Olimpiada de matematică a Republicii Moldova
Anul de studii 2016-2017, 29 octombrie 2016
Proba de evaluare pentru selectarea lotului de eleve,
participante la Olimpiada Europeană de Matematică 2017 pentru Fete

Problema 1. Fie $a, b, c \geq 0$. Demonstrați inegalitatea

$$\frac{1+a+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c+c^2}{1+a+b^2} \geq 3.$$

Problema 2. Fie O mijlocul segmentului AB. Punctul C, diferit de A și B, este situat pe cercul (Ω) cu centrul O si raza OA=OB, iar punctul D este proiectia ortogonală a lui C pe dreapta AB. Dacă cercul de centru C si rază CD intersectează cercul (Ω) în punctele M și N, demonstrați că dreapta MN trece prin mijlocul segmentului CD.

Problema 3. Sunt date *6050* de puncte într-un plan, oricare *3* dintre ele fiind necoliniare. Determinați numărul maxim k de triunghiuri fără vârfuri comune din acest plan astfel încât oricare *2* triunghiuri să nu se suprapună.

Problema 4. Punctele P și Q sunt situate în interiorul triunghiului ABC astfel încât $m(\angle PAB)=m(\angle QAC)<\frac{1}{2}\cdot m(\angle BAC)$. Fie P_A și Q_A punctele de intersecție ale dreptelor AP și AQ cu cercul circumscris triunghiului CPB și, respectiv cercul circumscris triunghiului CQB. Similar se definesc perechile de puncte (P_B, Q_B) și (P_C, Q_C). Fie $PQ_A \cap QP_A=\{M_A\}$, $PQ_B \cap QP_B=\{M_B\}$, $PQ_C \cap QP_C=\{M_C\}$.
Demonstrați următoarele afirmații:

1. Dreptele AM_A, BM_B, CM_C sunt concurente;
2. $M_A \in BC$, $M_B \in AC$, $M_C \in AB$.

Fiecare soluție corectă se apreciază cu 7 puncte.
Timp de lucru: 4 ore 30 minute.

Soluții

Problema 1.

Din inegalitatea lui Cauchy-Schwarz avem că:

$$\frac{1+a+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c+c^2}{1+a+b^2}=\sum_{cyc}\frac{1+a+a^2}{1+b+c^2}$$

$$=\sum_{cyc}\frac{(1+a+a^2)^2}{(1+b+c^2)(1+a+a^2)}\geq\frac{(\sum(1+a+a^2))^2}{\sum(1+b+c^2)(1+a+a^2)}$$

$$=\frac{(3+a+b+c+a^2+b^2+c^2)^2}{\sum(1+b+c^2)(1+a+a^2)}$$

Deci este suficient de demonstrat că:

$$\frac{(3+a+b+c+a^2+b^2+c^2)^2}{\sum(1+b+c^2)(1+a+a^2)}\geq 3 \iff (3+\sum a+\sum a^2)^2\geq 3\sum_{cyc}(1+b+c^2)(1+a+a^2)$$

Deschizînd parantezele, obţinem că:

$$(3+a+b+c+a^2+b^2+c^2)^2-3\sum_{cyc}(1+a+a^2)(1+b+c^2)=$$

$$=\left(\sum a^2-\sum ab\right)+\left(\sum a^4-\sum a^2b^2\right)+2\left(\sum a^3+\sum ab^2-2\sum a^2b\right)$$

Din inegalitatea mediilor rezultă cu uşurinţă inegalităţile:

