței laterale de 10 cm. Calculați aria totală a prismei şi volumul ei.

36. (*EG, 2021) O canistră are forma unui cub cu diagonala de $\sqrt{3}$ dm. Determinați capacitatea în dm^3 a canistrei.

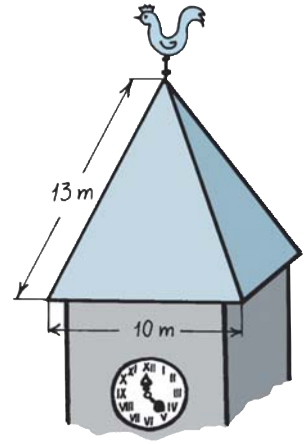
37. (*EG, 2016) O piscină are forma unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 4 m şi înălțimea de 2 m. Pentru a placa cu gresie pereții şi fundul piscinei se foloseşte adeziv. Cu adezivul dintr-un sac pot fi montați 4 m^2 de gresie. Determinați numărul de saci cu adeziv necesari pentru a placa cu gresie piscina.

38. Pe o masă sunt 3 cuburi. Muchiile a două dintre ele sunt de 5 cm şi 12 cm. Determinați lungimea muchiei celui de-al treilea cub, dacă se ştie că pentru a vopsi suprafața celui de-al treilea cub se folosețte aceiaşi cantitate de vopsea câtă ar fi necesară pentru a vopsi suprafața celorlalte 2 cuburi.

39. (*EG, 2019) O piesă metalică în formă de paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 4 cm, 6 cm şi 9 cm a fost topită şi transformată într-un cub. Determinați lungimea muchiei cubului.

§ 3. Piramida. Trunchiul de piramidă

1 Acoperişul unui turn are forma unei piramide patrulatere cu laturile bazei de 10 m şi muchiile laterale congruente de 13 m. Câte cutii cu vopsea sunt necesare pentru acest acoperiş, dacă o cutie ajunge pentru o suprafaţă de 10 m^2?
Pentru a rezolva problema, vom studia o altă clasă specială de poliedre, numite *piramide*.



3.1. Elementele piramidei. Clasificarea piramidelor

Definiţie

Piramida este un poliedru format dintr-o suprafaţă poligonală, numită **baza piramidei**, un punct care nu aparţine bazei, numit **vârful piramidei**, şi toate segmentele cu o extremitate în vârful piramidei, iar cealaltă aparţinând bazei.

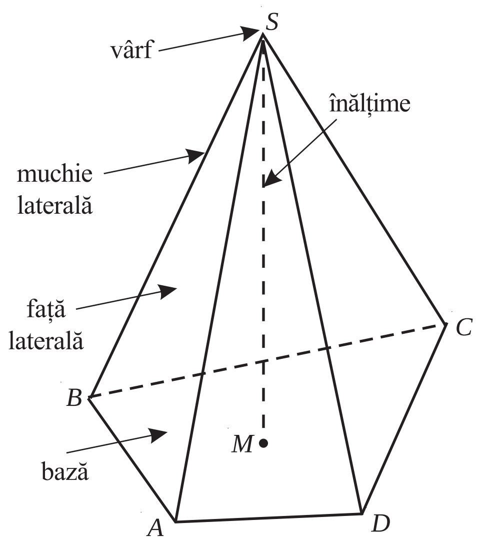


Fig. 15

Segmentul cu o extremitate în vârful piramidei, cealaltă aparţinând planului bazei şi perpendicular pe această bază se numeşte ***înălţime*** a piramidei. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălţime*** a piramidei.

Feţele laterale ale piramidei sunt triunghiuri cu un vârf în vârful piramidei. Segmentele ce unesc vârful piramidei cu vârfurile bazei se numesc ***muchii laterale*** ale piramidei.

Mulţimea punctelor piramidei care nu aparţin bazei şi nici feţelor laterale se numeşte ***interiorul piramidei***.

De regulă, notând piramida, scriem la început litera de la vârful piramidei, apoi literele vârfurilor bazei acesteia.

Exemplu

Piramida din figura 15 poate fi notată $SABCD$.

$ABCD$ este baza, S – vârful, ABS – o faţă laterală, $[SB]$ – o muchie a acestei piramide.

Dacă $[SM]$ este perpendicular pe bază, atunci $[SM]$ este înălţimea piramidei $SABCD$.

Piramidele se clasifică după poligoanele bazei: *piramide triunghiulare* (*tetraedre*), *patrulatere*, *pentagonale*, *hexagonale*, *heptagonale* etc.

Definiţie

O piramidă se numeşte **regulată**, dacă baza ei este un poligon regulat, iar baza înălţimii coincide cu centrul acestui poligon.

• Utilizând teorema lui Pitagora şi congruenţa triunghiurilor, demonstraţi

Teorema 9

Muchiile laterale ale unei piramide regulate sunt congruente.

Înălţimea unei feţe laterale trasată din vârful piramidei regulate se numeşte ***apotemă*** a acestei piramide.

• În pofida faptului că piramidele triunghiulare se mai numesc ***tetraedre***, termenul *tetraedru regulat* nu se utilizează în cazul oricărei piramide triunghiulare regulate.

Definiție Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numește **tetraedru regulat**.

- Formulați câteva caracteristici sau proprietăți ale tetraedrului regulat.

Exemplu

Fețele tetraedrului regulat sunt triunghiuri echilaterale congruente.

2 **Cum reprezentăm corect o piramidă?**

① Construim cu rigla și creionul baza piramidei (fig. 16).

② Construim vârful piramidei. În cazul piramidei regulate, găsim centrul bazei, apoi, pe verticala construită din acest punct, marcăm vârful piramidei.

③ Unim vârful piramidei cu vârfurile bazei.

④ „Întrerupem” muchiile care nu se văd în spațiu și ștergem liniile auxiliare.

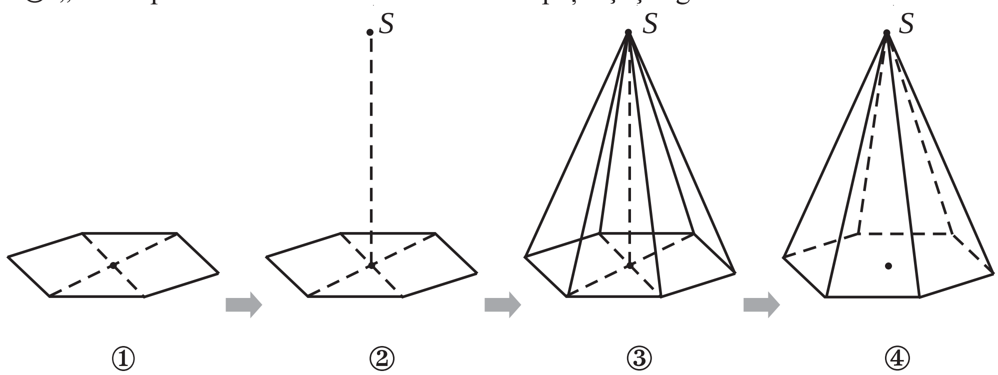


Fig. 16

3.2. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei

3 a) În figura 17 este reprezentată piramida regulată $SABCD$. Construiți schematic desfășurarea ei.

b) Determinați aria laterală a piramidei $SABCD$, dacă latura bazei este a, iar apotema piramidei este l.

Rezolvare:

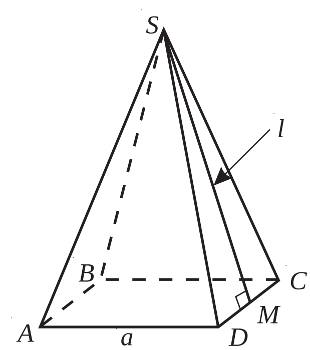


Fig. 17

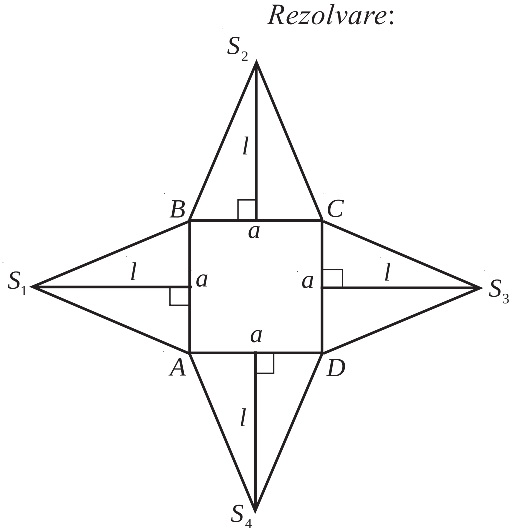


Fig. 18

a) În figura 18 este reprezentată desfășurarea piramidei $SABCD$.

Evident, triunghiurile AS_1B, BS_2C, CS_3D, DS_4A sunt triunghiuri isoscele și congruente între ele.

b) Aria laterală ($\mathcal{A}_l$) a piramidei este egală cu suma ariilor triunghiurilor isoscele din figura 18.

$$\mathcal{A}_{AS_1B} = \frac{1}{2}a \cdot l.$$

Deci, $\mathcal{A}_l = 4 \cdot \frac{1}{2}al = 2al.$

Răspuns: $\mathcal{A}_l = 2al.$

Observație Deoarece $P=4a$ este egal cu perimetrul bazei piramidei, răspunsul problemei poate fi scris şi astfel: $\mathcal{A}_l=\frac{1}{2}P\cdot l$, unde P este perimetrul bazei piramidei.

Reuniunea fețelor laterale ale piramidei se numeşte ***suprafață laterală a piramidei***. Aria suprafeței laterale a piramidei se numeşte ***arie laterală*** a piramidei.
Aria totală a piramidei este suma dintre aria laterală şi aria bazei.

Teorema 10 Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu semiprodusul dintre perimetrul bazei şi apotema piramidei (fig. 19).

$$\mathcal{A}_l=\frac{1}{2}P\cdot l,$$

unde p este perimetrul bazei.

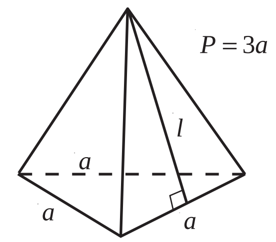


Fig. 19

Aplicăm

• ***Rezolvarea problemei*** **1**:

Pentru a afla suprafața acoperişului, trebuie să calculăm aria laterală a unei piramide patrulatere regulate $SABCD$ cu latura bazei de 10 m şi muchia laterală de 13 m (fig. 20).

Fie $[SM]$ apotema piramidei.

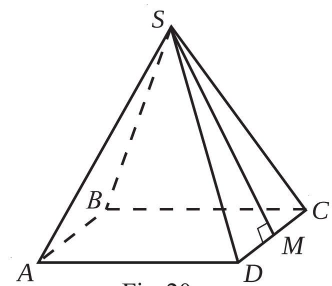


Fig. 20

$SM=\sqrt{SD^2-DM^2}$, → deoarece ΔSMD este dreptunghic în M.

$SM=\sqrt{13^2-5^2}=12\,(\text{m})$.

$\mathcal{A}_l=\frac{1}{2}P\cdot SM$, → P este perimetrul bazei.

$\mathcal{A}_l=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 12=240\,(\text{m}^2)$. → perimetrul bazei este egal cu 40 m.

$240:10=24$ (cutii).

Răspuns: 24 de cutii cu vopsea.

Lucrați în perechi!

a) Reprezentați un tetraedru regulat.
b) Desenați desfăşurarea acestui tetraedru ştiind că muchia lui este de 8 cm.
c) Aflați lungimea apotemei tetraedrului.
d) Calculați aria suprafeței totale a teraedrului.

4 Care este volumul piramidei examinate în problema **1**?
Pentru a afla răspunsul, vom examina mai întâi următoarea teoremă.

Teorema 11 Volumul piramidei este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei şi înălțimea piramidei.

Aplicăm

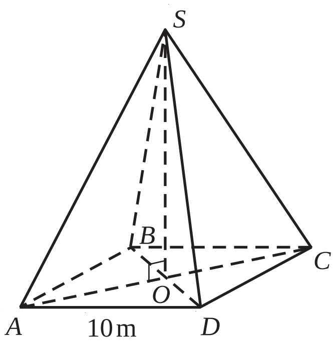


Fig. 21

• Rezolvarea problemei **4**:

Aflăm volumul piramidei patrulatere regulate *SABCD* (fig. 21) cu latura bazei de 10 m şi muchia de 13 m.

① Fie *O* punctul de intersecţie a diagonalelor bazei *ABCD*. Atunci [*SO*] este înălţimea piramidei *SABCD* — deoarece *SABCD* este o piramidă regulată.

② $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (m) — deoarece diagonala pătratului cu latura a este egală cu $a\sqrt{2}$.

③ $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{169-50} = \sqrt{119}$ (m) — deoarece [*SO*] este o catetă a triunghiului dreptunghic *SOA*.

④ $\mathcal{V}_{pir} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot SO = \frac{1}{3}\cdot 10^2 \cdot \sqrt{119} = \frac{100\sqrt{119}}{3}$ (m^3) — conform teoremei 11.

Răspuns: $\frac{100\sqrt{119}}{3}$ m^3.

3.3. Trunchiul de piramidă

Un plan care este paralel cu planul bazei piramidei şi intersectează piramida, o împarte în două poliedre – un ***trunchi de piramidă*** şi o piramidă mai mică.

Feţele paralele ale trunchiului de piramidă se numesc ***baze***.

Orice segment cu extremităţile aparţinând bazelor trunchiului de piramidă şi perpendicular pe ele se numeşte ***înălţime a trunchiului de piramidă***. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălţime***.

Bazele trunchiului de piramidă sunt poligoane asemenea. Feţele laterale sunt trapeze.

De regulă, notând trunchiul de piramidă, scriem la început literele bazei mari, apoi literele bazei mici.

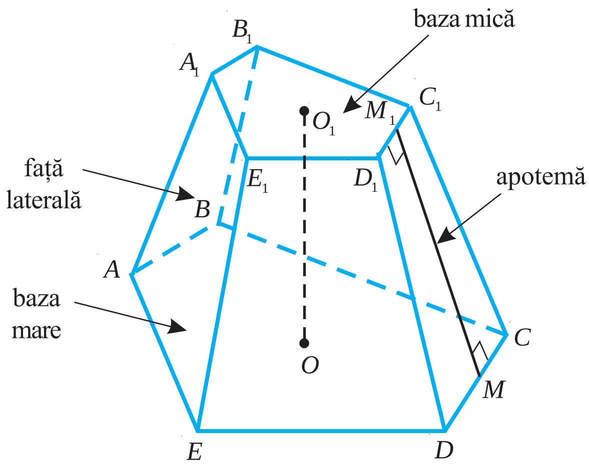


Fig. 22

De exemplu, trunchiul de piramidă din figura 22 poate fi notat $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

Poligoanele *ABCDE* şi $A_1B_1C_1D_1E_1$ sunt respectiv baza mare şi baza mică, AA_1E_1E – o faţă laterală.

Dacă $[OO_1]$ este perpendicular pe baze, atunci $[OO_1]$ este o înălţime a trunchiului de piramidă.

Trunchiul de piramidă regulată are bazele poligoane regulate. Feţele lui laterale sunt trapeze congruente.

Înălţimile feţelor laterale ale unui trunchi de piramidă regulată se numesc ***apotemele*** trunchiului de piramidă. De exemplu, $[MM_1]$ este o apotemă a acestui trunchi de piramidă (fig. 22).

Trunchiurile de piramidă se clasifică după poligoanele bazelor: *trunchiuri de piramide triunghiulare*, *patrulatere*, *pentagonale*, *hexagonale*, *heptagonale* etc.

Trunchiul de piramidă este desfăşurabil.

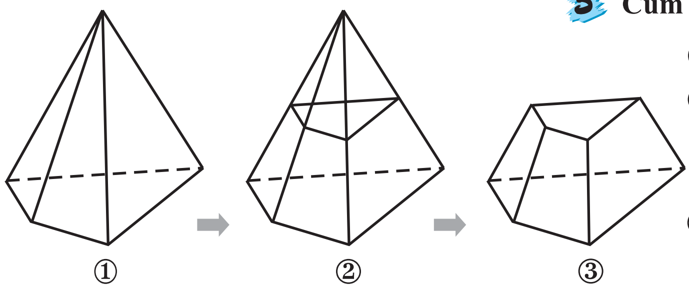


Fig. 23

5 Cum reprezentăm corect un trunchi de piramidă?

① Construim cu rigla şi creionul o piramidă (fig. 23).

② Marcăm pe o muchie laterală un punct şi din acel punct construim un poligon cu laturile respectiv paralele cu laturile bazelor piramidei.

③ Cu guma ştergem muchiile laterale ale piramidei mai mici.

Exerciţii şi probleme

Fixăm cunoştinţele

1. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este egală cu $9\sqrt{3}$ cm^2, iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflaţi aria laterală a piramidei.

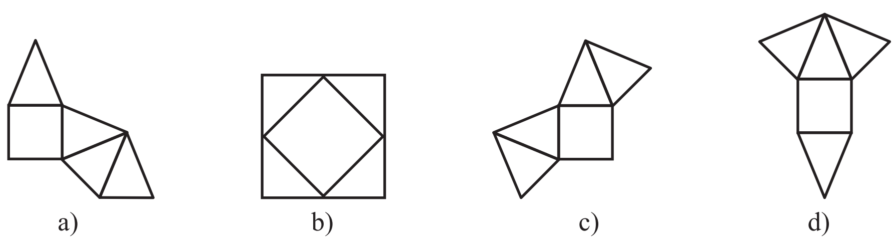
2. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $18\sqrt{3}$ cm, înălţimea – de 4 cm, iar apotema piramidei – de 5 cm. Determinaţi aria laterală, aria totală şi volumul piramidei.

3. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este de $3\sqrt{3}$ cm^3, înălţimea ei – de 1 cm, iar apotema piramidei – de 2 cm. Aflaţi aria laterală a piramidei.

4. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $36\sqrt{3}$ cm^2, apotema ei – de 4 cm, iar înălţimea piramidei – de 2 cm. Determinaţi aria totală şi volumul piramidei.

5. Calculaţi aria totală a unei piramide triunghiulare regulate cu apotema de 4 cm şi aria bazei de $27\sqrt{3}$ cm^2.

6. *Lucraţi în perechi!* Care dintre următoarele figuri nu reprezintă desfăşurarea unei piramide?



7. Apotema unei piramide patrulatere regulate este de 3 cm, înălţimea ei – de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm, iar aria laterală – de 18 cm. Aflaţi volumul piramidei.

8. Determinaţi aria laterală şi volumul unei piramide patrulatere regulate cu latura bazei de 6 cm, apotema de 5 cm şi înălţimea de 4 cm.

9. Înălţimea unei piramide patrulatere regulate este de 12 cm, perimetrul bazei piramidei – de 40 cm, iar apotema ei – de 13 cm. Aflaţi aria totală şi volumul piramidei.

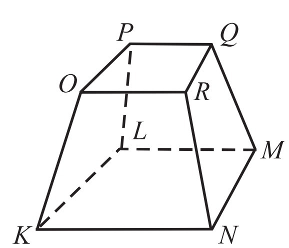
10. Aflaţi aria totală şi volumul unei piramide patrulatere regulate cu aria bazei de 36 cm^2, apotema de 6 cm şi înălţimea de $3\sqrt{3}$ cm.

11. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este de 8 cm, apotema ei – de 5 cm, iar înălţimea – de 3 cm. Determinaţi aria laterală, aria totală şi volumul piramidei.

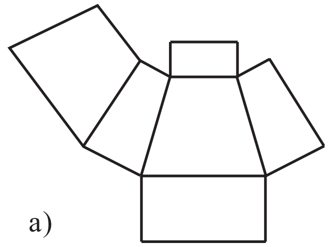
12. Aflaţi aria totală şi volumul unei piramide hexagonale regulate cu latura bazei de 4 cm, înălţimea de 2 cm şi apotema de 4 cm.

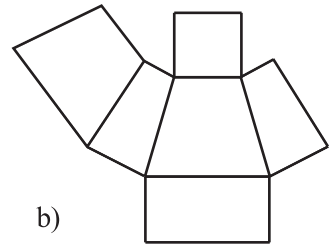
13. Reprezentaţi un trunchi de piramidă:
a) triunghiulară; b) patrulateră; c) pentagonală.

14. În figură este reprezentat un trunchi de piramidă. Identificaţi:
a) bazele;
b) feţele laterale;
c) muchiile laterale.



15. Luând în considerație proprietățile ce țin de bazele și fețele laterale ale unui trunchi de piramidă, stabiliți care dintre următoarele reprezentări poate fi desfășurarea unui trunchi de piramidă patrulateră.


a)


b)

16. Ilustrați desfășurarea unui trunchi de piramidă:
a) triunghiulară regulată;
b) patrulateră cu bazele paralelograme;
c) patrulateră cu bazele trapeze.

17. ***Investigați!*** Un poliedru are (numai) două fețe paralele, celelalte fiind trapeze. Decideți dacă poliedrul este trunchi de piramidă, știind că cele două fețe paralele sunt:
a) triunghiuri asemenea;
b) triunghiuri echilaterale;
c) pătrate;
d) poligoane regulate cu același număr de laturi.

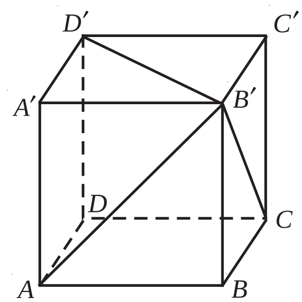
Formăm capacitățile și aplicăm

18. Fie o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei a, apotema l, perimetrul bazei $\mathscr{P}$, aria laterală $\mathscr{A}_l$ și aria totală $\mathscr{A}$. Aflați:
a) $\mathscr{P}$, $\mathscr{A}_l$ și $\mathscr{A}$, dacă $a = 6$ m, $l = 12$ m;
b) l, $\mathscr{P}$ și $\mathscr{A}_l$, dacă $a = 13$ m, $\mathscr{A} = 689$ m^2;
c) a, $\mathscr{P}$, $\mathscr{A}$, dacă $l = 16$ m, $\mathscr{A}_l = 288$ m^2;
d) a, l, $\mathscr{A}$, dacă $\mathscr{P} = 44$ m, $\mathscr{A}_l = 396$ m^2;
e) a, k, $\mathscr{P}$, dacă $\mathscr{A}_l = 352$ m^2, $\mathscr{A} = 416$ m^2.

19. Aria bazei unei piramide hexagonale regulate este egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2, iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflați aria laterală a piramidei.

20. Piramida lui Kheops a avut inițial înălțimea de 147,5 m și latura pătratului bazei de 232 m. Raportul dintre lungimea apotemei *VM* și segmentul *OM*, unde *V* este vârful piramidei, iar *O* – centrul bazei, este un număr renumit, utilizat în arhitectură încă din Antichitate. Aflați acest raport și comparați-l cu $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

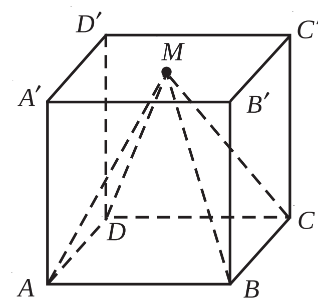
21. ***Lucrați în perechi!*** Lungimea muchiei cubului din imagine este de $4\sqrt{3}$ cm. Determinați înălțimea tetraedrului $AA'D'B'$ ($A'D'B'$ este baza tetraedrului).



22. Volumul unei piramide hexagonale regulate este egal cu $48\sqrt{3}$ cm^3, înălțimea piramidei – cu 3 cm, iar apotema este congruentă cu latura bazei. Determinați aria totală a piramidei.

23. Aria laterală a unei piramide hexagonale regulate este egală cu 192 cm², înălțimea ei – cu 4 cm, iar apotema piramidei este congruentă cu latura bazei. Determinați volumul piramidei.

24. Lungimea muchiei cubului din imagine este de 16 cm. Vârful *M* al piramidei *MABCD* este centrul feței $A'B'C'D'$ a cubului. Aflați raportul dintre aria laterală și aria bazei piramidei.



25. Latura bazei unei piramide hexagonale regulate este congruentă cu înălțimea piramidei. Determinați aria laterală și volumul piramidei, dacă înălțimea piramidei este de 10 cm, iar apotema ei – de $5\sqrt{7}$ cm.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

26. Înălțimea unei piramide patrulatere regulate este de 8 cm, iar lungimea laturii bazei – de 12 cm. Aflați aria totală și volumul piramidei.

27. Fie *ABCD* un tetraedru regulat, *AB* = 4 cm și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor *DBC*, *DAC* și respectiv *DAB*.
a) Aflați aria totală și volumul tetraedrului.
b) Aflați raportul dintre aria triunghiului $G_1G_2G_3$ și aria triunghiului *ABC*.

28. Înălțimea unui tetraedru regulat este de 8 cm. Aflați volumul tetraedrului.

29. Ana a cumpărat lapte în 2 pachete de forma unei piramide patrulatere regulate cu latura bazei de 10 cm şi înălțimea de 9 cm, iar Mihai – într-un pachet de forma unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 5 cm şi înălțimea de 25 cm. Determinați cine a cumpărat o cantitate mai mare de lapte.

30. (*EG, 2020) Într-o piramidă patrulateră regulată cu volumul de 36 cm^3, înălțimea este de 2 ori mai mică decât muchia bazei. Determinați lungimea michiei bazei.

31. ***Lucrați individual!*** **Proiect.** *Poliedre în casa mea.*

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoştințele

1. Aflați suma măsurilor unghiurilor poligoanelor care formează fețele unei:
a) piramide triunghiulare;
b) prisme patrulatere; c) prisme pentagonale.

2. Determinați înălțimea unui tetraedru regulat cu muchia de 10 cm.

3. Aflați volumul unui tetraedru regulat cu muchia de 8 cm.

4. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt de 7 cm, 4 cm, 8 cm. Determinați aria totală şi volumul paralelipipedului.

5. Volumul unui cub este de 216 cm^3. Aflați aria totală a cubului.

6. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei de 4 cm şi înălțimea de 8 cm. Determinați aria laterală şi volumul ei.

7. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 2 cm, iar fețele laterale sunt pătrate. Aflați aria laterală şi volumul prismei.

8. Fie $ABCDEF$ o prismă dreaptă cu baza ABC triunghi dreptunghic. Înălțimea prismei este congruentă cu ipotenuza AC a bazei şi $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. Determinați:
a) aria totală şi volumul prismei;
b) aria triunghiului EBM, unde M este mijlocul muchiei AC.

9. ***Investigați!***
Câte diagonale are un trunchi de piramidă:
a) pentagonală;
b) ale cărui baze sunt poligoane cu n laturi?

10. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Ştiind că distanța dintre centrele a două fețe laterale este de 4 cm şi aria laterală – de $96\sqrt{3}$ cm^2, aflați:
a) înălțimea prismei;
b) volumul prismei.

11. Toate muchiile prismei regulate $ABCA'B'C'$ sunt de 3 cm. Determinați lungimea segmentului AD, unde D este mijlocul muchiei $B'C'$.

12. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei de 15 cm şi 5 cm, iar aria lui laterală este de două ori mai mare decât aria bazei. Aflați înălțimea şi volumul paralelipipedului.

13. Fie un cub cu diagonala de 3 cm. Unind centrul cubului cu vârfurile lui, se obțin 6 piramide congruente. Ce volum are fiecare dintre aceste piramide?

14. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară. Triunghiul ABC are două laturi de 17 cm şi 24 cm, iar măsura unghiului format de ele este de 30°. Ştiind că înălțimea prismei este de 12 cm, aflați volumul ei.

Formăm capacitățile și aplicăm

15. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 24 cm, lungimea diagonalei – cu 18 cm. Determinați aria totală a paralelipipedului.

16. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, M – mijlocul lui $[A'D']$, iar P – mijlocul lui $[AB]$. Ştiind că $MP = 4\sqrt{3}$ cm, aflați lungimea muchiei şi volumul cubului.

17. Suma muchiilor concurente într-un singur vârf al unui paralelipiped dreptunghic este de 15 cm, iar diagonala lui – de $\sqrt{77}$ cm. Determinați aria totală a paralelipipedului.

18. Volumul unei prisme patrulatere regulate este de 175 cm^3, iar înălțimea ei – de 7 cm. Determinați lungimea diagonalei şi aria totală a prismei.

19. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 6 cm şi înălţimea de 8 cm. Determinaţi lungimea diagonalelor prismei, aria totală şi volumul ei.

20. *Lucraţi în perechi!* Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12$ cm, $BC = 35$ cm. Aria secţiunii determinate de muchiile AA' şi CC' este egală cu 370 cm². Determinaţi aria laterală şi volumul paralelipipedului.

Dezvoltăm capacităţile şi creăm

21. O suprafaţă de forma unui triunghi echilateral cu înălţimea de $4\sqrt{3}$ cm reprezintă desfăşurarea unui tetraedru. Determinaţi aria totală şi volumul tetraedrului.

22. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC şi $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $AV = 12$ cm.
a) Aflaţi înălţimea triunghiului ABC.
b) Determinaţi înălţimea piramidei.
c) Aflaţi volumul piramidei.

23*. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată provine dintr-o piramidă cu înălţimea de 12 cm şi latura bazei de 8 cm. Determinaţi lungimea muchiei laterale a trunchiului, ştiind că el are înălţimea de 4 cm.

24. Aria totală a unui tetraedru regulat este egală cu $6\sqrt{3}$ cm^2. Aflaţi volumul tetraedrului.

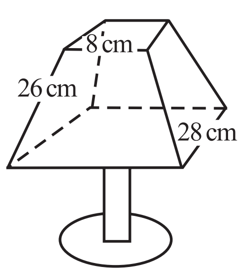
Test sumativ

Varianta I

1. Un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 10 cm şi 15 cm şi înălţimea de 20 cm este plin cu apă.
a) Reprezentaţi desfăşurarea paralelipipedului la scara 1 : 5.
b) Aflaţi aria laterală a paralelipipedului.
c) Câţi litri de apă sunt în vas?
d) Apa din vas se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălţime s-a ridicat apa în vasul cubic?
e) Aflaţi raportul dintre capacitatea vasului cubic şi a celui paralelipipedic.

2. Un corp metalic are forma unui tetraedru regulat.
a) Aflaţi lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 54 cm.
b) Reprezentaţi desfăşurarea tetraedrului.
c) Aflaţi suprafaţa totală a corpului.
d) Care este înălţimea tetraedrului?
e) Corpul a fost topit şi din metalul obţinut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 3 cm. Câte piese au fost confecţionate?

3. Abajurul unei lămpi de masă de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (vezi desenul) se confecţionează din pânză.
Va ajunge oare o bucată de pânză de forma unui pătrat cu latura de 50 cm?

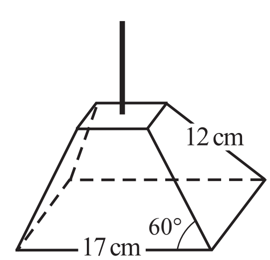


Varianta II

1. O vază de forma unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 12 cm şi înălţimea de 30 cm este pe jumătate plină cu apă.
a) Reprezentaţi desfăşurarea prismei la scara 1 : 3.
b) Aflaţi aria laterală a prismei.
c) Câţi litri de apă sunt în vază?
d) Apa din vază se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălţime s-a ridicat apa în vasul cubic?
e) Aflaţi raportul dintre capacitatea vasului cubic şi a vazei.

2. Un corp metalic are forma unui tetraedru regulat.
a) Aflaţi lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 72 cm.
b) Reprezentaţi desfăşurarea tetraedrului.
c) Aflaţi suprafaţa totală a corpului.
d) Care este înălţimea tetraedrului?
e) Corpul a fost topit şi din metalul obţinut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 6 cm. Câte piese au fost confecţionate?

3. O lustră de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (vezi desenul) se confecţionează din sticlă. Va ajunge oare o bucată de sticlă de forma unui pătrat cu latura de 30 cm?



Capitolul

4 Corpuri rotunde

Geometria atrage sufletul spre adevăr şi creează spiritul filosofiei.

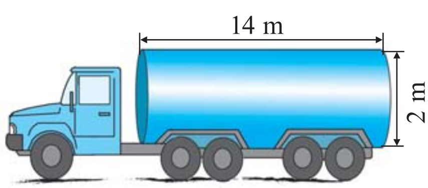
Platon

În practică, în afară de poliedre, se întâlnesc corpuri mărginite total sau parţial de suprafeţe neplane: sfera, cilindrul, conul etc., numite **corpuri rotunde**. Ca şi în cazul poliedrelor, acestea au un şir de proprietăţi interesante. De exemplu, dintre toate corpurile geometrice cu aceeaşi suprafaţă totală, sfera are volumul maxim.

Deoarece suprafeţele corpurilor rotunde se obţin (după cum veţi vedea) prin rotaţii complete ale unor figuri geometrice în jurul unei drepte, corpurile în cauză se mai numesc **corpuri de rotaţie**.

§ 1. Cilindrul (circular drept)

1 Administraţia unei benzinării a hotărât să vopsească cele 10 cisterne (de formă cilindrică) ale automobilelor cu care se transportă carburanţi. Fiecare cisternă are lungimea de 14 m şi diametrul bazei de 2 m. Câte cutii de vopsea sunt necesare, dacă o cutie ajunge pentru o suprafaţă de 15 m^2?