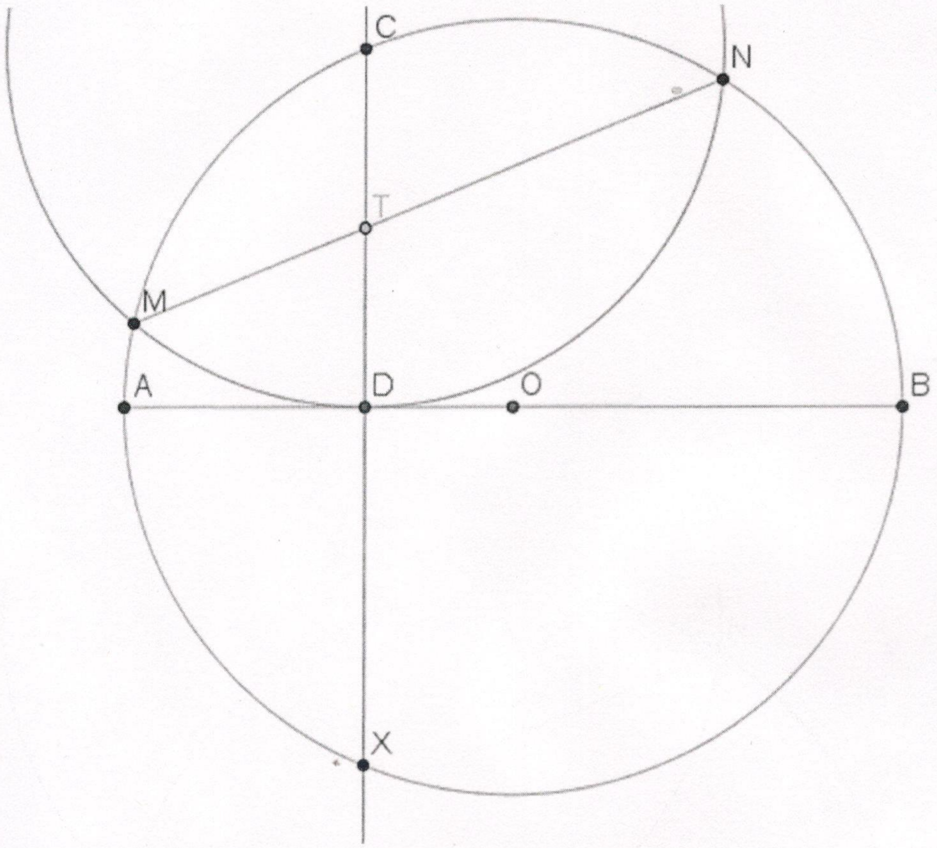
$$\sum a^2\geq\sum ab$$

$$\sum a^4\geq\sum a^2b^2$$

$$\sum a^3+\sum ab^2\geq 2\sum a^2b$$

qed

Problema 2.



Soluție. Fie X cealaltă intersecție a liniei CD cu (Ω). Atunci, considerând ca CM=CN, avem ca <CNM=<CXM=<CXN, deci CN este tangent cercului TNX. Ca consecință CN*CN=CT*CX=CT*2*CN(deoarece AB diametru). Din ultima relație obținem, CT=CN/2, concluzionând problema.

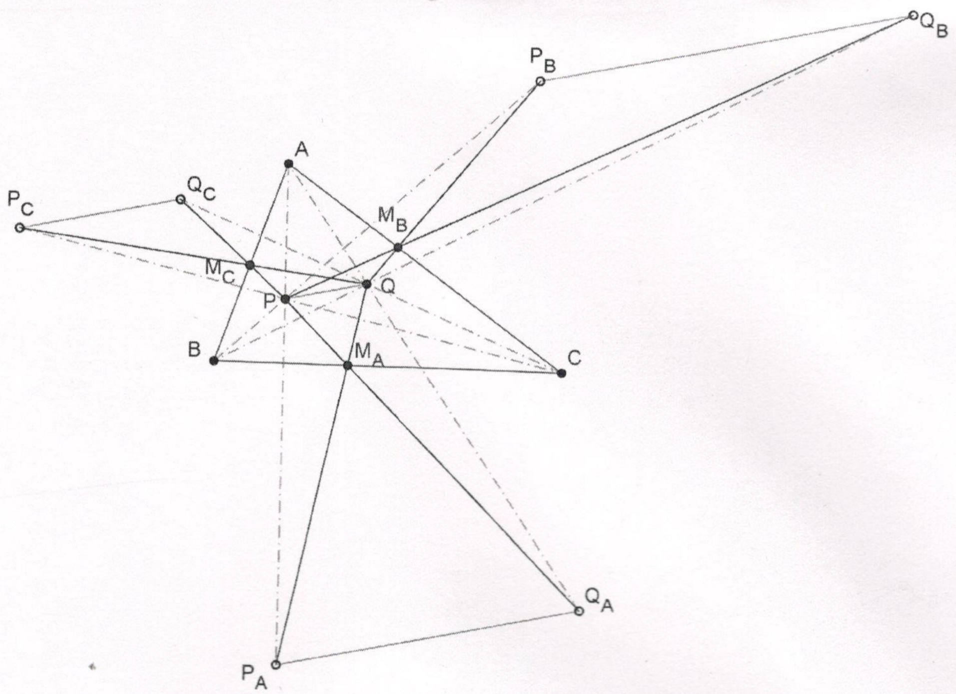
Problema 3.