1.1. Elementele cilindrului

Definiţie

- Corpul geometric format din două discuri congruente, situate în plane paralele, şi din toate segmentele cu extremităţile aparţinând acestor discuri se numeşte **cilindru circular** (fig. 1).
- Cele două discuri ale cilindrului circular se numesc **baze ale cilindrului**.

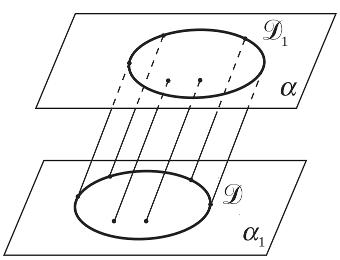


Fig. 1

Orice segment cu extremităţile în planele bazelor cilindrului, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălţime*** a cilindrului. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălţime***.

De exemplu, în figura 2 este reprezentat un cilindru cu bazele $\mathscr{D}(O, OM)$ şi $\mathscr{D}_1(O_1, O_1M_1)$.

Fie $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}_1$ cercurile care mărginesc discurile $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}_1$.

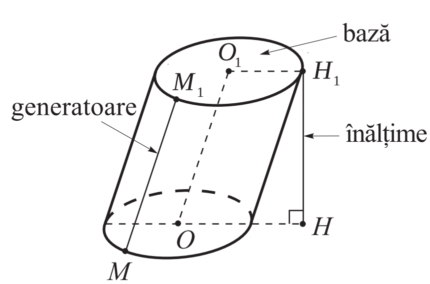


Fig. 2

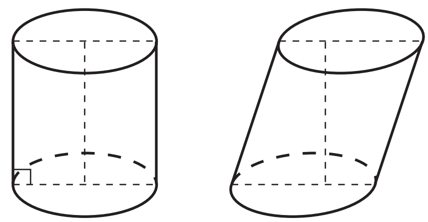
Segmentele paralele cu dreapta OO_1, ale cărei extremități aparțin cercurilor $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$, se numesc ***generatoare ale cilindrului***.

Astfel, în figura 2 segmentul MM_1 este o generatoare a cilindrului.

Mulțimea tuturor generatoarelor cilindrului se numeşte ***suprafața laterală*** a cilindrului, iar mulțimea punctelor lui, care nu aparțin bazelor şi nici suprafeței laterale, se numeşte ***interiorul cilindrului***.

Dacă generatoarele unui cilindru circular sunt perpendiculare pe planele bazelor, atunci cilindrul se numeşte cilindru circular ***drept*** (fig. 3 a)), în caz contrar – cilindru circular ***oblic*** (fig. 3 b)).

Observăm că generatoarele cilindrului circular drept sunt înălțimi ale acestuia.



a) Fig. 3 b)

Observații

1. În clasa a IX-a vom cerceta numai cilindrul circular drept, pe care îl vom numi, pe scurt, ***cilindru***.

2. În practică, mai frecvent se întâlnesc probleme ce țin de suprafața cilindrului. De aceea, pentru a scurta exprimarea, prin cilindru uneori vom înțelege numai suprafața sa.

2 Descrieți ce obțineți la rotația completă a dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei AB.

Rezolvare:

La rotația completă a dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei AB se obține un cilindru cu înălțimea AB şi raza bazei AD (fig. 4).

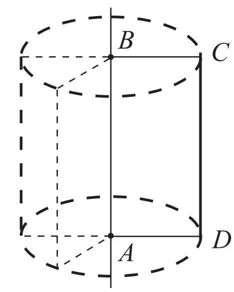


Fig. 4

1.2. Desfăşurarea cilindrului. Secțiuni

1 Desfăşurați un cilindru şi examinați ce obțineți.

Rezolvare:

Tăind suprafața laterală a cilindrului după o generatoare, obținem o suprafață dreptunghiulară (fig. 5). Dimensiunile acestui dreptunghi sunt egale cu lungimea cercurilor bazelor şi lungimea generatoarelor cilindrului. Prin urmare, desfăşurarea cilindrului constă din două discuri de raze egale şi o suprafață dreptunghiulară, având o dimensiune egală cu lungimea unuia dintre aceste discuri, iar alta – cu lungimea generatoarei lui.

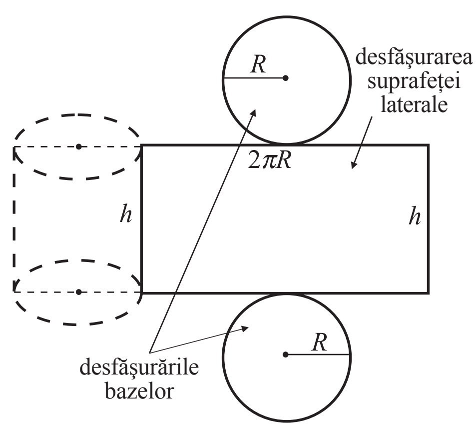


Fig. 5

Atelier

Confecționați din carton un cilindru circular drept cu înălțimea de 15 cm şi raza bazei de 5 cm.

2 Descrieţi ce obţineţi intersectând cilindrul cu un plan ce conţine centrele bazelor cilindrului.

Rezolvare:

Fie O_1 şi O_2 centrele bazelor cilindrului. Intersecţia cilindrului cu un plan ce conţine dreapta O_1O_2 este o suprafaţă dreptunghiulară $ABCD$ cu dimensiunile egale cu înălţimea cilindrului şi diametrul bazelor (fig. 6).

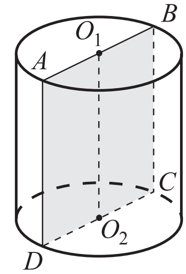


Fig. 6

Observaţie

Suprafaţa dreptunghiulară $ABCD$ se numeşte ***secţiune axială*** a cilindrului, iar dreapta O_1O_2 – ***axa de simetrie*** a cilindrului.

Aplicăm

• Un cilindru circular drept cu raza bazei de 10 cm şi generatoarea de 16 cm este secţionat paralel cu axa de simetrie a cilindrului (fig. 7). La ce distanţă de la această dreaptă se află secţiunea, dacă aria ei este de $192\ \text{cm}^2$?

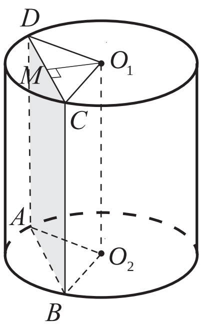


Fig. 7

Rezolvare:

Secţiunea dată este o suprafaţă dreptunghiulară $ABCD$, având o dimensiune egală cu lungimea generatoarei cilindrului.

Deci, $\mathcal{A}_{ABCD} = AD \cdot DC \Rightarrow DC = \dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{AD} = \dfrac{192}{16} = 12$ (cm).

Fie O_1M înălţimea triunghiului isoscel DO_1C cu $DO_1 = O_1C = 10$ cm.

O_1M este distanţa de la axa O_1O_2 până la secţiune.

Astfel, $O_1M = \sqrt{DO_1^2 - \left(\dfrac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{100-36} = 8$ (cm).

Răspuns: 8 cm.

1.3. Aria laterală, aria totală şi volumul cilindrului

1 Fie r raza bazei unui cilindru, iar h lungimea generatoarei (înălţimea) lui. Aflaţi aria suprafeţei laterale a cilindrului.

Rezolvare:

Deoarece desfăşurarea suprafeţei laterale a cilindrului este o suprafaţă dreptunghiulară cu dimensiunile $2\pi r$ (lungimea bazei) şi h, rezultă că aria ei este $\boxed{\mathcal{A}_l = 2\pi rh}$.

Aria suprafeţei laterale a cilindrului se numeşte ***aria laterală*** a cilindrului şi se notează cu $\mathcal{A}_l$.

Cum aria unei baze este $\mathcal{A}_b = \pi r^2$, rezultă că aria totală a cilindrului este

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \boxed{2\pi r(h+r)}.$$

2 Calculaţi volumul:

a) unei prisme patrulatere regulate drepte de înălţime h şi latura bazei a;

b) unui cilindru de înălţime h şi raza bazelor r.

Rezolvare:

a) Volumul unei prisme este egal cu $\mathcal{A}_b \cdot h$, unde $\mathcal{A}_b$ este aria bazei, iar h – înălţimea ei. Prin urmare, $\mathcal{V} = a^2 \cdot h$.

b) Considerând o prismă dreaptă cu bazele poligoane regulate cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un cilindru (fig. 8).

Prin urmare, ca şi la prisme, putem considera volumul cilindrului egal cu $\mathcal{A}_b \cdot h$. Deci, $\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h}$.

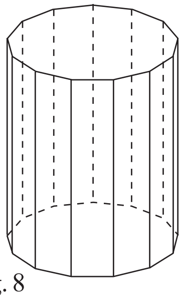


Fig. 8

Are loc

Teorema 1 Pentru orice cilindru circular drept, $\mathcal{A}_l = 2\pi rh$,

$$\mathcal{A}_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r),$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h,$$

unde r, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ sunt respectiv raza bazei, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală şi volumul cilindrului.

• ***Rezolvarea problemei*** **1** (de la începutul paragrafului):

Fie S suprafața unei cisterne, S_t suprafața tuturor cisternelor.

Atunci $S = 2\pi r(h+r)$, unde $h = 14$ m, $r = 1$ m.

$S \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2$ (m^2).

$S_t = 94{,}2 \cdot 10 = 942$ (m^2).

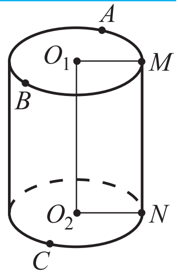
Cum $942 : 15 = 62{,}8$ şi $62 < 62{,}8 < 63$, rezultă că sunt necesare 63 de cutii cu vopsea.

Răspuns: 63 de cutii.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Reprezentați un cilindru: a) circular drept; b) circular oblic.
Numiți elementele lui.



2. ***Investigați!*** În figură este reprezentat un cilindru circular drept de baze $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$. Identificați printre segmentele AO_1, BO_1, AB, $MN\,(MN \parallel O_1O_2)$, O_1O_2, CO_2, CN, O_2N:
a) generatoarele; b) înălțimile;
c) razele bazelor; d) coardele bazelor.

3. Fie o suprafață dreptunghiulară de dimensiunile l şi L. Reprezintă oare ea desfăşurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept de bază $\mathcal{C}(O_1, R)$ şi generatoare G, dacă:

a) $L = 0{,}8\pi$, $l = \frac{2}{5}$, $R = 0{,}4$, $G = 0{,}4$; b) $L = \sqrt{12}$, $l = \frac{1}{3}$, $R = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, $G = 0{,}3$; c) $L = 6\pi^2$, $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = 3\pi$, $G = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

4. ***Lucrați în grup!*** Fie un cilindru circular drept de baze $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$ şi generatoare G, $h = O_1O_2$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ – respectiv aria bazei, aria laterală, aria totală şi volumul cilindrului. Completați tabelul:

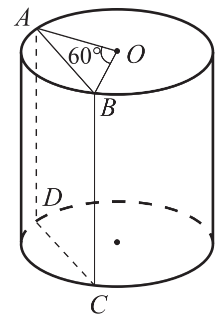
R	G	h	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
			16π	24π		
2,5		0,4				
		5				125π
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$					
		1			$1{,}5\pi$	

5. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat de arie S. Aflați suprafața totală a cilindrului şi volumul lui, dacă:
a) $S = 100$ cm²; b) $S = 4$ cm²; c) $S = 0{,}64$ cm².

6. Un dreptunghi cu laturile de 5 cm şi 8 cm se roteşte în jurul laturii mai mari. Determinați aria şi volumul corpului de rotație obținut.

7. Valoarea raportului dintre lungimile laturilor unui dreptunghi cu aria de 48 cm² este egală cu 0,75. Aflați volumul corpului obținut la rotația dreptunghiului în jurul axei lui de simetrie. Câte soluții are problema?

Formăm capacitățile și aplicăm



8. Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = a$ şi $m(\angle CAB) = \alpha$. El reprezintă desfăşurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept. Determinați aria totală şi volumul cilindrului în două variante, ştiind că: a) $a = 24$ cm şi $\alpha = 30°$; b) $a = 10$ cm şi $\alpha = 45°$; c) $a = 16$ cm şi $\alpha = 60°$.

9. *Lucrați în perechi!* În desen este reprezentat un cilindru. $[AD]$ şi $[BC]$ sunt două generatoare ale cilindrului. Aflați aria laterală a cilindrului, dacă O este centrul unei baze, iar $\mathcal{A}_{ABCD} = 20\text{ cm}^2$.

10. Înălțimea cilindrului circular drept este H, iar raza bazei lui – R. Aflați aria secțiunii duse paralel cu axa cilindrului la distanța d de la ea, dacă:
a) $R = 5$ cm; $H = 10$ cm; $d = 4$ cm;
b) $R = \sqrt{17}$ cm; $H = 4$ cm; $d = 4$ cm;
c) $R = x$; $H = 2x$; $d = 0{,}5x$.

11. Aflați volumul unei pietre, dacă la scufundarea ei într-un vas cilindric de rază R nivelul apei creşte cu x:
a) $R = 8$ cm; $x = 3$ cm; b) $R = 3\sqrt{2}$ cm; $x = 2\sqrt{2}$ cm.

12. *Lucrați în perechi!* Aflați masa unei țevi de lungime l, cu grosimea x şi diametrul interior H, dacă densitatea materialului este ρ:
a) $l = 3$ m; $x = 5$ cm; $H = 10$ cm; $\rho = 10\ g/\text{cm}^3$;
b) $l = 4\sqrt{2}$ m; $x = \sqrt{2}$ cm; $H = 9\sqrt{2}$ cm; $\rho = \frac{12}{\sqrt{2}}\ g/\text{cm}^3$.

13. Înălțimea unui cilindru circular drept este de 8 cm, iar volumul lui – de 72π cm³. Determinați aria totală a cilindrului.

14. *Investigați!* Care cratiță are capacitatea mai mare, dacă prima este îngustă şi înaltă, iar a doua – de două ori mai largă şi de două ori mai joasă decât prima?

15. Raza bazei cilindrului este de 5 cm, aria suprafeței laterale este de 3 ori mai mare decât aria unei baze. Aflați aria totală şi volumul cilindrului.

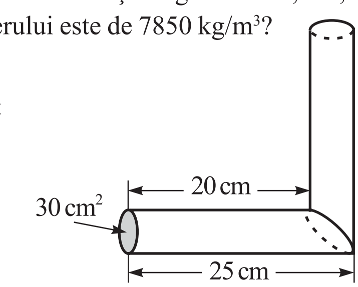
16. Valoarea raportului dintre înălțimea unui cilindru şi raza bazei lui este egală cu 1,6. Determinați aria totală şi volumul cilindrului, dacă se ştie că aria suprafeței laterale a acestuia este egală cu 80π cm².

17. Înălțimea cilindrului este de 8 cm, raza bazei lui – de 5 cm. La ce distanță de la axă, paralel cu ea, trebuie secționat cilindrul, pentru ca aria secțiunii să fie de 48 cm²?

Compuneți şi rezolvați o problemă asemănătoare.

18. *Investigați!* Cât va cântări o bară cilindrică de fier cu diametrul bazei de 10 cm şi lungimea de 0,5 m, ştiind că densitatea fierului este de 7850 kg/m³?

19. În desen este reprezentat un corp format din două bucăți de țeavă identice. Aflați volumul corpului.



Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Dintr-o bară cilindrică se execută un număr maxim de piulițe de forma unui „pătrat” (de o anumită grosime) cu latura de 12 cm, cu pierdere minimă de material. În fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 6 cm. Aflați diametrul barei şi cât la sută din volumul barei se pierde prin prelucrare.

21. Dintr-o bară cilindrică cu diametrul de 14 cm se confecționează piulițe hexagonale regulate cu grosimea de 4 cm. Care este numărul maxim de piulițe ce pot fi executate din bara de 89 cm şi cât la sută din volumul barei se pierde, dacă în fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 8 mm?

22. De câte ori trebuie mărită înălțimea unui cilindru circular drept, fără a schimba baza lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori?

Compuneți şi rezolvați o problemă asemănătoare.

23. De câte ori trebuie mărită raza bazei unui cilindru circular drept, fără a schimba înălțimea lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori?

§ 2. Conul (circular drept). Trunchiul de con

Investigăm

1 O grămadă de grâu de formă conică are înălțimea de 2,4 m, iar suprafața bazei – de 26 m^2. Aflați cantitatea de grâu din grămadă, dacă o tonă de grâu ocupă 1,3 m^3.

2.1. Elementele conului

Definiții

Fie $\mathscr{D}$ un disc și V un punct care nu aparține planului discului.

- Corpul geometric format din toate segmentele cu o extremitate V și cealaltă aparținând discului $\mathscr{D}$ se numește **con circular** (fig. 9).
- Discul $\mathscr{D}$ se numește **baza** conului, iar punctul V – **vârful** conului.
- Segmentele cu o extremitate V și cealaltă aparținând cercului care mărginește baza conului se numesc **generatoare**.