Solutie. Precum orice triunghi are 3 virfuri iar $6050=3\cdot2016+2$ obtinem ca $k \leq 2016$. In continuare vom demonstra prin inductie ca pentru orice $n \in \mathbb{N}$ fiind date $3n+2$ puncte, putem construi $k = n$ triunghiuri care satisfac conditia problemei.

Pentru $n = 1$ alegem orice triunghi a carui virfuri sunt puncte din plan. Precum din 5 puncte poate fi construit maxim un triunghi obtinem ca $k = n = 1$. Fie afirmatia este justa pentru $n = m$. In continuare vom demonstra ca pentru $n = m + 1$ putem alege $k = m + 1$ triunghiuri cu virfurile in cele $3m + 5$ puncte.

Alegem 2 puncte A si B astfel incit drepata ce contine aceste 2 puncte impart planul in 2 regiuni, una continind $3m + 3$ puncte iar cealalta nici un punct (spre exemplu alegem orice 2 puncte de pe infasuratoarea convexa a celor $3m + 5$ puncte si vor satisface proprietatile de sus). Ulterior translam dreapta AB pina la momentul cind intersecteaza un punct din plan, si il denumim C (acest punct poate fi nu unic insa exista cel mult inca un punct pe aceasta dreapta). Construim triunghiul $\triangle ABC$. Infasuratoarea convexa a celor $3m + 2$ puncte ramase nu se suprapune cu triunghiul $\triangle ABC$, deci daca construim din pasul inductiv m triunghiuri cu aceste $3m + 2$ puncte obtinem ca ele nu se suprapun cu triunghiul $\triangle ABC$. Deci am obtinut $m + 1$ triunghiuri cu virfurile in cele $3m + 5$ puncte satisfacind conditia problemei. Deci pasul inductiv este demonstrat. Concludem ca cu cele 6050 puncte din plan pot fi construite maxim $k = 2016$ triunghiuri care satisfac conditiile problemei.

Problema 4.



Solutie.

1.1 Se demonstreaza $PQ \parallel P_AQ_A \parallel P_BQ_B \parallel P_CQ_C$.

Din $\angle BAP = \angle Q_AAC$ si $\angle ABP = \angle QBC = \angle AQ_AC$ rezulta ca $\triangle ABP$ e asemenea cu $\triangle AQ_AC$. Deci $\frac{AQ_A}{AB} = \frac{AC}{AP}$ sau $AQ_A \cdot AP = AB \cdot AC$. Similar se gaseste $AB \cdot AC = AQ \cdot QP_A$. Sau $\frac{AP}{AP_A} = \frac{AQ}{AQ_A}$. Folosind Teorema lui Thales in $\triangle APQ$ si $\triangle AP_AQ_A$, rezulta ca $PQ \parallel P_AQ_A$. La fel se gasesc celelalte relatii.