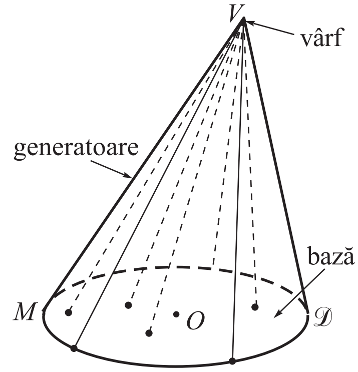


Fig. 9

De exemplu, în figura 9 este reprezentat un con cu vârful V și baza $\mathscr{D}$. Segmentul VM este o generatoare a acestui con.

Fie O centrul bazei conului circular (fig. 10).

Dacă dreapta VO este perpendiculară pe baza conului, atunci conul se numește ***drept*** (fig. 10 a)), altfel el se numește ***oblic*** (fig. 10 b)).

Mulțimea tuturor generatoarelor conului se numește ***suprafața laterală a conului***. Mulțimea punctelor conului ce nu aparțin nici suprafeței laterale, nici bazei conului se numește ***interiorul conului***.

Perpendiculara coborâtă din vârful conului pe planul bazei lui se numește ***înălțimea conului*** (fig. 10).

Lungimea acestui segment de asemenea se numește ***înălțime***.

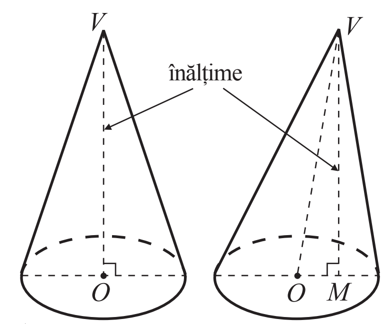


Fig. 10

Observații

1. Înălțimea conului circular drept coincide cu segmentul cu extremitățile în vârful conului și centrul bazei lui.

2. Deseori, pentru a scurta exprimarea, vom numi con numai suprafața sa.

3. În clasa a IX-a vom cerceta numai conul circular drept, pe care îl vom numi, pe scurt, ***con***.

2 Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle ABC)=90°$. Descrieți ce obțineți la rotația completă a triunghiului ABC în jurul dreptei AB.

Rezolvare:

La rotația triunghiului ABC în jurul dreptei AB se obține un con circular drept cu generatoarea AC, înălțime AB și raza bazei BC (fig. 11).

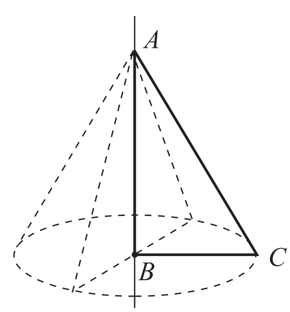


Fig. 11

2.2. Desfășurarea conului. Secțiuni

1 Desfăşuraţi un con şi examinaţi ce obţineţi.

Rezolvare:

Tăind suprafaţa laterală a unui con după o generatoare, obţinem o suprafaţă de forma unui sector de cerc (fig. 12) cu raza egală cu lungimea generatoarei conului. Lungimea arcului de cerc determinat de sector este egală cu lungimea cercului de la bază.

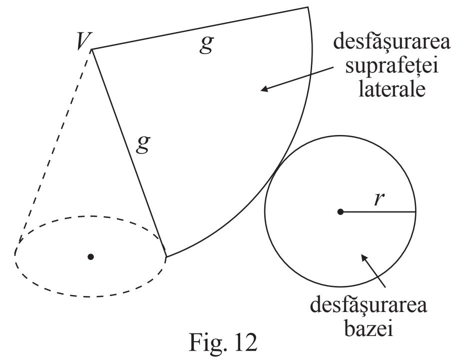


Fig. 12

Atelier Confecţionaţi din carton un con cu generatoarea de 10 cm şi raza bazei de 5 cm.

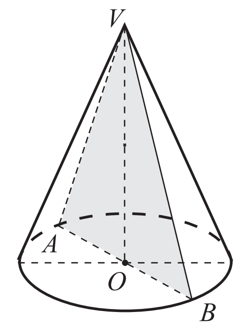


Fig. 13

• Intersectând conul cu un plan ce conţine vârful şi centrul bazei conului, obţinem o secţiune mărginită de un triunghi isoscel. Această secţiune se numeşte ***secţiune axială a conului***. În figura 13 suprafaţa mărginită de triunghiul ABC este secţiune axială a conului.

Observație Dreapta VO, unde V este vârful, iar O – centrul bazei conului, se numeşte ***axă de simetrie*** a conului.

2.3. Aria laterală, aria totală și volumul conului

1 Fie g generatoarea, iar r raza bazei conului.

• Aria suprafeţei laterale a conului se numeşte ***aria laterală*** a conului şi se notează cu $\mathcal{A}_l$.

• $\mathcal{A}_l = \pi g r$.

• ***Aria totală*** ($\mathcal{A}_t$) a conului este egală cu suma dintre aria laterală şi aria bazei conului.

Aplicăm • Să se afle aria suprafeţei corpului obţinut la rotaţia unui pătrat cu latura a în jurul diagonalei sale.

Rezolvare:

Prin rotaţia pătratului în jurul diagonalei sale obţinem un corp format din două conuri congruente cu raza bazei (r) egală cu o jumătate din lungimea diagonalei pătratului şi generatoarea (g) congruentă cu latura pătratului (fig. 14).

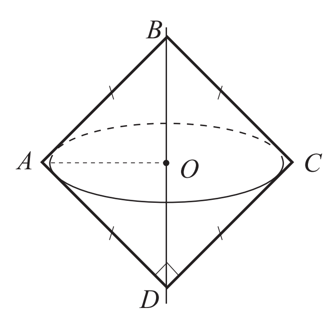


Fig. 14

Luând în consideraţie răspunsul problemei 1, obţinem:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \pi\, gr = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2 \pi \sqrt{2}.$$

Răspuns: $a^2 \pi \sqrt{2}$ u. p.

2 Aflați volumul conului cu înălțimea h şi raza bazei r.

Rezolvare:

Considerând o piramidă regulată cu baza un poligon regulat cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un con (fig. 15). Prin urmare, ca şi în cazul piramidei, volumul conului poate fi calculat după formula $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot h$.

Dar $\mathcal{A}_b = \pi r^2$. Deci, $\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

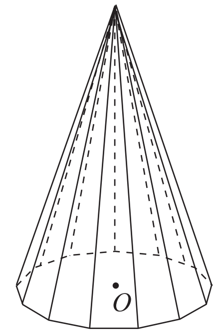


Fig. 15

Teorema 1

Pentru orice con circular drept, $\mathcal{A}_l = \pi g r$,

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r),$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

unde r, g, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ sunt respectiv raza bazei, generatoarea, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală şi volumul conului.

• ***Rezolvarea problemei*** **1** (de la începutul paragrafului):

Fie V volumul ocupat de grâu.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, unde r este raza bazei grămezii, iar $h = 2{,}4$ m.

Din condiția problemei, $\pi r^2 = 26$ (m). Prin urmare, $V = \frac{1}{3} \cdot 26 \cdot 2{,}4 = 20{,}8$ (m^3).

Deci, grâul cântăreşte $20{,}8 : 1{,}3 = 16$ (t).

Răspuns: 16 tone de grâu.

2.4. Elementele trunchiului de con

Investigăm

Intersecția unui con cu un plan paralel cu baza conului este un disc. Partea conului mărginită de acest disc şi de baza conului se numeşte ***trunchi de con*** (fig. 16). Ambele discuri ale trunchiului de con se numesc **baze**. Segmentele trunchiului de con, conținute de generatoarele conului, se numesc ***generatoare*** ale trunchiului de con. Mulțimea generatoarelor trunchiului de con formează ***suprafața laterală*** a trunchiului de con. Segmentul trunchiului de con, conținut de înălțimea conului, se numeşte ***înălțimea*** trunchiului de con.

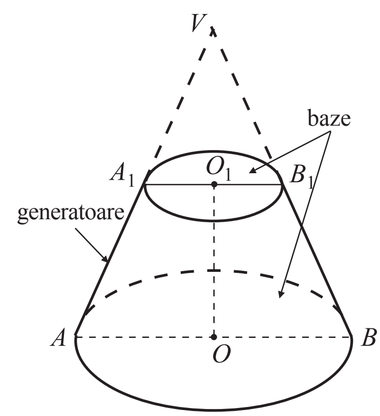


Fig. 16

Fie O, O_1 centrele bazelor trunchiului de con. Segmentul OO_1 este ***înălțimea*** trunchiului de con. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălțime***.

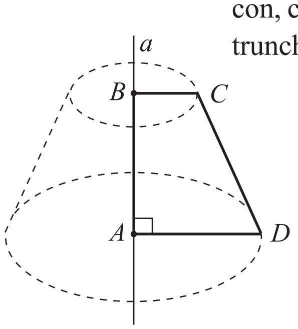


Fig. 17

1 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\angle A) = 90°$.
Descrieți ce obțineți la rotația trapezului $ABCD$ în jurul dreptei AB.

Rezolvare:

La rotația trapezului $ABCD$ (fig. 17) în jurul dreptei AB se obține un trunchi de con circular drept. Baza mică (mare) a trapezului este congruentă cu raza bazei mici (mari) a trunchiului de con, OD este generatoarea, iar AB este înălțimea trunchiului de con.

2.5. Desfășurarea trunchiului de con. Secțiuni

1 Desfăşuraţi un trunchi de con şi examinaţi ce obţineţi (fig. 18).

Rezolvare:

Tăind suprafaţa laterală a unui trunchi de con după o generatoare, obţinem o figură numită sector de coroană circulară.

Observăm că lungimile arcelor coroanei circulare sunt egale cu lungimile bazelor trunchiului de con.

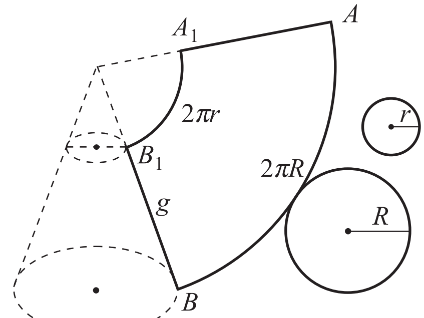


Fig. 18

Atelier Confecţionaţi din carton un trunchi de con cu razele bazelor de 2 cm şi 4 cm şi generatoarea de 10 cm.

Intersectând trunchiul de con cu un plan ce conţine centrele bazelor trunchiului de con, obţinem o secţiune care se numeşte ***secţiune axială*** a trunchiului de con.

Secţiunea axială a trunchiului de con este o suprafaţă mărginită de un trapez isoscel (fig. 19).

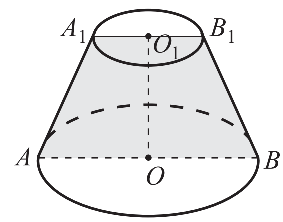


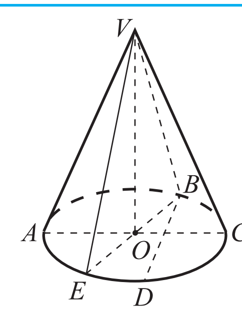
Fig. 19

Observaţie Dreapta OO_1, unde O şi O_1 sunt centrele bazelor trunchiului de con, se numeşte ***axa de simetrie*** a trunchiului de con.

- Descrieţi ce obţineţi intersectând trunchiul de con cu un plan ce nu conţine centrele bazelor lui, dar este paralel cu dreapta determinată de ele.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele



1. Reprezentaţi un con:
a) circular drept; b) circular oblic.

2. În figură este reprezentat un con circular drept cu centrul bazei O.
Identificaţi: a) generatoarele; b) înălţimile;
c) razele bazei; d) coardele bazei.

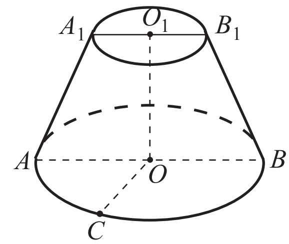
3. Ilustraţi desfăşurarea unui con circular drept cu generatoarea g şi raza bazei R, dacă:
a) $g = 5$ cm, $R = 2$ cm; b) $g = 7$ cm, $R = 3$ cm.

4. *Lucraţi în perechi!* Fie un con circular drept de bază C (O, R), $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ sunt respectiv aria bazei, aria laterală, aria totală şi volumul conului, g – generatoarea, iar h – înălţimea conului. Completaţi tabelul:

R	g	h	$\mathcal{A}_b$	$\mathcal{A}_l$	$\mathcal{A}_t$	$\mathcal{V}$
4		3				
5	13					
		4				108π
8				80π		
	7					30π

5. Un triunghi isoscel cu laturile de 5 cm, 5 cm şi 6 cm se roteşte în jurul axei lui de simetrie. Aflaţi aria totală şi volumul corpului geometric obţinut.

6. Un triunghi isoscel cu laturile de 13 cm, 13 cm şi 10 cm se roteşte în jurul bazei lui. Determinaţi aria şi volumul corpului geometric obţinut.



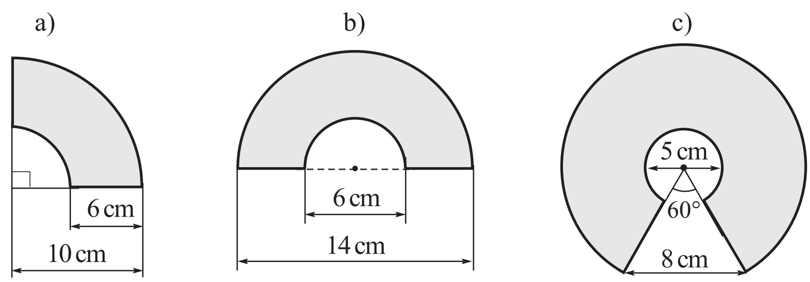
7. Reprezentați un trunchi de con: a) circular drept; b) circular oblic.

8. *Lucrați în perechi!* În figură este reprezentat un trunchi de con circular drept. Identificați:
a) generatoarele; b) înălțimile; c) razele bazelor.

9. Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm şi 5 cm se roteşte în jurul axei lui de simetrie. Descrieți corpul de rotație obținut, dacă înălțimea trapezului este de 8 cm.

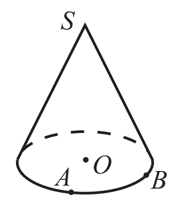
10. Ilustrați desfăşurarea unui trunchi de con circular drept cu generatoarea g şi razele bazelor R, r, dacă:
a) $g = 6$ cm, $R = 3$ cm, $r = 1$ cm; b) $g = 8$ cm, $R = 4$ cm, $r = 2$ cm.

11. *Lucrați în grup!*
Utilizând datele din desen, determinați razele bazelor, lungimea generatoarei şi înălțimea trunchiului de con circular drept, a cărui desfăşurare a suprafeței laterale coincide cu sectorul de coroană circulară reprezentat:



Formăm capacitățile și aplicăm

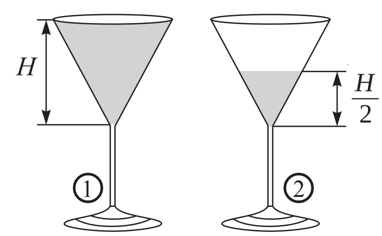
12. Aria totală a unui con circular drept este de 253 cm^2, iar aria lui laterală – de 11 cm^2. Aflați lungimea generatoarei conului.



13. Determinați aria secțiunii conului reprezentat, dacă el conține punctele S, A şi B, iar $SO = 10$ cm, $OA = 3$ cm, $AB = 4$ cm.

14. Un triunghi dreptunghic cu catetele de 4,5 cm şi 6 cm se roteşte în jurul înălțimii coborâte din vârful unghiului drept. Aflați aria totală şi volumul corpului de rotație obținut.

15. Aria secțiunii axiale a unui con este S. Aflați aria laterală şi volumul conului, dacă raza bazei conului este R.



16. *Lucrați în perechi!* Examinați desenul. În primul pahar (de formă conică) sunt 200 ml de suc. Cât suc se află în paharul al doilea, acesta fiind identic cu primul?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

17. Aria secțiunii obținute la intersecția conului cu un plan, paralel cu baza conului, este egală cu S. Secțiunea se află la distanța d de la vârful conului, iar h este înălțimea conului. Determinați aria laterală şi volumul conului.

18. Un triunghi dreptunghic cu catetele a şi b se roteşte în jurul ipotenuzei. Aflați volumul corpului obținut.

19. Aria bazei unui con circular drept este de $9\pi\ \text{cm}^2$. Determinați aria suprafeței totale a conului, dacă volumul lui este de $12\pi\ \text{cm}^3$.

20. Generatoarea unui con circular drept este de 10 cm, iar unghiul secțiunii axiale de pe lângă vârf – de 120°. Aflați volumul conului.

21. Un triunghi echilateral cu latura de 8 cm se roteşte în jurul dreptei ce conține un vârf al triunghiului şi este paralelă la latura ce nu conține acest vârf. Determinați volumul corpului de rotație obținut.

22. Un romb cu latura de 8 cm şi unghiul ascuțit de 60° se roteşte în jurul unei laturi. Aflați volumul corpului obținut.

23. Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm, 12 cm şi latura laterală de 10 cm se roteşte în jurul bazei mari. Determinați volumul corpului obținut.

§ 3. Sfera

1 Şase băieţi au mâncat egal un pepene verde cu raza de 20 cm, iar patru fete au mâncat egal (acelaşi volum) un pepene verde cu raza de 15 cm. Cui i-a revenit mai mult pepene verde: unei fete sau unui băiat?

3.1. Elementele sferei

Investigăm

2 Fie O un punct şi R un număr real pozitiv.

a) Care este locul geometric al punctelor din plan situate la distanţa R de punctul O?

b) Ce se obţine prin rotaţia în plan a unui segment de lungime R în jurul unei extremităţi (fixate)?

c) Denumiţi locul geometric al punctelor din spaţiu situate la distanţa R de punctul O.

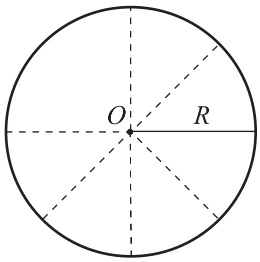


Fig. 24

Rezolvare:

a) Locul geometric al punctelor din plan situate la distanţa R de punctul O este cercul $\mathscr{C}(O, R)$ (fig. 24).

b) Rotind complet un segment de lungime R în jurul unei extremităţi, obţinem un disc de rază R (fig. 25).

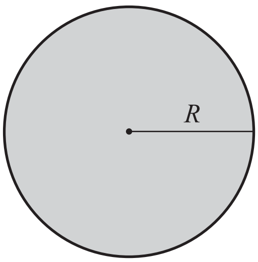


Fig. 25

c) Mulţimea punctelor din spaţiu situate la distanţa R de punctul O se numeşte ***sferă de centru O şi rază R***.

Notăm: $\mathscr{S}(O, R)$. Deci, $\mathscr{S}(O, R) = \{M \mid OM = R\}$.

Orice segment care uneşte centrul sferei cu un punct al ei se numeşte ***rază*** (fig. 26). Segmentul care uneşte două puncte ale sferei se numeşte ***coardă***. Coarda ce conţine centrul sferei se numeşte ***diametru***.

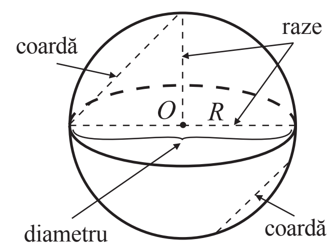


Fig. 26

3 Numiţi locul geometric al punctelor din spaţiu:

a) situate la o distanţă mai mică decât R de punctul O;

b) situate la o distanţă mai mare decât R de punctul O.

Rezolvare:

a) Mulţimea punctelor din spaţiu situate la o distanţă mai mică decât R se numeşte ***interiorul*** sferei $\mathscr{S}(O, R)$.

Notăm: Int $\mathscr{S}(O, R)$. Deci, $\text{Int } \mathscr{S}(O, R) = \{M \mid OM < R\}$.

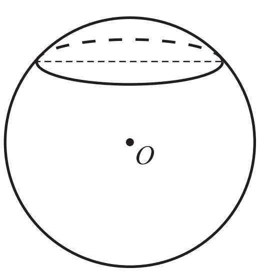


Fig. 27

b) Mulţimea punctelor din spaţiu situate la o distanţă mai mare decât R de punctul O, adică mulţimea punctelor din spaţiu care nu aparţin sferei $\mathscr{S}(O, R)$ şi interiorului ei, se numeşte ***exteriorul*** sferei $\mathscr{S}(O, R)$.

Notăm: Ext $\mathscr{S}(O, R)$. Deci, $\text{Ext } \mathscr{S}(O, R) = \{M \mid OM > R\}$.

Sfera împreună cu interiorul ei se numeşte ***bilă*** sau ***corp sferic***. Prin urmare, suprafaţa bilei este o sferă.

Secţiunea obţinută la intersecţia unui plan cu o sferă este un cerc (fig. 27).

Dacă centrul acestui cerc coincide cu centrul sferei, atunci el se numeşte ***cerc mare al sferei*** (fig. 28).

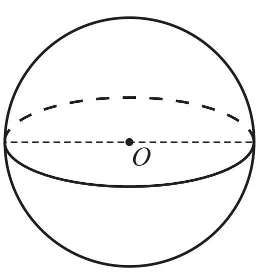


Fig. 28

3.2. Aria sferei. Volumul corpului sferic

În clasa a XII-a se va demonstra că:

a) aria suprafeței sferei se calculează cu ajutorul formulei $\mathcal{A} = 4\pi R^2$, unde R este raza sferei;

b) volumul corpului sferic se calculează cu ajutorul formulei $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, unde R este raza acestui corp.

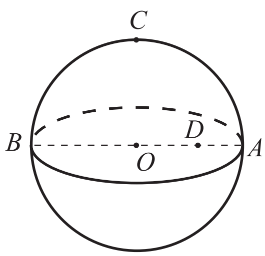
- Folosind formula $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$ rezolvați problema de la începutul paragrafului 3.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Ilustrați și notați o sferă.

2. Punctele A, B, C din desenul alăturat aparțin $\mathcal{S}(O, R)$. Identificați printre segmentele OA, OC, OB, AB, BC, CA, DA, DC, BD:
a) razele; b) coardele;
c) diametrul.



3. *Investigați!* Fie $\mathcal{S}(O, R)$, h distanța de la dreapta d la centrul O. Decideți care este poziția dreptei d față de sferă, dacă: a) $d = 8$ cm, $R = 9$ cm.
b) $d = 11$ cm, $R = 7$ cm. c) $d = 10$ cm, $R = 10$ cm.

4. Fie $\mathcal{S}(O, R)$ și d distanța de la planul α la centrul O. Decideți care este poziția planului α față de sferă, dacă:

a) $d = 5$ cm, $R = 2\sqrt{3}$ cm;

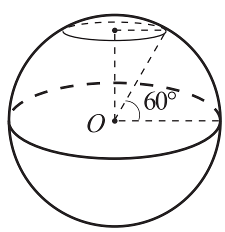
b) $d = \dfrac{7}{9}$ cm, $R = \dfrac{5}{8}$ cm;

c) $d = 5,(6)$ cm, $R = 5\dfrac{2}{3}$ cm.

5. *Lucrați în perechi!* Fie d distanța de la centrul $\mathcal{S}(O, R)$ la coarda AB. Determinați lungimea coardei, dacă: a) $d = 3$ cm, $R = 5$ cm;
b) $d = 5$ cm, $R = 13$ cm;
c) $d = 2\sqrt{5}$ cm, $R = 2\sqrt{6}$ cm.

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Raza sferei terestre este (aproximativ) de 6400 km. Care este lungimea unei paralele de 60° latitudine (vezi desenul)?



7. Aria cercului mare al sferei este S. Aflați aria și volumul sferei, dacă:

a) $S = 36\pi\ \text{m}^2$; b) $S = 1\dfrac{32}{49}\pi\ \text{m}^2$; c) $S = 27\pi\ \text{m}^2$.

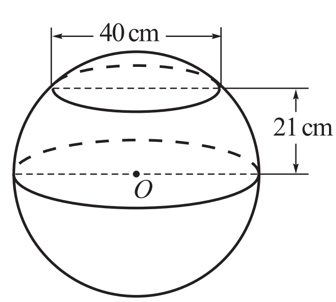
8. *Lucrați în perechi!* Fie $\mathcal{S}(O, R)$ și d distanța de la planul α la centrul O. Determinați aria cercului de intersecție a planului α cu sfera, dacă:
a) $R = 15$ cm, $d = 12$ cm;
b) $R = 8\sqrt{3}$ cm, $d = 2\sqrt{3}$ cm;
c) $R = d = 10$ cm.

9. Rezolvați problema propusă la începutul paragrafului.

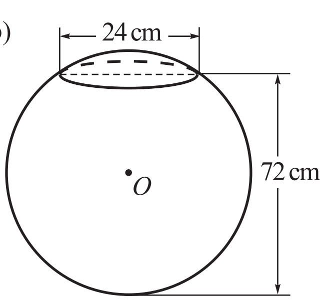
Dezvoltăm capacitățile și creăm

10. Utilizând datele din desen, aflați aria sferei (O este centrul sferei):

a)



b)



11. Aria unei sfere este de $387\ \text{cm}^2$. Aflați aria sferei al cărei volum este de 27 de ori mai mic decât volumul sferei date.

12. Aria unei sfere este de $20\ \text{cm}^2$. La ce distanță de la centru trebuie secționată sfera, astfel încât aria discului mărginit de cercul din secțiune să fie egală cu $2,75\ \text{cm}^2$?

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Reprezentați:
a) un con circular drept;
b) un cilindru circular drept;
c) un trunchi de con circular drept;
d) o sferă.

2. Construiți desfășurarea:
a) unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și generatoarea de 6 cm;
b) unui con circular drept cu raza bazei de 3 cm și generatoarea de 8 cm;
c) unui trunchi de con circular drept cu razele bazelor de 2 cm și 3 cm și generatoarea de 5 cm.

3. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile de $2\sqrt{5}$ cm și $10\sqrt{3}$ cm. Aflați aria totală și volumul cilindrului, dacă se știe că generatoarea este mai mică decât diametrul bazei lui.

4. Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc de 60° și raza de 9 cm. Aflați aria totală și volumul conului.

5. Aflați raza unui disc a cărui arie este egală cu aria totală a unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și înălțimea de 7 cm.

6. Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui dreptunghi cu diagonala de 5 cm și perimetrul de 14 cm în jurul laturii mai mari.

7. ***Lucrați în perechi!*** Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui triunghi dreptunghic cu catetele de $3\frac{1}{3}$ cm și $2\sqrt{3}$ cm:
a) în jurul catetei mai mari;
b) în jurul ipotenuzei.

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru este de forma unui pătrat cu diagonala de $\sqrt{72}$ cm. Aflați volumul cilindrului.

9. Înălțimea conului este congruentă cu diametrul bazei lui. Aflați raportul dintre aria bazei și aria laterală a conului.

10. Aflați aria laterală și volumul cilindrului obținut la rotația completă a unui dreptunghi de dimensiunile 5 cm și 7 cm în jurul unei laturi. Cercetați ambele cazuri.

11. O bilă cu raza de 6 cm și un cub cu latura de 9 cm sunt confecționate din același material. Comparați masa acestor corpuri.

12. ***Lucrați în perechi!*** Un triunghi echilateral se rotește în jurul axei lui de simetrie. Aflați volumul corpului obținut, dacă aria triunghiului este de $16\sqrt{3}$ cm^2.

13. Aflați raza bazei unui cilindru circular drept cu aria totală de 13π cm^2 și generatoarea de $1\frac{1}{4}$ cm.

14. Aflați raza bazei unui con circular drept cu aria totală de 98π cm^2 și generatoarea de 7 cm.

15. ***Investigați!*** O bilă de rază 10 cm se află într-un vas de formă cilindrică cu raza bazei de 12 cm. În vas se toarnă 4 *l* de apă. Va fi acoperită oare bila de apă?

16. Diagonalele unui romb au lungimile de 6 cm și $6\sqrt{3}$ cm. Determinați aria totală a corpului obținut la rotația completă a rombului în jurul uneia dintre laturile sale.

17. ***Investigați!*** Care corp are volumul mai mare: o sferă de rază 10 cm sau un tetraedru regulat cu muchia de 15 cm?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

18. Distanța dintre centrul bazei conului și generatoarea lui este egală cu $3\sqrt{3}$ cm. Aflați aria totală și volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu raza bazei un unghi de 60°.

19. Distanța dintre centrul bazei conului și generatoarea lui este egală cu $6\frac{1}{2}$ cm. Determinați aria totală și volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu înălțimea conului un unghi de 60°.

20. Aria laterală a unui con este de 4 ori mai mare decât aria bazei lui. Aflați măsura unghiului la centru al sectorului de cerc care reprezintă desfășurarea suprafeței laterale a conului.

21. O sferă este înscrisă într-un con. Valoarea raportului dintre aria bazei conului și aria sferei este egală cu 0,75. Aflați măsura unghiului dintre generatoare și raza bazei conului.

22. Un triunghi echilateral se roteşte în jurul unei laturi. Determinați volumul corpului obținut, dacă latura triunghiului este a.

23*. Aflați raza bazei mari a unui trunchi de con circular drept cu aria totală de 506π cm², aria laterală de 273π cm² şi raza bazei mici de 8 cm.

24*. Trapezul $ABCD$ cu baza mare AB are $m(\angle A) = 90°$, $AD = 8$ cm, $AB = 8$ cm, $DC = 2$ cm.
Determinați volumul corpului obținut prin rotația trapezului în jurul:
a) laturii AB; b) bazei mici.

25. *Lucrați în grup!* **Proiect.** *Corpurile de rotație din localitate.*

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Fie un cilindru circular drept cu generatoarea de 5,5 cm şi raza bazei de 2 cm.
a) Desenați desfăşurarea cilindrului dat.
b) Aflați aria laterală a cilindrului.
c) Determinați aria totală a cilindrului.
d) Aflați volumul cilindrului.

2. Un con circular drept de metal are generatoarea de 5 cm, iar diametrul bazei de 4 cm.
a) Aflați înălțimea conului.
b) Determinați aria laterală a conului.
c) Aflați volumul conului.
d) Conul a fost topit şi din metalul obținut s-au confecționat bile cu raza de 1 cm. Câte bile s-au obținut?

3. Aria suprafeței unei mingi sferice este egală cu 400π cm².
a) Este oare posibil să punem această minge într-o cutie de forma unui cub cu muchia de 15 cm? Justificați.
b) Mingea se află la 2 m de un perete. Un copil a lovit-o în direcția peretelui. Mingea s-a rostogolit pe o linie dreaptă de 3 ori şi s-a oprit. La ce distanță de la perete se află aceasta?
(În calcule considerați $\pi \approx 3{,}14$.)

4. O piesă are forma figurii care se obține la rotirea unui triunghi dreptunghic cu catetele de 8 cm şi 6 cm în jurul ipotenuzei. Aflați volumul piesei.

Varianta II

1. Fie un cilindru circular drept cu înălțimea de 6 cm şi raza bazei de 3 cm.
a) Desenați desfăşurarea cilindrului dat.
b) Aflați aria laterală a cilindrului.
c) Determinați aria totală a cilindrului.
d) Aflați volumul cilindrului.

2. Un con circular drept are înălțimea de 12 cm, iar diametrul bazei de 10 cm.
a) Aflați generatoarea conului.
b) Determinați aria laterală a conului.
c) Aflați volumul conului.
d) O bilă de metal cu raza de 15 cm a fost topită şi din metalul obținut s-au confecționat conuri cu dimensiunile date mai sus. Câte conuri s-au obținut?

3. Aria suprafeței unei mingi de ping-pong este egală cu 36π cm².
a) Este oare posibil să punem această minge într-o cutie de forma unui cub cu muchia de 4 cm? Justificați.
b) Mingea a fost împinsă şi s-a mişcat pe o dreaptă în direcția opusă a marginii mesei de tenis. S-a rostogolit de 5 ori şi s-a oprit. La ce distanță de la marginea mesei se află mingea, dacă lungimea mesei este de 2,74 m?
(În calcule considerați $\pi \approx 3{,}14$.)

4. O piesă are forma figurii care se obține la rotirea unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 10 cm şi un unghi ascuțit de 60° în jurul ipotenuzei. Aflați volumul piesei.

Răspunsuri și indicații

Algebră

Capitolul 1. Mulțimea numerelor reale. Recapitulare și completări

§ 1. **3.** 2) a) 0,875, nu este periodic; c) 4,(851), perioada este 851. **4.** a), c), e) Numere zecimale periodice simple; b), d), f) numere zecimale periodice mixte. **7.** 10 nuci; 120 de nuci. **8.** d) $x_1=5,\ x_2=-2$ – numere raționale; f) $x_1=5-3\sqrt{3},\ x_2=5+3\sqrt{3}$ – numere iraționale. **9.** b) $\frac{29}{9}$; c) $\frac{557}{90}$; d) $\frac{2\,817}{550}$; e) $\frac{27\,903}{1\,110}$. **10.** a) $1+\sqrt{7}>2\sqrt{3}$; d) $-\frac{1}{3}=-0,(33)$. **11.** b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; c) 1; d) $11-6\sqrt{2}$. **12.** c) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)\}$. **15.** 25 kg. **16.** 1 kg. **19.** b) $S=\varnothing$; c) $S=\{-1,\ 4\}$. **20.** a) $S=\{0;\ 0{,}5\}$; b) *Indicație*. $|2+x|=|5x-3|\Leftrightarrow(2+x)^2=(5x-3)^2$.