1.2 AM_A, BM_B, CM_C sunt concurente(o imediata consecinta a rezultatului anterior).

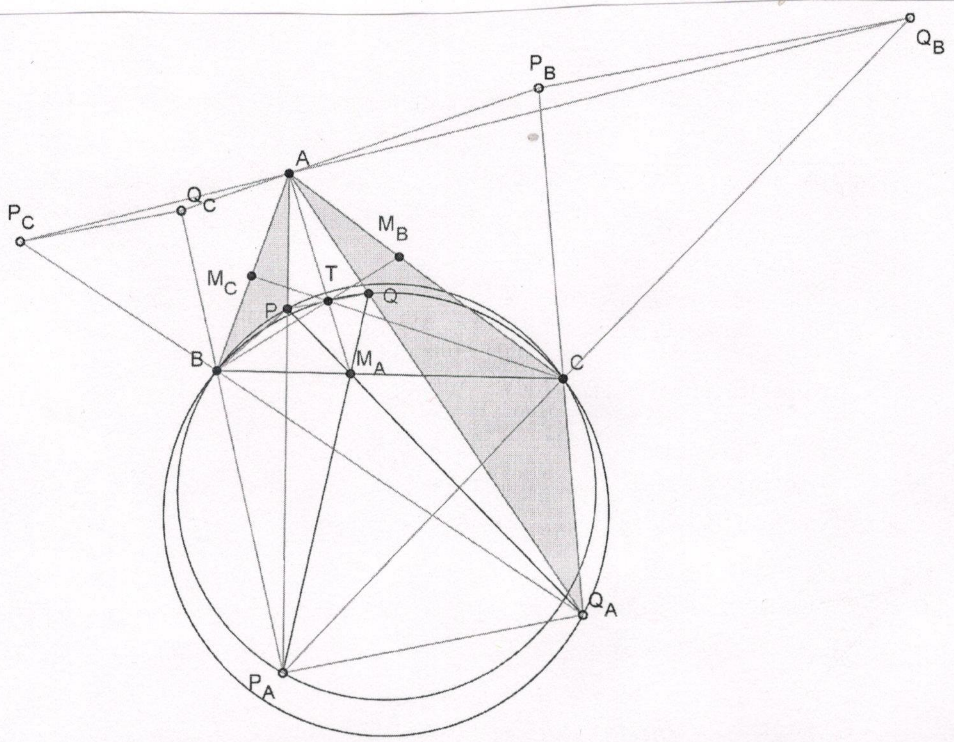
Din Teorema lui Thales,(se poate si cu Teorema lui Ceva, sau Teorema trapezului) in AP_AQ_A, considerind ca $PQ \parallel P_AQ_A$, rezulta ca AM_A trece prin mijlocul segmentului PQ, fie acest punct T. Deci $A_MA \cap BM_B \cap CM_C = T$.

2.1 Se demonstreaza $(\overline{P_A, B, Q_C}, \overline{P_A, C, Q_B})$, $(\overline{P_B, A, Q_C}, \overline{P_B, C, Q_A})$ si $(\overline{P_C, A, Q_B}, \overline{P_C, B, Q_A})$. ($\overline{abc}$- inseamna punctele a,b si c sunt colineare).

$\angle Q_ACP_B = \angle BCQ_A + \angle BCA + \angle ACP_B = \angle BQQ_A + \angle BCA + \angle APP_B = (\angle BAQ + \angle ABQ) + \angle BCA + (\angle BAP + \angle ABP) = (\angle PAC + \angle CBP) + \angle BCA + (\angle BAP + \angle ABP) = \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = 180°$. Concluzionam ca $\overline{Q_ACP_B}$. Similar se gasesc celelalte relatii.

2.2 Se arata $M_A \in BC, M_B \in AC$ si $M_C \in AB$ folosind Teorema lui Desargues.

Aplicind Teorema lui Desargues in $\triangle BPP_A$ si CQ_AQ, rezulta ca $QP_A \cap PQ_A = M_A \in BC$.(Deoarece intersectiile perechilor de linii corespunzatoare, punctele A, P_B, Q_C, din (2.1) sunt colineare.) In acelasi mod se gaseste ca $M_B \in AC$ si $M_C \in AB$.



Comentariu. Aceasta problema invata si motiveaza elevi sa gindeasca in configuratii. Fiind nevoiti sa calculeze intai unghiuri dupa care sa observe configuratia si sa foloseasca teorie de geometrie proiectiva(Teorema lui Desargues). Am pus problema pe parti din 2 motive. 1. Prima sarcina se poate demonstra fara idei si principii de geometrie proiectiva. Insa a doua folosind Teorema lui Desargues.(Clar, pot fi si alte solutii mai simple sau cu cunostinte mai elimentare.) 2. Sa arate ca problemele de geometrie se rezolva prin pasuri, mai multe observari si studiere a problemei.