§ 2. **1.** a) $6\sqrt{2}+5\sqrt{6}-9{,}5$; b) $11{,}6-21\sqrt{2}$. **2.** c) $2{,}828<2\sqrt{2}<2{,}829$; d) $6{,}708<3\sqrt{5}<6{,}709$. **3.** c) $3-\sqrt{2}<1{,}7$; d) $1+\sqrt{3}<2+\sqrt{2}$. **5.** La fierbere se pierde 33% din vitamina C. **6.** ≈ 170 g de unt, ≈ 130 g de zahăr, 200 g de ciocolată, 4 ouă, 2 linguri de făină. **10.** b) De exemplu, $4+(4+\sqrt{5})$; $10-(2-\sqrt{5})$; $4(2+0{,}25\sqrt{5})$; $\frac{8\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$. **11.** De 10 ori. **12.** 0,5 și –1. **14.** 109,61 lei. **15.** a) $8-2\sqrt{15}$; d) $38+12\sqrt{10}$. **16.** b) $11\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; d) $26+15\sqrt{3}$. **17.** b) $\approx -5{,}689$; d) $\approx 2{,}466$. **18.** $16+8\sqrt{5}$. **19.** Cu 36%. **20.** a) $2\sqrt{13}+3\sqrt{3}+120\sqrt{2}-188$. **24.** 185^2-15^2.

§ 3. **2.** a) $a\in[2,\ +\infty)$; b) $a\in(-\infty,\ 0]$; c) $a\in(-1,\ +\infty)$. **3.** a) $\sqrt{12}$; b) $-\sqrt{3a^2}$; c) $\sqrt{b(b-1)^2}$. **4.** a) $4\sqrt{3}$; b) $7\sqrt{2}$; c) $a^2\sqrt{5}$; d) $(2-a)\sqrt{7}$. **6.** a) 27; b) $\frac{1}{25}$; c) $7\frac{4}{11}$; d) $\frac{1}{16}$. **7.** a) $10a^2$; b) $\frac{1}{4}x$; c) $4b^6$; d) $1000y^{-6}$. **8.** a) 10; b) $\frac{4}{3}$. **9.** a) $\frac{\sqrt{21}}{9}$; b) $\frac{3\sqrt{10}}{25}$; c) $\sqrt{3}-1$; e) $4\sqrt{5}-9$. **10.** a) –12; b) 60; c) $9+5\sqrt{3}$; d) 11. **11.** a) $x-\sqrt{5}$; b) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; c) $-\sqrt{2}$; d) $2-\sqrt{7}$. **12.** a) $\frac{1}{9}$; b) 5; c) $40\frac{1}{2}$; d) 9; e) –0,9999; f) $\frac{1}{2}$. **13.** a) 210; b) 30; c) 1500; d) 0,4. **17.** a) 23 cm²; b) 6 cm². **18.** a) 500; b) 0,07; c) 4000; d) 0,009. **19.** a) 38; b) $4(\sqrt{5}-1)$. **20.** a) A; b) A; c) F; d) A. **21.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{49}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{5}$. **22.** a) $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$; b) $\sqrt{10}$; c) $-\sqrt{2}$.

Exerciții și probleme recapitulative. **1.** b) $35-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}-4\sqrt{6}$. **3.** a) $\sqrt{7}<\sqrt{10}$; b) $\sqrt{63}>\sqrt{54}$; c) $\sqrt{23}<\sqrt{103}$. **4.** b) $3\sqrt{7}$; c) $3\sqrt{2}-2$; d) $\sqrt{66}-8$. **7.** b) c^{-10}; d) $\frac{1}{3x^5}$. **8.** 10, 1 și 9. **9.** 50,8 lei. **10.** d) De exemplu, $3\sqrt{13}+4\sqrt{13}$; $8\sqrt{13}-\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}\cdot 3{,}5$; $\frac{91}{\sqrt{13}}$. **11.** b) $11+4\sqrt{7}$; d) $200+80\sqrt{5}$. **13.** a) $3\sqrt{3}-1$; c) $14-6\sqrt{5}$. **14.** a) $S=\{-1,\ 4\}$; b) $S=\{0;\ 0{,}5\}$; c) $S=\{-2,\ 2\}$. **15.** a) $5-2\sqrt{3}<2+\sqrt{2}$; b) $6+\sqrt{7}<4\sqrt{7}$. **17.** a) $6\frac{7}{9}$; b) $15\frac{25}{99}$; c) $\frac{637}{198}$; d) $\frac{557}{4500}$. **18.** a) $-4x$; d) $-2x^2y^3\sqrt{2}$. **20.** 80 cm. **21.** 50 de ani și 14 ani. **22.** a) 4; b) 4; c) 3; d) 16; e) 3. **26.** a) 1; b) 2. **29.** *Indicație*. a), b), d) Efectuați substituția $|x|=t$; c) efectuați substituția $|3-x|=t$. **31.** *Indicație*. Cercetați cazurile $a>0,\ a<0,\ a=0$.

Capitolul 2. Rapoarte algebrice

§ 1. **1.** a) 0; b) 14; c) –1; d) $-\frac{4}{9}$. **2.** a) 14; b) –25; c) –30,25; d) $2\frac{35}{36}$. **6.** a) 1; b) 1; c) $\frac{5}{6}$; d) 1,3. **7.** 5; b) $\frac{8}{3}$; c) –9; d) 0,8. **8.** a) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; d) $\mathbb{R}\setminus\left\{13\frac{1}{3}\right\}$; e) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$; f) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 0{,}6\}$. **9.** a) 2,8; b) –3,2; c) $7\frac{7}{15}$; d) $\frac{8}{35}$. **10.** a) $F(0)<F(1)$; b) $F(-2)<F(-1)$; c) $F(0{,}5)>F(-0{,}5)$; d) $F(10)<F(-10)$. **11.** a) $F(-1), F(-2), F(-3), F(3), F(2), F(1)$; b) $F\left(\frac{1}{2}\right), F(-4), F(4), F\left(-\frac{1}{2}\right)$. **12.** a) –5; 1; 3; 9; b) –2; 2; 4; 8; c) –11; –5; –3; –1; 1; 7; d) –14; –12; –11; –9; –8; –6. **13.** a) $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; c) $\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{2}\}$; d) $\mathbb{R}\setminus\{x,y\in\mathbb{R}\,|\,x\neq y\}$. **14.** a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{5}$; c) –3; d) $-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$.

§ 2. **6.** a) $\frac{x^2}{2y}$; b) $\frac{-x^2}{3y^2}$; c) $\frac{x^2}{2x+y}$; d) $\frac{3x+2y}{7y}$. **7.** a) $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}=\frac{0{,}3}{0{,}4}=\frac{8{,}4}{11{,}2}=\frac{-16{,}8}{-22{,}4}$; b) $\frac{5}{8}=\frac{11}{17{,}6}=\frac{8}{12{,}8}=\frac{-32}{-51{,}2}=\frac{-17{,}5}{-28}$. **8.** a) $\frac{x-1}{xy}=\frac{x^2-x}{x^2y}=\frac{xy-y}{xy^2}=\frac{0{,}5x^3-0{,}5x^2+x-1}{0{,}5x^3y+xy}$; b) $\frac{x+y}{x-y}=\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2}==\frac{-7x-7y}{7y-7x}=\frac{3y^2-3x^2}{-3(x-y)^2}$. **10.** a) $\frac{3}{x+2}$; b) $\frac{2(a-b)}{a+b}$; c) $\frac{-x-y}{x}$; d) $\frac{4(b-2x)}{b+2x}$. **11.** 80. **12.** 9.

§3. **1.** a) 1; b) $\frac{6}{7}$; c) $-\frac{2}{47}$; d) $-\frac{7}{39}$. **2.** a) $1\frac{3}{8}$; b) $-\frac{11}{30}$; c) $\frac{16}{45}$; d) $1\frac{17}{48}$; e) $-1\frac{17}{84}$. **3.** a) $\frac{13}{xy}$; b) $\frac{a+b}{a-b}$; c) $\frac{4x}{x^2+1}$; d) $-3y$. **4.** a) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; b) $\frac{6+2y}{xy}$; c) $\frac{2ax}{x^2-a^2}$; d) $\frac{4-x^2}{2x(x+1)}$. **5.** a) $\frac{36}{85}$; b) $-\frac{63}{80}$; c) $-\frac{3}{11}$; d) $\frac{1}{6}$. **6.** a) $\frac{3x^2}{y^3}$; b) $\frac{10x^3y^2}{y^2-1}$; c) $\frac{4(x^2-1)}{(x-2)^2}$; d) $\frac{8}{7x}$. **7.** a) $\frac{11}{4}$; b) $-\frac{5}{4}$; c) $-\frac{3}{4}$; d) $\frac{4}{7}$. **8.** a) $\frac{4y}{3x}$; b) $\frac{b+ay}{ax-b}$; c) $\frac{3x^2}{7x-5}$; d) $\frac{25-x^2}{4y}$. **9.** a) $\frac{ab}{y}$; b) $\frac{1-x}{x+2}$; c) -1; d) $\frac{8x}{y}$. **10.** a) $\frac{36}{49}$; b) $-\frac{27}{125}$; c) $\frac{256}{625}$; d) $\frac{3^8 5^6}{2^{10}}$. **11.** a) $\frac{x^3y^3}{27a^3}$; b) $\frac{x^2(x+y)^2}{(x-y)^2}$; c) $\frac{x^6a^3}{y^{15}b^9}$; d) $\frac{4(x-1)^2}{(3a+b)^2}$. **12.** a) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; b) $\frac{-x-2}{(x+1)^2}$; c) $\frac{-3x}{a(x+y)}$. **13.** a) $\frac{2x}{x+y}$; b) $\frac{2xy}{x+y}$. **14.** a) $\frac{5}{4\sqrt{2}+1}=\frac{20\sqrt{2}-5}{31}$; b) $\frac{17}{1-8\sqrt{5}}=\frac{17(1+8\sqrt{5})}{319}$.

§4. **1.** **B**. **2.** a) x^2+3x; b) 2; c) $\frac{m}{m+1}$. **3.** a) A; b) A; c) F. **4.** a) $-\frac{x+2}{x(x+1)}$; b) $(x-1)^2$; c) $\frac{1}{x-2}$. **5.** a) Nu; b) $x=0$. **6.** Nu sunt. **7.** a) $\frac{x+2}{x^3}$; b) $\frac{3(a-b)}{ab}$. **9.** a) $\frac{2t-3}{2t+1}$; b) $\frac{a}{a-6}$; c) $\frac{3a+b}{3a-b}$; d) $\frac{2}{t+2}$. **11.** $S=\{-1, 0, 1\}$. **12.** a) $E(x)=x-1-\frac{1}{x+4}$; b) $a=1, b=-1, c=-1$.

Exerciții și probleme recapitulative. **2.** a) 5; b) 4,5; c) 5; d) $\frac{13}{5}$. **5.** a) $\frac{3}{x+3}$; b) $\frac{a-b}{a+b}$; c) $\frac{-a}{x+a}$; d) $-\frac{x+2}{x}$. **6.** a) $\frac{y+2x}{x^2y^2}$; b) $\frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{-7x-23}{x^2-16}$. **7.** a) $\frac{(x+1)^2}{x-2}$; b) $xy+y^2$; c) $\frac{y}{10ab^2x^2}$; d) $\frac{axy}{z^2}$. **8.** a) $\frac{9x+3}{y}$; b) $-\frac{x}{3x+6}$; c) $-\frac{a^4b^6}{6(x-1)^3}$; d) $\frac{a+3}{2ax}$. **9.** a) $\frac{a-b}{x}$; b) $\frac{1-x}{y+z}$; c) $\frac{x-y}{z-t}$; d) $\frac{y-z}{x}$. **10.** a) $\frac{a^3(x+1)^6}{b^3(x-1)^3}$; b) $\frac{x^8(x-1)^4}{y^{12}(x+1)^8}$; c) $\frac{a^2b^4x^6}{(a-b^2)^4y^8}$; d) $\frac{25(a^2-x)^8}{9y^8x^4}$. **11.** a) $\frac{(ax-b)^2}{a^2}$; b) $\frac{(x-3y)^2}{y^2}$; c) $\frac{x^2-x+2}{x^2-1}$; d) $\frac{6a-3}{4a^2-9}$. **12.** $4\sqrt{5}$. **13.** a) $\frac{a-2}{a+b^2}$; b) $\frac{x+y^2}{x-2}$; c) $\frac{3x+y}{xy}$; d) $\frac{a-b}{4(a+b)}$. **14.** a) 3,6; b) 2,5; c) –3; d) –3. **15.** a) $\frac{4}{x+1}$; b) $-2x$. **16.** $x=1$. **17.** $x=0$.

Capitolul 3. Funcții

§1. **2.** b). **4.** a). **6.** a) Nu; b) nu; c) da; d) nu. **8.** $f(x)=3x+1$. **9.** *Indicație*. Cercetați două cazuri: $p(x)=(8+2\sqrt{3})x$, $p(x)=(8-2\sqrt{3})x$, x – înălțimea trapezului. **10.** a) $D(f)=\mathbb{R}$; b) $D(g)=\mathbb{R}^*$; c) $D(h)=[0, +\infty)$; d) $D(f_1)=\mathbb{R}$. **15.** a) Da; b) nu.

§2. **4.** a) f – strict crescătoare; c) f – strict descrescătoare. **5.** c), d) În cadranele II, IV. **13.** a) $f(x)=7x-3$; c) $f(x)=x\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **18.** a) 1) Pentru $m\in(2, +\infty)$ funcția f este strict crescătoare; 2) pentru $m\in(-\infty, 2)$ funcția f este strict descrescătoare. Pentru $m=2$ funcția f este constantă. **20.** $A=2$, $B=10$. **21.** $a=-1$. **22.** $f(n)=3+0\cdot n$ sau $g(n)=4+(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

§3. **4.** a) $A:(0, +\infty)\to(0, +\infty)$, $A(a)=6a^2$. **6.** a) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$. **7.** b), d) Funcția f nu are zerouri. **8.** 2) *Indicație.* Axa de simetrie este dreapta $x=-\frac{b}{2a}$. **10.** b) $E(f)=(-\infty; 2]$; e) $E(f)=[-0{,}25; +\infty)$. **13.** a) $a>0, \Delta<0$; d) $a<0, \Delta=0$. **16.** 1,11m; 1,78 m; 2 m; 1,78 m; 1,11m. **18.** a) *Indicație*. Pot fi determinate 4 funcții. **19.** Aria triunghiului mic $A_1(x)=\frac{ax^2}{2h}$; aria trapezului $A_2(x)=\frac{a(h^2-x^2)}{2h}$. **20.** *Indicație*. a) Rezolvați ecuația $-2x^2-4+4=-x+2$ pentru a determina abscisele punctelor de intersecție. **23.** $m=-1$. **24.** a) $a\in\mathbb{R}^*_-$; b) $a\in\mathbb{R}^*_+$. **25.** $b=6$, $c=15$.

§4. **2.** a) 5; –4; $-\sqrt[3]{16}$; 1,5; –1; 0,1. **5.** a), b), d) Funcția f nu are extreme; c) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$.

Exerciții și probleme recapitulative. **5.** $l=2\pi r$. **6.** a) $y=15-0{,}5x$. **14.** a) $x=0$ – axă de simetrie; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=3$; d) $x=\frac{1}{12}$ – axă de simetrie; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2\frac{23}{24}$. **16.** a) Se determină 4 funcții. **17.** *Indicație*. Rezolvați ecuația $f(x)=0$ și calculați valoarea $f(0)$. **20.** c) 40 m. **22.** a) *Indicație*. Fie $2+x=t$, atunci $x=2-t$. Deci, $f(t)=5t-7$. **24.** $b=8$; $c=12$. **29.** a) *Indicație*. Scrieți funcția f sub forma $f(x)=\frac{x^2+2x+1-x}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{(x+1)^2}$; b) *Indicație*. Cercetați funcția $f(x)=1+\frac{x}{(x-1)^2}$. **31.** $m=-2$.