Aceasta problema se rezolva mult mai rapid, considerind urmatoarea lema. Daca $(X, X"), si(Y, Y")$ sunt perechi de puncte isogonale (X isogonal cu X', si Y isogonal cu Y') in $\triangle ABC$, atunci $XY \cap X'Y'$ si $XY' \cap X'Y$ sunt isogonale fata $\triangle ABC$. Insa e o proprietate cu o solutie avansata folosind teoria conicelor. Si e o probabilitate mica ca elevi sa cunoasca aceasta lema. Aceasta problema am descoperit-o studiind curbele cubice iar alegerea de perechi de puncte (P, P_A) ca in problema, e o proprietate a cubicelor circulare ce contin $\triangle ABC$. Mai concret, daca $P \in$ Cubicul circular, atunci $P_A \in$-Cubicului Circular. Deci nu cred ca aceasta problema este una cunoscuta elevilor. Si nu am vazut-o in nicio carte.

Si ca o ultima observatie, problema poate fi exprimata si configurata in mai multe moduri, mai elegante si mai simple.

Barem de corectare

Problema 1.

1. Aducerea la forma $\sum_{cyc}\frac{1+a+a^2}{1+b+c^2} = \sum_{cyc}\frac{(1+a+a^2)^2}{(1+b+c^2)(1+a+a^2)}$ — 2p.

2. Obținerea inegalității

$$\sum_{cyc}\frac{(1+a+a^2)^2}{(1+b+c^2)(1+a+a^2)} \geq \frac{(3+a+b+c+a^2+b^2+c^2)}{\sum_{cyc}(1+b+c^2)(1+a+a^2)}$$ — 2p.

3. Reducerea inegalității de demonstrat la inegalitatea suficientă de demonstrat. — 1p

$$\frac{(3+a+b+c+a^2+b^2+c^2)^2}{\sum_{cyc}(1+b+c^2)(1+a+a^2)} \geq 3.$$

4. Obținerea relației de demonstrat

$$\left(\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab\right)+\left(\sum_{cyc}a^4-\sum_{cyc}a^2b^2\right)+2\left(\sum_{cyc}a^3+\sum_{cyc}ab^2-2\sum_{cyc}a^2b\right)\geq 0$$ 1p.

5. Aplicarea inegalităților mediilor și demonstrarea inegalității din p. 4. — 1p.

total: 7p.

Problema 2.

(1) Dacă $\Omega\left(O, \frac{AB}{2}\right)$ – cercul de diametru AB, iar $\mathcal{C}(C, CD)$ – cercul cu raza CD, se notează $CT = a$, $DT = b$ şi

$YC = CD = a+b$, $CD = DX = a+b$,

unde $CD \cap \Omega = \{X\}$, $CD \cap \mathcal{C} = \{Y\}$ — 2p

(2) Dacă $MN \cap CD = \{T\}$, atunci puterea punctului T în raport cu cercul $\mathcal{C}$:

$MT \cdot NT = YT \cdot DT = (2a+b) \cdot b$ — 2p

(3) Puterea punctului T în raport cu cercul Ω stabileşte relaţia:

$MT \cdot NT = XT \cdot CT = a(2b+a)$ — 2p.

(4) Din (2) şi (3) $\Rightarrow$

$(2a+b)\,b = a(2b+a) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow$ — 1p

$\Rightarrow CT = DT.$

Total: 7 puncte

Problema 3.

1. Se arată, că nu există mai mult de 2016 triunghiuri - 1p.
2. Se arată, prin inducție, că $\forall n \in N$ din $3n+2$ puncte cu condiția din enunț, se pot construi n triunghiuri fără nici o suprapunere;
2.1. baza inducției: pentru 5 puncte există un triunghi - 1p.
2.2. construcția pentru trecerea inductivă - 4p.
2.3. concluzia finală pentru 2016 puncte - 1p.

Total: 7p.

Problema 4.

1. Demonstrează $PQ \parallel P_AQ_A \parallel P_BQ_B \parallel P_CQ_C$ 1p
2. Dacă T este mijlocul segmentului PQ, se arata că $AM_A \cap BM_B \cap CM_C = \{T\}$ 1p
3. Demonstrează colinearitatea punctelor $P_A - B - Q_C$, $P_A - C - Q_B$, $P_B - A - Q_C$, $P_B - A - Q_C$, $P_C - A - Q_B$, $P_C - B - Q_A$ 2p
4. Demonstrează că $M_A \in (BC)$, $M_B \in (AC)$, $M_C \in (AB)$ 3p

Total: 7p.