Capitolul 4. Ecuații. Sisteme de ecuații

§ 1. **3.** a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$; c) $\mathbb{R}$. **4.** a) $S=\{0{,}5\}$; c) $S=\{-8\}$; f) $S=\left\{-\frac{7}{15}\right\}$. **7.** a) $S=\mathbb{R}$; b) $S=\left\{\frac{7}{8}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{16}{29}\right\}$. **8.** *Indicație*. a) $\frac{1}{x-5}=t$; b) $\frac{x+2}{x}=t$; c) $\frac{t}{t+1}=z$; d) $\frac{a+3}{a}=t$. **10.** *Indicație*. Legitatea este $z_1\cdot z_2=30$, unde z_1, z_2 sunt soluțiile ecuațiilor din stânga şi respectiv din dreapta lui 30. **11.** *Indicație*. Legitatea este $x_1^{x_2}=81$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuațiilor din stânga şi respectiv din dreapta lui 81. **13.** a) $S=\{-2\}$; c) $S=\{6{,}5\}$; e) $S=\left\{-3\frac{1}{3}\right\}$. **14.** a) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; b) $S=\{-4,\ 4\}$; c) $S=\left\{-1,\ -\frac{1}{3}\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{4}{11},\ \frac{8}{9}\right\}$. **15.** a) Pentru $m=3$, $S=\varnothing$; pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\left\{\frac{10}{m-3}\right\}$; b) pentru $m=0$, $S=\varnothing$; pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $S=\left\{\frac{2(2-m)}{3m}\right\}$.

§ 2. **2.** a) $S=\{-4,\ 4\}$; b) $S=\{-5,\ 5\}$; c) $S=\left\{-\frac{2}{5},\ 0\right\}$; d) $S=\varnothing$. **3.** a) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{2}{5}, 1\right\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\varnothing$. **4.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\{2,\ 6\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{-2\}$; e) $S=\{-1,\ 4\}$; f) $S=\varnothing$. **8.** a) $(x-3)(x+1)$; c) $-(x+1)(3x+2)$. **9.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\varnothing$. **10.** 1) a) $-\frac{3}{5}$; b) $-1\frac{4}{5}$; c) $3\frac{24}{25}$; d) $-2\frac{1}{5}$. **11.** 5, 20. *Indicație*. Aplicați relațiile lui Viète; problema conduce la o ecuație de gradul II. **12.** 1; 3. **13.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\left\{-\frac{1}{3},\ 0\right\}$. **14.** a) $S=\{-2,\ -1,\ 1,\ 2\}$; b) $S=\varnothing$. **15.** a) $S=\{0\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{-1\}$. **18.** a) $(t-1)(t+1)(t^2+2)$; b) $(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1)$. **19.** *Indicație*. Grupați factorii şi faceți substituția: a) $x^2-3x=t$; b) $x^2+7x=t$. **20.** a) *Indicație*. Cum $x^2=|x|^2$, faceți substituția $|x|=t$. **22.** a) Pentru $m=0$, $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; pentru $m=-\frac{9}{4}$, $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$; pentru $m\in\left(-2\frac{1}{4},\ +\infty\right)\setminus\{0\}$, $S=\left\{\frac{3-\sqrt{9+4m}}{2m},\ \frac{3+\sqrt{9+4m}}{2m}\right\}$; pentru $m\in\left(-\infty,\ -2\frac{1}{4}\right)$, $S=\varnothing$; b) *Indicație*. Cercetați cazurile: 1) $m-2=0$; 2) $m-2\neq 0$.

§ 3. **2.** a) 1; c) –1. **3.** a) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\{-6\}$; c) $S=\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$; d) $S=\{3\sqrt{2}\}$. **4.** a) $S=\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; b) $S=\left\{-2\frac{2}{3}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{6}{7}\right\}$. **5.** a) $S=\{0\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{0,\ 6\}$. **6.** a) $S=\left\{8\frac{5}{8}\right\}$; c) $S=\{0,\ 12\}$. **7.** a) $S=\left\{0,\ 3\frac{1}{5}\right\}$; c) $S=\varnothing$. **9.** a) $S=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$; c) $S=\mathbb{Q}\setminus\{4\}$. **10.** c) $S=\varnothing$; d) $S=\{-5\}$. **12.** a) *Indicație*. Legitatea este $(x-x_1)(x-x_2)=0$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației date; b) *Indicație*. Legitatea este $\frac{x+x_1}{x+x_2}=0$, unde x_1, x_2 sunt soluțiile ecuației date. **14.** $S=\{1\}$. **15.** $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$. **16.** c) $S=\{-5\sqrt{2},\ 0,\ 5\sqrt{2}\}$. *Indicație*. DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-8,\ -6,\ 6,\ 8\}$. Numitorul comun va fi $(t^2-36)(t^2-64)$. **17.** d) DVA: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 1) Pentru $m-3<0$, $S=\varnothing$; 2) pentru $m-3=0$ rezolvați ecuația $x+\frac{1}{x}-3=0$; 3) pentru $m-3>0$ rezolvați ecuațiile $x+\frac{1}{x}-3=m-3$, $x+\frac{1}{x}-3=-(m-3)$.

§ 4. **2.** b) $S=\{(0{,}2;\ -0{,}6)\}$; d) $S=\left\{\left(11\frac{3}{7},\ -1\frac{17}{21}\right)\right\}$. **3.** b) $S=\left\{\left(-\frac{15}{17},\ 3\frac{12}{17}\right)\right\}$; d) $S=\left\{\left(1,\ \frac{1}{2}\right)\right\}$. **6.** a) $S=\{(0,\ -1)\}$; b) $S=\left\{\left(7\frac{6}{11},\ 5\frac{3}{11}\right)\right\}$; c) $S=\{(-1,\ 2)\}$. **7.** b) $S=\{(-2,\ 12)\}$; d) $S=\left\{\left(\frac{2}{5},\ 2\frac{1}{5}\right)\right\}$. **8.** a) $S=\{(2,\ 1)\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{(\sqrt{2},\ 4),\ (-\sqrt{2},\ 4)\}$. **9.** 18 km/h; 24 km/h. **11.** 2 km/h. **12.** $a=5$.

§ 5. **1.** 1, 11. **2.** 25, 10; –10, –25. **4.** 43 cm, 40 cm. **6.** 160 km, 120 km. **7.** *Indicație*. $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{ba}=10b+a$. **10.** 20 de ore, 30 de ore. **12.** $\frac{12-2\sqrt{33}}{3}$, $\frac{12+2\sqrt{33}}{3}$. **15.** 25,5 lei, 39 lei. **16.** 7 itemi de 4 puncte şi 5 itemi de 5 puncte. **17.** *Indicație*. Alcătuiți ecuația $y^2-x^2=225 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=225$, unde x – lungimea catetei, iar y – lungimea ipotenuzei. Descompuneți numărul 225 în produs de numere naturale. *Răspuns*: 4 triunghiuri. **18.** *Indicație*. Fie $x,\ y\in\mathbb{N}^*$. Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ ecuația $(x-y)(x+y)=45$. **19.** 20 de camioane. **21.** 120 m.

Exerciții și probleme recapitulative. **1.** b) $S=\left\{1\frac{4}{11}\right\}$; d) $S=\left\{-13\frac{2}{3}\right\}$. **2.** b) $S=\{0\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\varnothing$. **4.** b) $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$; d) $S=\varnothing$. **5.** d) $S=\{(2,\ 8)\}$. **6.** b) $S=\left\{-1,\ \frac{2}{3}\right\}$. **7.** 48 de apartamente de 2 camere şi 16 apartamente de

4 camere. **9.** 31 lei. **10.** a) $S=\{-2\}$; b) $S=\left\{-\frac{8}{9}\right\}$; c) $S=\{-1, 1\}$; e) $S=\{-2\}$. **12.** *Indicație*. Aplicați teorema lui Viète. **13.** a) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$; b) *Indicație*. Efectuați substituția $(2x-1)^2=t$; c) *Indicație*. Efectuați substituția $(x-2)^2$; d) $(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})^2$. **15.** a) $S=\{(-2, -1)\}$; c) $S=\{(-16{,}5; -49{,}5)\}$. **18.** 28%. **19.** $\frac{3+15\sqrt{103}}{26}, \frac{-15+3\sqrt{103}}{26}$; $\frac{3-15\sqrt{103}}{26}, \frac{-15-3\sqrt{103}}{26}$. **20.** b) $-1, 1\frac{1}{3}$; c) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$. **23.** $-\frac{1}{2}$. **24.** $\left\{-2; 0; \frac{5}{4}\right\}$. **25.** 6 trandafiri albi, 15 trandafiri roșii. **26.** 10 și 45. **27.** 1. **28.** Dana – 60 bomboane, Paula – 30 bomboane. **30.** a) $S=\left\{-1; -\frac{1}{2}; 1; 1{,}5\right\}$; b) $S=\{-3, -1, 1\}$; c) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **31.** Fiul are 13 ani, tata 39 de ani, mama 32 de ani.

Capitolul 5. Inecuații. Sisteme de inecuații

§ 1. **3.** a) $S=(-\infty, 2)$; b) $S=(-\infty, -2)$; c) $S=(-\infty, -1]$; d) $S=\left[-\frac{7}{8}, +\infty\right)$. **4.** a) $S=\{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **5.** a) $S=\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; b) $S=\varnothing$; c) $S=[2{,}5; +\infty)$; d) $S=\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$. **8.** 10 numere naturale. **10.** Cântarul va arăta între 111 și 125 kg. **11.** a) $S=\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$; c) $S=\varnothing$; d) $S=[2{,}5; +\infty)$. **12.** a) $x\in[2, +\infty)$; b) $x\in\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$; c) $x\in(3, 10]$. **13.** a) $S=(1, 4)$; c) $S=[-2, 2]$; d) $S=(-3, 4)$. **14.** 25 de cărți. **15.** $x\in(3, 13)$. **16.** 24 de locuri. **17.** b) $S=\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$; c) $S=\left(-4, -\frac{2}{3}\right)$. **18.** $x\in\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right]$. **19.** $x\in[1, +\infty)$. **21.** a) $a\in(-\infty, 2)$; b) $a\in(-\infty, 3)$. **22.** d) $a\in(-\infty, -2)$.

§ 2. **3.** a) $S=\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; b) $S=(-\infty, -8)\cup(6, +\infty)$; c) $S=\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$; d) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$; f) $S=\mathbb{R}$; g) $S=(-\infty, 0)\cup(7, +\infty)$; h) $S=\left(-1, \frac{5}{4}\right)$. **4.** a) $S=(-\infty, -8)\cup(5, +\infty)$; b) $S=[-2, 0]$; c) $S=(-6, 5)$; d) $S=(-\infty, -4)\cup$ $\cup[-1, +\infty)$; e) $S=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. **5.** a) $S=(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$; b) $S=[-5, -3]$; d) $S=(-\infty; -1]\cup[4{,}5; +\infty)$. **7.** a) $S=\left[-1, \frac{3}{2}\right]$; b) $S=\mathbb{R}$; c) $S=(-5, 4)$; d) $S=\varnothing$. **8.** a) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$; b) $(-\infty, -4)\cup(0, +\infty)$. **9.** a) $S=(-\infty, -2)\cup(0, 3)$; b) $S=(-\infty, -5]\cup$ $\cup\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$; c) $S=(-\infty, 1]\cup[2, 3]$; d) $S=[-2, 1)\cup[3, +\infty)$. **10.** Da, poate fi decupat. **11.** a) $S=\left(-\frac{5}{3}, -\frac{9}{8}\right]$. **12.** a) $x\in[-5, 1)\cup(1, 6]$; b) $x\in[-10, -6]\cup[7, 10]$. **13.** a) $S=[1, 2]\cup[3, 4]$; b) $S=(-3, -1)\cup(-1, 1)$. **14.** b) $m\in(-\infty, -5)$. **15.** b) $a\in\left(0, 1\frac{1}{4}\right)$.

Exerciții şi probleme recapitulative. **5.** –3. **6.** a) $\left[-\frac{3}{2}, 2\right]$; b) $\left[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; c) $\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$; d) $(-\infty, -1]\cup\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$. **8.** a) $S=(-4, -1)$. **9.** $x\in(1, +\infty)$. **10.** $S=\left(\frac{3}{5}, 5\right)$. **11.** $S=(-\infty, -6)\cup\{-1\}\cup(2, +\infty)$. **12.** Nu există atare valori. **13.** $a\in(-\infty, -3]\cup[1, +\infty)$.

Capitolul 6. Elemente de teoria probabilităților și de statistică matematică

§ 1. **3.** a) Aleator; b) aleator; c) imposibil; d) imposibil; e) sigur; f) imposibil. **4.** a) A e mai posibil decât B; b) A e mai puțin posibil decât B; c) A e mai puțin posibil decât B. **5.** Unghiuri, triunghi. **9.** a) 15 bile; b) 18 bile; c) 19 bile; d) 11 bile; e) 19 bile.

§ 2. **1.** a) O şansă din şase; c) nicio şansă. **2.** 0,5. **3.** a) $\frac{1}{6}$; b) $\frac{2}{3}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{5}{6}$; e) 0. **4.** $\frac{1}{15}$. **5.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{6}$. **7.** a) $\frac{1}{5}$; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{11}{20}$. **9.** *Indicație.* Se vor număra numerele prime (pare, impare) dintre cele 90 de numere naturale. **11.** $\frac{13}{18}$. **12.** $P(b)=\frac{14}{31}$; $P(f)=\frac{17}{31}$. **14.** $P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$. **15.** $P=\frac{2}{25}$.

§ 4. **1.** 20%. **2.** 7500 lei. **3.** 500 lei. **4.** 11840 lei. **5.** 10%. **6.** 7326120 lei. **7.** 20%. **8.** 552 lei. **9.** 9900 lei. **16.** 24500 u.m. **17.** a) 45%; b) 2255 cărți; c) 41,25%. **22.** a) 20%; b) 6592 lei. **23.** 4000 lei. **25.** *Indicație*: 3 luni = 3 : 12 = 0,25 ani; 9 zile = 9 : 360 = 0,025 ani. **27.** *Indicație*: 3 luni = 3 : 12 = 0,25 ani; S = 1 412,78 u.m., D = 412,78 u.m.

Exerciții şi probleme recapitulative. **3.** $P(v)=\frac{1}{3}$; $P(r)=\frac{2}{3}$. **4.** O față galbenă și cinci fețe roșii. **6.** 2) a) 15 mln. lei; b) 30%. **7.** 12%. **8.** 12000 lei. **9.** b) $\frac{2}{25}$. **10.** 0,98. **11.** $\frac{1}{9}$. **12.** 0,1. **13.** 13 mere. **16.** 8%. **17.** 5000 lei. **18.** 5 luni $=\frac{5}{12}$ ani; 15 zile $=\frac{15}{360}$ ani. **20.** Urna b.

Geometrie

Capitolul 1. Cercul

§1. **4.** a) 8 cm; b) 7 cm; c) $2\sqrt{10}$ cm; d) 2 cm. **5.** a) 12 cm; b) 5 cm; c) 15 cm. **6.** a) Secantă cercului; b) secantă cercului; c) tangentă la cerc; d) secantă cercului; e) exterioară cercului. **7.** $R=10$ cm, $AC=10\sqrt{3}$ cm, $BM=5$ cm. **8.** a) 13,7 cm; b) 3,(4) cm; c) 8 cm. **9.** a) Secantă cercului; b) secantă cercului; c) exterioară cercului; d) tangentă la cerc. **10.** a) 3 cm; b) 5 cm; c) $\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$. **11.** a) 10 cm; b) 1,5 cm. **12.** 60°. **15.** 30°. **16.** 12 cm. **17.** a) $M\in \mathrm{Int}\,\Delta ABC$; b) $M\in \mathrm{Int}\,\Delta ABC$; c) dacă $r>2$, atunci $M\in \mathrm{Int}\,\Delta ABC$; dacă $r=2$, atunci $M\in \mathscr{C}(O,\,2)$; dacă $0<r<2$, atunci $M\in \mathrm{Ext}\,\Delta ABC$. **18.** 20 cm. **19.** 10 cm. **20.** 7 cm. **21.** 7,5 cm. **22.** $\sqrt{15}$ cm. **24.** a) 1; b) 30; c) $\sqrt{x^2+y^2}$. **26.** $(12+\sqrt{11})$ cm. **30.** $3\sqrt{3}$ cm. **32.** 20 cm sau 40 cm. **33.** 8 cm, 15 cm. **34.** 5 cm. **38.** 60 cm. **39.** $8\sqrt{2}$.

§2. **2.** a) 45°; b) 90°; c) 125°. **3.** a) $MN=KL$; b) $MN<KL$; c) $MN=KL$. **4.** a) 44°; b) 152°; c) 17°30′; d) 80°. **5.** a) 120°; b) 72°; c) 36°; d) 30°; e) 30°; f) 15°. **11.** Pătrat. **12.** Dreptunghi. **13.** a) 50°; b) 40°; c) 65°. **14.** O oră. **15.** 40°. **16.** 90°, 120°, 60°, 90°. **17.** 180°, 90°, 60°, 30°. **18.** 18,5 cm. **19.** a) 3 coarde și 6 arce. **20.** Măsurile arcelor vor fi egale cu 10°, 30°, 60°, 70°, 80°, 110°. **21.** a) 90°; b) 35°; c) 55°; d) 20°. **22.** a) 120°; b) 150°; c) 24°; d) 210°. **23.** 6 cm. **24.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. **25.** 80° sau 100°. **26.** $20\sqrt{3}$ cm. **27.** 17 cm. **28.** a) 64°; b) 117°; c) 48°; d) 57°. **33.** 18,75 cm. **34.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative. **3.** 5 cm. **4.** 6 cm. **5.** $2\sqrt{13}$ cm. **7.** a) 60°; b) 17°; c) 67°. **9.** a) 6 cm; b) $4\sqrt{7}$ cm. **10.** a) 12 cm; b) 0,5 cm. **11.** a) 52° sau 128°; b) 74°; c) 46°; d) 61°. **12.** a) 30°; b) 150°; c) 270°. **13.** $6\sqrt{3}$ cm. **15.** $4\sqrt{2}$ cm. **17.** $AM=(3\sqrt{2}+2\sqrt{17})$ cm; $BD=2\sqrt{34-3\sqrt{34}}$ cm. **18.** 8,125 cm. **19.** $3\sqrt{13}$ cm. **20.** a) $\mathrm{m}(\angle A)=115°$, $\mathrm{m}(\angle B)=40°$, $\mathrm{m}(\angle C)=25°$; b) $\mathrm{m}(\angle A)=120°$, $\mathrm{m}(\angle B)=37°$, $\mathrm{m}(\angle C)=23°$.

Capitolul 2. Arii

7. a) 7,3 cm, 2,5 cm; b) $11\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm; c) $\frac{2}{3}$ cm, $\frac{7}{9}$ cm; d) 16 cm, 2 cm. **8.** 17 m. **11.** a) $\mathcal{A}=2\sqrt{110}$ cm^2; c) $\mathcal{A}=10\sqrt{11}$ cm^2. **12.** a) $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=49{,}5$ cm^2; $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=36$ cm^2; b) $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=87{,}5$ cm^2; $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=50$ cm^2; c) $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=53{,}25$ cm^2; $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=45$ cm^2; d) $\mathcal{A}_{ABC}=\mathcal{A}_{ABD}=21\sqrt{2}$ cm^2; $\mathcal{A}_{ADC}=\mathcal{A}_{DCB}=\frac{42\sqrt{2}-49}{2}$ cm^2. **15.** 81 cm^2. **16.** 42 cm. **17.** 52 cm^2. **18.** 4π m^2. **19.** a) $24\sqrt{3}$ cm^2; b) $32\sqrt{2}$ cm^2; c) $80\sin 36°$ cm^2. **20.** a) $P=48$ cm, $\mathcal{A}=144$ cm^2; b) $P=36\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A}=162$ cm^2; c) $P=4a$ cm, $\mathcal{A}=a^2$ cm^2; d) $P=2x\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A}=\frac{x^2}{2}$ cm^2. **21.** a) De 9 ori; b) de 49 de ori; c) de n^2 ori. **22.** a) De 2 ori; b) de $\sqrt{10}$ ori; c) de $4-\sqrt{11}$ ori. **23.** a) De 4 ori; b) de 25 de ori; c) de $\frac{8}{3}$ ori. **24.** 99 cm^2. **25.** 63 cm^2. **26.** 216 cm^2. **27.** 27%. **28.** $(144\sqrt{2}-96)$ cm^2. **29.** a) 400g; b) 2100 g. **30.** 48 cm^2. **31.** 15 cm^2. **32.** 900 cm^2. **33.** 13 cm. **34.** 70 cm^2. **35.** $\frac{S(m+2n)}{2(m+n)}$. **36.** $P=128$ cm, $\mathcal{A}=480$ cm^2. **37.** $\frac{135}{2}$ cm^2. **38.** Înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului ABC. **39.** π m. **40.** 6 cm^2. **41.** 294 cm^2. **42.** 170 cm^2. **44.** $3r^2\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Capitolul 3. Poliedre

§1. **3.** b). **4.** $\mathcal{A}=54$ cm^2, $\mathcal{V}=27$ cm^3. **5.** $\mathcal{V}=64$ cm^3, $\mathcal{A}=96$ cm^2. **6.** $\mathcal{A}=24$ cm^2, $\mathcal{V}=8$ cm^3. **7.** 27 *l*. **9.** 150 cm^2. **10.** 8 cm^3. **11.** 7,2 kg. **12.** $6\sqrt{3}$ cm. **13.** $3(2+\sqrt{3})$ cm. **14.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $4\sqrt{2}$ cm. **15.** $\mathcal{A}=1536$ cm^2, $\mathcal{V}=4\,096$ cm^3.

§2. **4.** $\mathcal{A}=214$ cm^2, $\mathcal{V}=210$ cm^3. **5.** $\mathcal{A}_l=156$ cm^2, $\mathcal{A}_t=236$ cm^2, $d=5\sqrt{5}$ cm. **6.** 188 cm^2. **7.** 960 cm^3. **8.** $\mathcal{A}_l=96$ cm^2, $\mathcal{A}_t=126$ cm^2. **9.** $\mathcal{A}_l=126$ cm^2, $\mathcal{V}=63\sqrt{3}$ cm^3. **10.** $\mathcal{A}_l=36\sqrt{3}$ cm^2, $\mathcal{A}_t=44\sqrt{3}$ cm^2. **11.** 18 cm^2. **12.** $\mathcal{A}_t=(96+32\sqrt{3})$ cm^2, $\mathcal{V}=64\sqrt{3}$ cm^3. **13.** $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ cm^3. **14.** $\mathcal{A}_t=(105+50\sqrt{3})$ cm^2, $\mathcal{V}=\frac{175\sqrt{3}}{4}$ cm^3. **15.** $\sqrt{7}$ cm. *Indicație.* Dacă x, y, z sunt dimensiunile paralelipipedului, atunci $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este lungimea diagonalei. **16.** $\mathcal{A}_l=112$ cm^2, $\mathcal{A}_t=144$ cm^2, $\mathcal{V}=112$ cm^3. **17.** 200 cm^3. **18.** $\mathcal{A}_l=288$ cm^2, $\mathcal{A}_t=360$ cm^2. **19.** $19\sqrt{3}$ kg $\approx 32{,}87$ kg. **20.** $\mathcal{A}_t=290$ cm^2, $\mathcal{V}=300$ cm^3. **21.** $\mathcal{A}_l=128$ cm^2, $\mathcal{A}_t=160$ cm^2. **22.** $\mathcal{A}_l=90$ cm^2, $\mathcal{A}_t=(90+27\sqrt{3})$ cm^2, $\mathcal{V}=\frac{135\sqrt{3}}{2}$ cm^3. **23.** $216\sqrt{3}$ cm^2. **24.** $120\sqrt{3}$ cm^3. **25.** b). **26.** 160 cm^3. **27.** $19\frac{1}{21}$. **28.** 364,5 cm^3. **29.** 10 cm^2. **30.** $\mathcal{A}_l=120$ cm^2, $\mathcal{A}_t=(120+12\sqrt{3})$ cm^2. **31.** 12 m^3. **32.** 1,2 cm. **33.** a) $2\sqrt{38}$ cm; b) 248 cm^2. **34.** a) $\mathcal{A}_l=288\sqrt{3}$ cm^2, $\mathcal{A}_t=32(9\sqrt{3}+2)$ cm^2, $\mathcal{V}=384\sqrt{3}$ cm^3; b) 24 cm. **35.** $\mathcal{A}_t=(32\sqrt{3}+144)$ cm^2, $\mathcal{V}=96\sqrt{3}$ cm^3. **36.** 1 dm³. **37.** 12 saci. **38.** 13 cm. **39.** 6 cm.

§ 3. **1.** $45\ \text{cm}^2$. **2.** $\mathcal{A}_l=45\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=72\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **3.** $9\ \text{cm}^2$. **4.** $\mathcal{A}_t=(36\sqrt{3}+72)\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **5.** $63\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **6.** b). **7.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^3$. **8.** $\mathcal{A}_l=60\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=48\ \text{cm}^3$. **9.** $\mathcal{A}_t=360\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=400\ \text{cm}^3$. **10.** $\mathcal{A}_t=100\,\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **11.** $\mathcal{A}_l=80\,\text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=144\,\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=64\ \text{cm}^3$. **12.** $\mathcal{A}_t=(24\sqrt{3}+48)\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=16\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **18.** a) $\mathcal{P}=24$ m, $\mathcal{A}_l=144\,\text{m}^2$, $\mathcal{A}=180\,\text{m}^2$; b) $\mathcal{P}=52$ m, $\mathcal{A}_l=520\,\text{m}^2$, $l=20$ m; c) $\mathcal{P}=36$ m, $a=9$ m, $\mathcal{A}=369\,\text{m}^2$; d) $a=11$ m, $l=18$ m, $\mathcal{A}=517\ \text{m}^2$; e) $a=8$ m, $\mathcal{P}=32$ m, $l=22$ m. **19.** $\mathcal{A}_l=60\sqrt{2}\ \text{cm}^2$. **21.** 6 cm. **22.** $(48\sqrt{3}+96)\ \text{cm}^2$. **23.** $\frac{432\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$. **24.** $\sqrt{5}$. **25.** $\mathcal{A}_l=150\sqrt{7}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{1000}{3}\ \text{cm}^3$. **26.** $\mathcal{A}_t=384\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=384\ \text{cm}^3$. **27.** a) $\mathcal{A}_t=16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{16\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$; b) $\frac{1}{9}$. **28.** $64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **29.** Mihai. **30.** 6 cm.

Exerciții și probleme recapitulative. **1.** a) $720°$; b) $1\,080°$; c) $1\,440°$. **2.** $10\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm. **3.** $\frac{128\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$. **4.** $\mathcal{A}_t=232\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=224\ \text{cm}^3$. **5.** $\mathcal{A}_t=216\ \text{cm}^2$. **6.** $\mathcal{A}_l=96\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=32\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **7.** $\mathcal{A}_l=24\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=12\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **8.** a) $\mathcal{A}_t=594\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=810\ \text{cm}^3$; b) $56{,}25\ \text{cm}^2$. **9.** $\mathcal{A}_l=16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=8\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **10.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $192\ \text{cm}^3$. **11.** $\frac{3\sqrt{7}}{2}$cm. **12.** $h=3{,}75$ cm, $\mathcal{V}=281{,}25\ \text{cm}^3$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$. **14.** $1\,224\ \text{cm}^3$. **15.** $252\ \text{cm}^2$. **16.** $AB=4\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{V}=128\sqrt{2}\ \text{cm}^3$. **17.** $148\ \text{cm}^2$. **18.** $d=3\sqrt{11}$ cm, $\mathcal{A}_t=190\ \text{cm}^2$. **19.** $\mathcal{A}_t=(18\sqrt{3}+288)\ \text{cm}^2$, patru diagonale de $2\sqrt{43}$ cm și două de $4\sqrt{13}$ cm. **20.** $\mathcal{A}_l=940\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=4\,200\ \text{cm}^3$. **21.** $\mathcal{A}_t=16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{8\sqrt{5}}{3}\ \text{cm}^3$. **22.** a) 18 cm; b) $\sqrt{10}$ cm; c) $\frac{108\sqrt{30}}{3}\ \text{cm}^3$. **23.** $\frac{8\sqrt{11}}{3}$ cm. **24.** $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\ \text{cm}^3$.

Capitolul 4. Corpuri rotunde

§ 1. **3.** a), c) Da; b) nu. **5.** a) $\mathcal{A}=150\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=250\pi\ \text{cm}^3$; b) $\mathcal{A}=6\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=2\pi\ \text{cm}^3$; c) $\mathcal{A}=0{,}96\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=0{,}128\pi\ \text{cm}^3$. **6.** $\mathcal{A}=130\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=200\pi\ \text{cm}^3$. **7.** $96\pi\ \text{cm}^3$ sau $72\pi\ \text{cm}^3$. **8.** a) $\mathcal{A}=\left(192\sqrt{3}+\frac{288}{\pi}\right)\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{1152\sqrt{3}}{\pi}\ \text{cm}^3$ sau $\mathcal{A}=\left(192\sqrt{3}+\frac{96}{\pi}\right)\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{1152}{\pi}\ \text{cm}^3$; b) $\mathcal{A}=\left(100+\frac{50}{\pi}\right)\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{250}{\pi}\ \text{cm}^3$; c) $\mathcal{A}=\left(\frac{128}{\pi}+\frac{256}{\sqrt{3}}\right)\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{1\,024}{\pi\sqrt{3}}\ \text{cm}^3$ sau $\mathcal{A}=\left(\frac{128}{3\pi}+\frac{256}{\sqrt{3}}\right)\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{1\,024}{3\pi}\ \text{cm}^3$. **9.** $40\pi\ \text{cm}^2$. **10.** a) $60\ \text{cm}^2$; b) $8\ \text{cm}^2$; c) $2x^2\sqrt{3}$. **11.** a) $192\pi\ \text{cm}^2$; b) $36\sqrt{2}\pi\ \text{cm}^2$. **12.** a) 375 kg; b) 60,8 kg. **13.** $66\pi\ \text{cm}^2$. **14.** A doua. **15.** $\mathcal{A}=125\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=187{,}5\pi\ \text{cm}^3$. **16.** $\mathcal{A}=130\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=200\pi\ \text{cm}^3$. **17.** 4 cm. **19.** $1350\ \text{cm}^3$. **20.** $12\sqrt{2}$ cm, $\approx 48\%$. **21.** 22 de piulițe, 17 % din volumul bazei se pierde. **22.** De 8 ori. **23.** De $2\sqrt{2}$ ori.

§ 2. **5.** $\mathcal{A}_t=24\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=36\pi\ \text{cm}^3$. **6.** $\mathcal{A}=312\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=1\,440\pi\ \text{cm}^3$. **12.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ cm. **13.** $2\sqrt{105}\ \text{cm}^2$. **14.** $\mathcal{A}=\frac{9\sqrt{7}}{4}\pi(4+\sqrt{7})\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{567\sqrt{2}}{4}\pi\ \text{cm}^3$. **15.** $\mathcal{A}_l=\pi\sqrt{R^4+4S^2}$, $\mathcal{V}=2\pi RS$. **16.** 25 ml. **17.** $\mathcal{A}_l=\frac{h^2}{d^2}\sqrt{d^2\pi S+S^2}$, $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\frac{Sh^3}{d^2}$. **18.** $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\pi a^2b^2\sqrt{a^2+b^2}\ \text{cm}^3$. **19.** $24\pi\ \text{cm}^2$. **20.** $125\pi\ \text{cm}^3$. **21.** $256\pi\ \text{cm}^3$. **22.** $384\pi\ \text{cm}^3$. **23.** $1056\pi\ \text{cm}^3$.

§ 3. **5.** a) 8 cm; b) 24 cm; c) 4 cm. **6.** $6\,400\pi$ km. **7.** a) $\mathcal{A}=144\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=288\pi\ \text{cm}^3$; b) $\mathcal{A}=6\frac{30}{49}\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=1\frac{286}{343}\pi\ \text{cm}^3$; c) $\mathcal{A}=108\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=108\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$. **8.** a) $81\pi\ \text{cm}^2$; b) $180\pi\ \text{cm}^2$; c) 0. **9.** Unui băiat. **10.** a) $3\,364\pi\ \text{cm}^2$; b) $5\,476\pi\ \text{cm}^2$. **11.** a) $43\ \text{cm}^2$. **12.** a) $\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative

3. $\mathcal{A}_t=\left(20\sqrt{15}+\frac{150}{\pi}\right)\text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{150\sqrt{5}}{\pi}\ \text{cm}^3$. **4.** $\mathcal{A}_t=15{,}75\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{9\sqrt{35}}{8}\pi\ \text{cm}^3$. **5.** 6 cm. **6.** $\mathcal{A}_t=33\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=36\pi\ \text{cm}^3$. **7.** a) $\frac{200\sqrt{3}}{27}\pi\ \text{cm}^3$; b) $\frac{100}{3\sqrt{13}}\pi\ \text{cm}^3$. **8.** $\frac{54}{\pi}\ \text{cm}^3$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **10.** Cazul I. $\mathcal{A}_l=70\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=175\pi\ \text{cm}^3$. Cazul II. $\mathcal{A}_l=70\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=245\pi\ \text{cm}^3$. **11.** Masa bilei este mai mare. **12.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$. **13.** 2 cm. **14.** 7 cm. **15.** Nu. **16.** $\frac{81\pi}{2}\ \text{cm}^3$. **17.** Sfera. **18.** $\mathcal{A}_t=108\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{216\sqrt{3}}{3}\pi\ \text{cm}^3$. **19.** $\mathcal{A}_t=\left(169+\frac{338\sqrt{3}}{3}\right)\pi\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\frac{2197\sqrt{3}}{9}\pi\ \text{cm}^3$. **20.** $90°$. **21.** $60°$. **22.** $\frac{3}{4}a^3\pi$. **23.** 13 cm. **24.** a) $256\pi\ \text{cm}^3$; b) $256\pi\ \text{cm}^3$.

Cuprins

Algebră

Geometrie